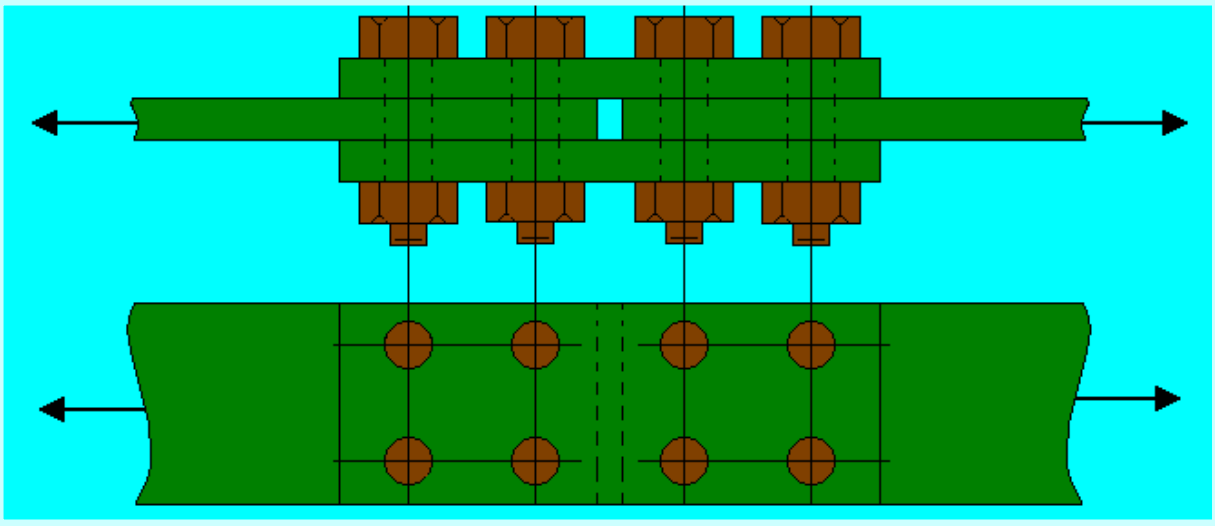
PAVEL TRIPA **MIHAI HLUŞCU**

REZISTENȚA MATERIALELOR

NOȚIUNI FUNDAMENTALE ŞI APLICAȚII

*



Editura MIRTON
Timişoara
2006

Referenți ştiințifici:

Prof. Univ. Dr. Eur. Ing. Tiberiu BABEU
Membru al Academiei de Ştiințe Tehnice din România

Prof. Univ. Dr. ing. Nicolae NEGUȚ

Tehnoredactare computerizată:

Prof. univ. dr. ing. Pavel TRIPA
Şef lucr. dr. ing. Mihai HLUŞCU

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
TRIPA, PAVEL
Rezistența materialelor : noțiuni fundamentale şi aplicații/
Pavel Tripa, Mihai Hluşcu. – Timişoara: Mirton, 2006
Bibliogr.
ISBN (10) 973-661-934-6
(13) 978-973-661-934-2

I. Hluşcu Mihai

539.4

C U P R I N S

Cuprins ……			1
	Prefață		3
1	**INTRODUCERE** ……		5
	1.1	Clasificarea forțelor care acționează asupra elementelor de rezistență	5
	1.2	Momentul forței față de un punct	7
	1.3	Reducerea forțelor într-un punct	9
	1.4	Condițiile ce trebuie satisfăcute de către elementele de rezistență	10
	1.5	Tipuri de probleme întâlnite în Rezistența materialelor ….....	12
2	**REAZEME ŞI REACȚIUNI** ……		14
	2.1	Reazeme	14
	2.2	Reacțiuni	15
	2.3	Calculul reacțiunilor	17
	2.4	Etape în calculul reacțiunilor. Exemple	19
3	**EFORTURI. DIAGRAME DE EFORTURI** …..…….….		24
	3.1	Eforturi	24
	3.2	Diagrame de eforturi	27
	3.3	Etape pentru trasarea diagramelor de eforturi	29
	3.4	Exemple de trasare a diagramelor de eforturi	31
		3.4.1 Diagrame de eforturi la bare drepte orizontale	31
		3.4.2 Diagrame de eforturi la cadre cu bare drepte	38
		3.4.3 Diagrame de eforturi la bare curbe plane	42
		3.4.4 Diagrame de eforturi la sisteme spațiale de bare drepte ……	46
	3E	Diagrame de eforturi (Probleme propuse)	57
	3R	Diagrame de eforturi (Răspunsuri) ……	77
4	**CARACTERISTICI GEOMETRICE ALE SUPRAFEȚELOR PLANE**		118
	4.1	Considerații generale	118
	4.2	Caracteristicile geometrice ale câtorva suprafețe simple ……	122
	4.3	Etape pentru determinarea caracteristicilor geometrice ale suprafețelor plane	124
	4.4	Exemple de determinare a principalelor caracteristici geometrice ale suprafețelor plane	128
	4E	Caracteristici geometrice ale suprafețelor plane (Probleme propuse) ……..	136
	4R	Caracteristici geometrice ale suprafețelor plane (Răspunsuri) …	147
5	**SOLICITAREA AXIALĂ** ……..……		159
	5.1	Considerații generale. Etape de calcul	159
	5,2	Calculul sistemelor de bare drepte, static determinate	163

	5.3	Calculul barelor drepte solicitate de forțe axiale	170
	5.4	Calculul sistemelor de bare articulate, static nedeterminate …..	173
	5.5	Calculul sistemelor cu inexactități de execuție ….....	179
		5.5.1 Calculul barelor articulate, static nedeterminate, cu inexactități de execuție	179
		5.5.2 Calculul barelor drepte solicitate axial, care prezintă un rost la un capăt	187
	5.6	Calculul barelor cu secțiuni neomogene, solicitate axial	191
	5.7	Calculul barelor supuse variațiilor de temperatură	198
	5.8	Calculul barelor supuse acțiunii simultane a mai multor factori.....	204
	5E	Solicitarea axială (Probleme propuse) ……	208
	5R	Solicitarea axială (Răspunsuri) ……..……..	225
6	**CALCULUL ÎMBINĂRILOR DE PIESE** ……...		232
	6.1	Considerații generale. Etape de calcul.....	232
	6.2	Calculul îmbinărilor de piese cu grosime mică ….....	234
	6.3	Calculul îmbinărilor nituite ….....	239
	6.4	Calculul îmbinărilor sudate ….....	246
	6.5	Calculul îmbinărilor pieselor de lemn ….....	252
	6E	Calculul îmbinărilor de piese (Probleme propuse) ……..	256
	6R	Calculul îmbinărilor de piese (Răspunsuri) ……	269
7	**CALCULUL LA ÎNCOVOIERE SIMPLĂ AL BARELOR DREPTE PLANE** ……		276
	7.1	Considerații generale. Etape de calcul	276
	7.2	Exemplu de calcul ….....	281
	6E	Calculul la încovoiere simplă al barelor drepte plane (Probleme propuse) ……..……	288
	6R	Calculul la încovoiere simplă al barelor drepte plane (Răspunsuri) ……...	315
8	**CALCULUL LA RĂSUCIRE AL BARELOR DREPTE** ….…..		351
	8.1	Calculul la torsiune al barelor drepte cu secțiune circulară sau inelară. Considerații generale. Etape de calcul	351
	8.2	Calculul la torsiune al barelor drepte cu secțiune necirculară ….	361
	8E	Calculul la răsucire al barelor drepte de secțiune circulară, sau inelară (Probleme propuse) ……	375
	8R	Calculul la răsucire al barelor drepte de secțiune circulară sau inelară (Răspunsuri)	385
Bibliografie ……			392

Prefață

Rezolvarea problemelor de Rezistența Materialelor are un anumit specific.

Lucrările de specialitate elaborate în domeniul Rezistenței Materialelor, mai ales cursurile şi culegerile de probleme, păgubesc mult prin aceea că asupra modului de rezolvare al problemelor, se opresc foarte puțin sau chiar deloc.

Cei puşi în situația de a rezolva probleme de rezistența materialelor întâmpină mari dificultăți, în special din cauza necunoaşterii etapelor şi metodologiei de rezolvare, specifice acestor probleme.

Cu rezolvarea unor probleme mai complexe de rezistența materialelor se întâlnesc studenții facultăților tehnice, care prin programa analitică studiază această disciplină. Cum pregătirea acestora pe parcursul activității lor nu este continuă şi susținută, atunci când sunt nevoiți să rezolve probleme concrete de rezistența materialelor, întâmpină mari greutăți, care rezultă tocmai din necunoaşterea etapelor şi a metodologiei de rezolvare.

Această lucrare vine în sprijinul eliminării acestor neajunsuri, prin prezentarea etapelor şi metodologiei ce trebuie urmată la rezolvarea problemelor de rezistența materialelor.

Prezentarea etapelor şi a metodologiei de rezolvare ale problemelor de rezistența materialelor este gândită în sensul cuprinderii întregii materiii care se predă la cursul de Rezistența Materialelor, studenților de la facultățile tehnice.

Lucrarea poate fi considerată un ghid practic, conținând atât noțiuni teoretice, probleme rezolvate cât şi aplicații de rezolvat. Este o combinație reuşită între curs şi culegerea de probleme.

La fiecare capitol se face o prezentare a noțiunilor teoretice (fără demonstrație) necesare rezolvării problemelor din capitolul respectiv, a etapelor şi metodologiei de urmat în rezolvarea problemelor. După aceasta, se prezintă probleme a căror rezolvare urmează etapele şi metodologia indicată.

În primele opt capitole se tratează: ***calculul reacțiunilor***, ***diagramele de eforturi, calculul caracteristicilor geometrice ale suprafețelor plane*** şi ***calculul elementelor de rezistență la solicitări simple*** (întindere – compresiune, forfecare, încovoiere simplă, răsucire).

Pentru ca cei interesați de astfel de probleme să-şi poată verifica capacitatea de rezolvare a problemelor de rezistența materialelor, în capitolul 9 (***Aplicații)*** al lucrării, sunt propuse, pentru fiecare capitol, un număr mare de aplicații la care se indică rezultatele finale şi de cele mai multe ori şi cele intermediare.

Lucrarea se adresează în primul rând studenților de la facultățile tehnice care studiază disciplina de Rezistența Materialelor în vederea pregătirii lor profesionale şi mai ales a examenului la această disciplină. În acelaşi timp, ea este deosebit de utilă proiectanților de elemente şi structuri de rezistență, care de cele mai multe ori din comoditate şi mai ales din necunoşterea metodologiei de calcul a rezistenței şi deformabilității elementelor, nu fac calculele necesare.

Elaborarea acestei lucrări, se bazează în primul rând pe experiența de peste 25 de ani, acumulată de autori în activitatea cu studenții la disciplina de Rezistența Materialelor.

Autorii sunt recunoscători acelora care vor lectura această lucrare şi vor veni cu aprecieri, dar mai ales cu propuneri de înbunătățire a conținutului lucrării într-o ediție nouă, astfel încât studenții şi cei interesați să aibă la dispoziție o lucrarea utilă, de care la ora aceasta este foarte mare nevoie.

Celelalte capitole ale Rezistenței Materialelor vor fi tratate într-o altă lucrare.

Autorii

1. INTRODUCERE

La proiectarea maşinilor şi a diferitelor construcţii, proiectantul trebuie să aleagă materialele şi să dimensioneze fiecare element de rezistenţă, astfel încât acesta să ***reziste*** în deplină siguranţă acţiunii forţelor exterioare care i se transmit.

Pentru a avea convingerea că cele prezentate în această carte vor fi bine înţelese, consider că este necesară totuşi prezentarea unor noţiuni, chiar dacă acestea se prezintă detaliat în toate cursurile de Rezistenţa Materialelor.

1.1 Clasificarea forţelor care acţionează asupra elementelor de rezistenţă

Organele de maşini şi diferitele elmente de rezistenţă, preiau o serie de sarcini exterioare şi transmit acţiunea acestora de la un element la altul. Forţele pe care le preiau organele de maşini şi elementele de construcţie sunt, fie ***forţe de volum***, fie ***forţe de interacţiune*** între elementul dat şi elementele vecine. Forţele de volum (exemplu greutatea proprie), acţionează asupra fiecărui element de volum.

Clasificarea forţelor se poate face după mai multe criterii:

A. După modul de aplicare, distingem:

a) ***forţe concentrate***

b) ***forţe distribuite***

Forţele concentrate se transmit între diferitele elemente de rezistenţă prin intermediul unei suprafeţe ale cărei dimensiuni sunt foarte mici în comparaţie cu dimensiunile întregului corp. În calculele de rezistenţă, datorită dimensiunii mici a suprafeţei prin care se transmite forţa, se consideră că forţa concentrată (Fig.1.1-1) se aplică într-un punct. Acest mod de reprezentare este doar o reprezentare aproximativă, introdusă numai pentru simplificarea

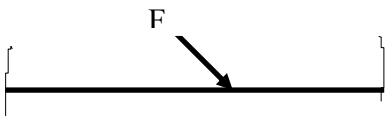


Fig.1.1-1

calculelor. În practică, forțele nu se pot transmite printr-un punct. Inexactitatea provocată de o astfel de aproximare este foarte mică şi în practică poate fi neglijată.
Forța concentrată se măsoară în [N].

Forțele aplicate continuu pe o lungime sau pe o suprafață a unui element de rezistență, se numesc ***sarcini distribuite***. Sarcinile distribuite, pot avea ***intensitate*** (mărime) ***constantă*** (Fig.1.1-2a) sau ***variabilă*** (Fig.1.1-2b). Sarcinile distribuite liniar se măsoară în [N/m],

Fig.1.1-2

iar cele distribuite pe suprafață în [Pa] = [N/m^2].

În calculele de rezistența materialelor, de multe ori sarcinile distribuite se înlocuiesc printr-o rezultantă, a cărei mărime şi direcție, sens şi punct de aplicație trebuie cunoscut. Pentru cazul sarcinilor distribuite liniar, în Fig.1.1-3a,b sunt prezentate valoarea, sensul şi punctul de aplicaie al rezultantei **R** a acestor sarcini.

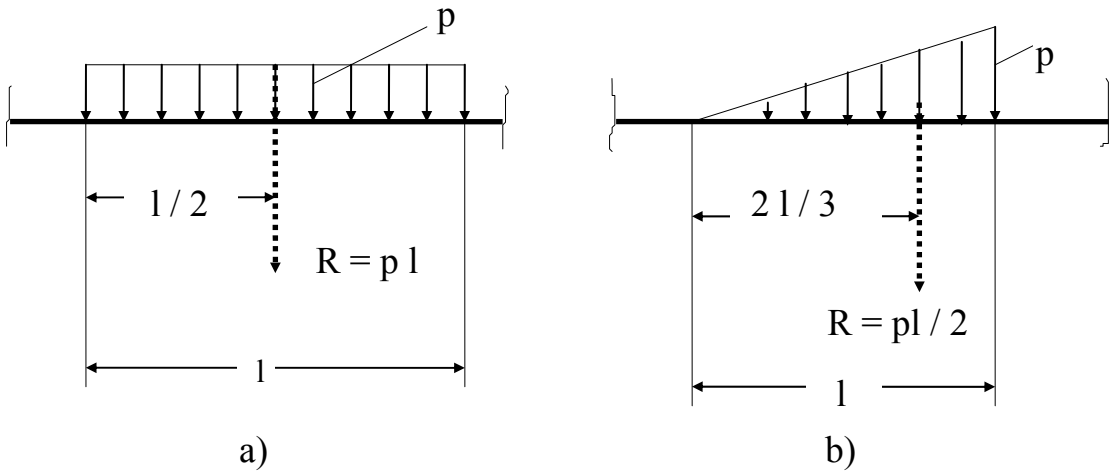


Fig.1.1-3

Am prezentat numai cazul sarcinilor distribuite liniar, deoarece în problemele curente întâlnite (mai ales la seminar), acest caz de încărcare este cel mai frecvent.

B. După natura lor, forțele sunt:

a) ***forțe date*** sau ***active***, numite şi ***sarcini*** sau ***încărcări***,

b) ***forțe de legătură*** sau ***reacțiuni***.

Forțele active împreună cu forțele de legătură, formează grupa ***forțelor exterioare***. Asupra legăturilor sau reazemelor unde acționează forțele de legătură, se revine într-un paragraf separat (par. 2.2).

C. După natura acțiunii lor, sarcinile pot fi:

a) ***statice***

b) ***dinamice***.

Sarcinile statice încarcă construcția treptat. Odată aceste sarcini aplicate, ele nu mai variază sau suferă variații nesemnificative. Marea majoritate a sarcinilor care acționează asupra diferitelor construcții, sunt de acest tip.

În construcția de maşini mai ales, se întâlnesc elemente în mişcare a căror accelerații sunt mari şi variația vitezei are loc într-un timp relativ mic. Asupra acestor elemente, acționează sarcinile dinamice. Astfel de sarcini sunt: ***sarcinile aplicate brusc***, ***cele care produc şocuri*** şi ***sarcinile variabile*** (periodic sau aleator) ***în timp***.

Sarcinile aplicate brusc, se transmit dintr-o dată construcției cu întreaga lor valoare.

Şocurile iau naştere în urma variației rapide a sarcinilor, ceea ce cauzează variația bruscă a vitezei elementului de rezistență.

Sarcinile variabile periodic în timp, acționează asupra elementelor de rezistență, repetându-se de un număr mare de ori.

D. Sarcinile mai pot fi clasificate şi în **sarcini**:

a) ***permanente***

b) ***mobile.***

Sarcinile permanente acționează pe toată durata existenței construcției sau structurii de rezistență, iar cele mobile acționează doar în decursul unui anumit interval de timp.

Trebuie specificat că, forțele pot fi clasificate şi pe baza altor criterii. Clasificarea prezentată este doar una din multiplele clasificări care pot fi făcute.

Cât priveşte **cuplurile** (momentele), clasificarea acestora, poate fi făcută pe baza clasificării forţelor.

1.2 Momentul forţei faţă de un punct

În rezolvarea problemelor de rezistenţa materialelor, adeseori trebuie calculat ***momentul forţelor faţă de un punct*** sau faţă de centrul de greutate al unei secţiuni. Să ne reamintim atunci, cum se calculează momentul unei forţe faţă de un punct.

a) ***Momentul unei forţe concentrate F faţă de un punct B*** (Fig.1.2-1) *este egal cu produsul dintre mărimaea forţei F şi braţul acesteea, b:*

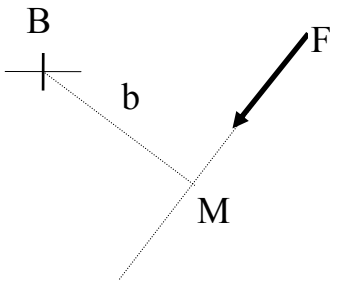


Fig.1.2-1

$$(m\mathbf{F})_B = F\ b \qquad 1.2\text{-}1$$

unde prin braţul forţei se înţelege distanţa de la punctul considerat (B) până la suportul forţei F. În cazul prezentat, braţul forţei este segmantul BM care este perpendicular pe suportul forţei (BM = b; BM perpendicular pe suportul forţei).

b) ***Momentul unei sarcini distribuite p faţă de un punct B,*** (Fig.1.2-2) *este egal cu produsul dintre rezultanta sarcinii distribuite (R= p l) şi braţul rezultantei*. În acest caz, braţul rezultantei faţă de punctul B, este:

$$b = l / 2 + a$$

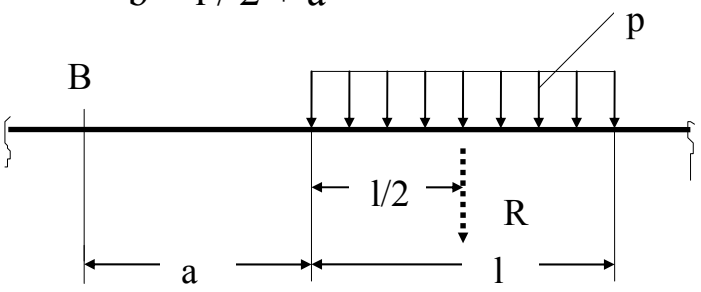


Fig.1.2-2

Deci, momentul sarcinii distribuite faţă de punctul B, pentru cazul prezentat, este:

$$(m\mathbf{p})_B = R\ b = p\ l\ (\ l / 2 + a\ ) \qquad 1.2\text{-}2$$

c) ***Momentul unui cuplu*** $\mathbf{M_0}$ (moment) ***faţă de un punct B*** (Fig.1.2-3), *este egal cu valoarea acelui moment* :

$$(m\mathbf{M_0})_B = M_0 \qquad 1.2\text{-}3$$

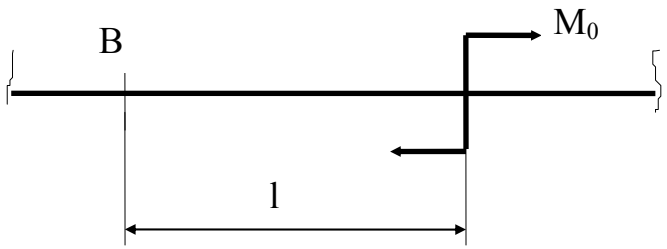


Fig.1.2-3

Atenţie: În acest caz, momentul M_0 ***NU*** se înmulţeşte cu braţul b = l, aşa cum de multe ori, în mod greşit se procedează. Deci, ***momentul unui cuplu*** *(moment)* ***faţă de un punct, este însăşi acel cuplu***.

1.3 Reducerea forţelor într-un punct

a) *O forţă concentratã F se reduce într-un punct B, totdeauna la o forţă concentratã şi la un cuplu concentrat* (Fig.1.3-1). Forţa concentratã rezultatã este egalã în mãrime, are aceeaşi direcţie şi acelaşi sens cu forţa redusã.

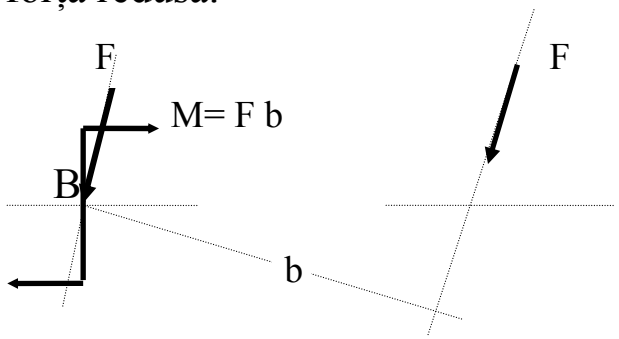
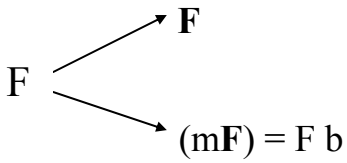


Fig. 1.3-1

Cuplul rezultat prin reducere este egal în mărime cu produsul dintre forța F şi brațul b al acesteea, iar sensul lui este dat de regula burghiului drept.

Aşadar, *o forță concentrată F se reduce într-un punct B (nesituat pe suportul forței) la o forță şi la un cuplu*.



1.3-1

b) O sarcină distribuită se reduce la fel ca şi o forță concentrată, cu specificarea că rolul forței concentrate este preluat de data aceasta de rezultanta sarcinii distribuite (Fig.1.3-2).

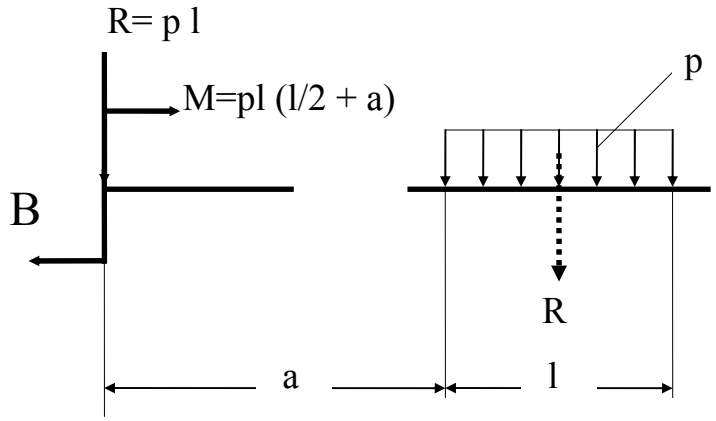
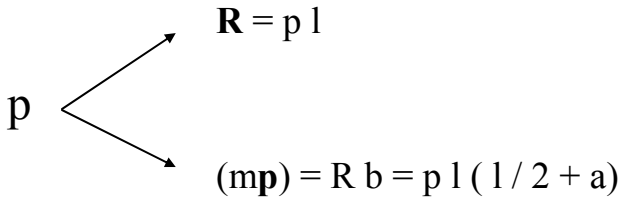


Fig.1.3-2



1.3-2

c) Un cuplu (moment) M_0 se reduce într-un punct tot la un cuplu M de aceeaşi valoare cu cuplul care se reduce ($M = M_0$) şi la fel orientat (acelaşi sens cu cuplul care se reduce M_0).

1.4 Condițiile ce trebuie satisfăcute de către elementele de rezistență

Unele dimensiuni (principale) ale elementelor de rezistență se stabilesc direct, din necesitatea asigurării unor dimensiuni funcționale. Aceste dimensiuni sunt ***dimensiuni constructive***. Alte dimensiuni ale elementelor de rezistență, de obicei cele ale secțiunilor transversale, se determină prin calcul.

Calculul dimensiunilor secțiunilor transversale ale elementelor de rezistență se face în scopul satisfacerii simultan a următoarelor condiții de bază:

a) Condiția de rezistență. Fiecare element de rezistență trebuie ***să reziste*** în foarte bune condiții, tuturor forțelor exterioare care acționează asupra lui. *Prin **rezistența** unui element de rezistență trebuie înțeles, proprietatea acestuia de a nu se rupe, sau de a nu ajunge într-o stare limită*. Stare limită poate fi şi o altă stare în afară de cea din momentul ruperii elementului de rezistență. Forțele care acționează asupra elementului de rezistență, trebuie să fie mai mici decât cele care acționează în momentul atingerii stării limită.

Condiția de rezistență este prima şi cea mai importantă condiție pe care trebuie să o satisfacă un element de rezistență în timpul funcționării sale.

b) Condiția de rigiditate. Este ştiut faptul că Rezistența Materialelor consideră corpurile deformabile sub acțiunea sarcinilor. Cu cât sarcinile sunt mai mari, cu atât şi deformarea elementelor de rezistență este mai pronunțată. În cazul maşinilor sau construcțiilor, deformațiile diferitelor elemente de rezistență nu pot fi oricât de mari. Deformații prea mari, pot cauza distrugerea altor elemente de rezistență sau scoaterea din funcționare a maşinilor respective.

*Proprietatea elementelor de rezistență de a se opune deformării lor, poartă numele de **rigiditate.***

Calculul de rezistență, trebuie să aibă în vedere şi asigurarea unei rigidități corespunzătoare elementului de rezistestență respectiv.

c) Condiția de stabilitate. În practică, se întâlnesc situații în care deşi elementul de rezistență satisface condiția de rezistență şi cea de rigiditate, nu poate fi utilizat deoarece sub acțiunea sarcinilor, acesta şi-a pierdut stabilitatea (condiția de echilibru stabil).

Fenomenul este cunoscut sub numele de ***flambaj***. Este de precizat că, flambajul apare numai în anumite condiții de solicitare şi pentru unele elemente de rezistență. Totuşi, pentru aceste cazuri, dimensiunile secțiunii transversale ale elementului de rezistență, trebuie să asigure acestuia o bună stabilitate.

d) Condiția realizării economice. Tot calculul de rezistență efectuat asupra elementelor de rezistență, trebuie să aibă în vedere ca acesta să fie realizat cu un preț de cost cât mai mic.

Primele trei condiții, asigură o bună funcționare şi siguranță în exploatere a construcției, iar cea de-a patra condiție, asigură un preț de cost scăzut. În acest caz, se spune că structura respectivă a fost dimensionată rațional. Proiectarea rațională impune cunoaşterea de către proiectant atât a metodelor de calcul de rezistență, cât şi a proprietăților (caracteristicilor) mecanice a materialului elementelor de rezistență, în condiții de exploatare.

1.5 Tipuri de probleme întâlnite în Rezistența Materialelor

În Rezistența Materialelor, în majoritatea cazurilor, se întâlnesc următoarele tipuri de probleme:

a) Probleme de verificare. În acest caz, se cunosc toate dimensiunile elementului de rezistență, materialul din care acesta este confecționat, forțele exterioare care acționează asupra sa şi trebuie făcut un calcul în urma căruia să se poată aprecia dacă acel element de rezistență satisface toate condițiile impuse prin tema de proiectare.

b) Probleme de dimensionare. În cazul problemelor de dimensionare, se cunosc dimensiunile constructive ale elementului de rezistență, forțele exterioare aplicate, materialul din care este confecționat elementul şi trebuie stabilite dimensiunile secțiunii transversale în vederea satisfacerii condițiilor cerute prin tema de proiectare.

c) Probleme de determinare a încărcării maxime admise (probleme de efort capabil). Pentru acest tip de probleme, se cunosc toate dimensiunile elementului de rezistență (constructive şi ale

secțiunii transversale), materialul din care este confecționat elementul şi trebuie determinate valorile maxime admise ale sarcinilor care pot acționa asupra acelui element de rezistență în vederea satisfacerii condițiilor impuse prin tema de proiectare.

2. REAZEME ŞI REACȚIUNI

2.1 Reazeme

Între elementele de rezistență ale unei structuri, există o serie de legături, numite ***reazeme***.

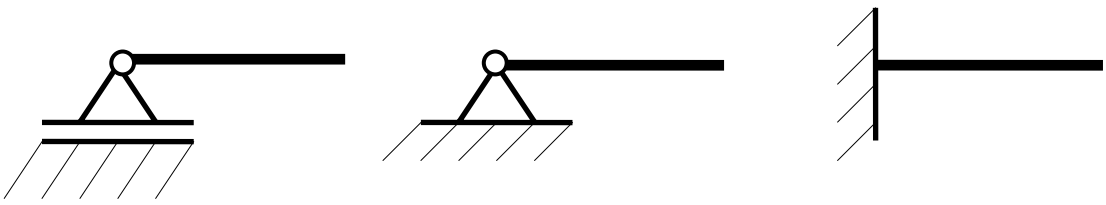
În calculele obişnuite de rezistența materialelor, cele mai întâlnite reazeme sunt:

- ***reazemul articulat mobil*** (articulația mobilă sau reazemul mobil),
- ***reazemul articulat fix*** (sau articulația fixă),
- ***încastrarea*** **(**sau înțepenirea).

Articulația mobilă a cărei reprezentare este prezentată în Fig.2.1-1a, permite celor două elemente de rezistență să se rotească unul față de celălalt şi o deplasare liberă pe o anumită direcție. În cazul prezentat în figură, este permisă deplasarea liberă pe direcție orizontală. Pe direcția verticală (direcție perpendiculară pe cea pe care este permisă deplasarea liberă), deplasarea este împiedecată.

Articulația fixă (Fig.2.1-1b) permite rotirea elementului de rezistență dar nu permite deplasarea acestuia pe nici o direcție.

Încastrarea (Fig.2.1-1c) împiedică orice fel de deplasare a elementului de rezistență. Acest tip de reazem se poate obține dintr-o articulație fixă, la care se blochează rotirile.



a) b) c)

Fig.2.1-1

2.2 Reacțiuni

Deoarece elementele de rezistență sunt supuse acțiunii diferitelor sarcini, este firesc ca în reazeme să apară forțe, numite ***forțe de legătură*** sau ***reacțiuni***. Mărimea şi orientarea acestor reacțiuni este legată de mărimea şi orientarea sarcinilor care solicită elementul, iar direcția reacțiunilor este legată de tipul reazemului.

După cum s-a mai spus, sarcinile direct aplicate (forțe şi momente) împreună cu reacțiunile, formează ***sistemul forțelor exterioare*** care acționează asupra elementului de rezistență.

Pentru calculul de rezistență este necesar să se cunoască întregul ansamblu al forțelor exterioare ce solicită elementul, deci este nevoie să se cunoască şi reacțiunile.

Pentru început, stabilim ce fel de reacțiuni apar în cele trei tipuri de reazeme care au fost prezentate anterior.

Mai precizăm că reacțiunile se opun acțiunii şi ca urmare ele apar pe acele direcții pe care mişcările (deplasările şi rotirile) elementului de rezistență sunt împiedicate.

Pentru ***articulația mobilă***, fiind împiedicată deplasarea pe o singură direcție, reacțiunea **R** care apare este o forță (Fig.2.2-1) care trece prin centrul articulației mobile şi este dirijată perpendicular pe direcția deplasării libere a reazemului (în mod obişnuit pe axa grinzii).

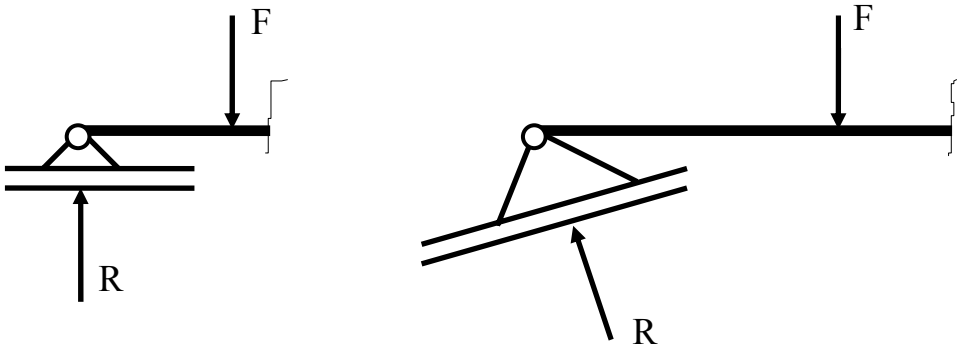


Fig.2.2-1

În cazul ***articulației fixe***, reacțiunea care apare în reazem este o forță **R** a cărei direcție nu este cunoscută. Se cunoaşte numai punctul de aplicație al acesteea, care este articulația.

Pentru a putea calcula reacțiunea din articulația fixă, se înlocuieşte această reacțiune prin două componente ale sale: **H** dirijată în lungul axei elementului de rezistență şi **V**, dirijată perpendicular pe axa elementului (Fig.2.2-2). Aşadar, articulația fixă, din acest punct de vedere, dă două reacțiuni: **H** şi **V**.

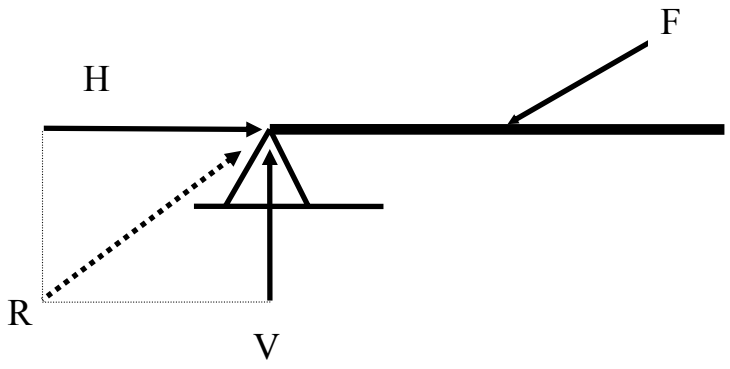


Fig.2.2-2

La ***încastrare***, după cum cunoaştem, toate mişcările elementului de rezistență sunt împiedicate. Încastrarea fiind o articulație fixă la care s-a blocat rotirea, înseamnă că la acest tip de reazem față de articulația fixă apare în plus un cuplu **M** care să împiedice rotirea (Fig.2.2-3). De aceea, la o încastrare apar trei reacțiuni: **H** paralelă cu

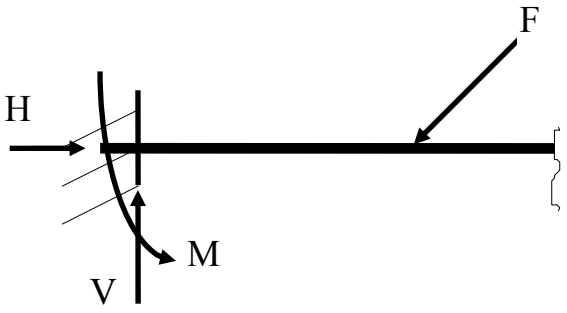


Fig.2.2-3

axa elementului; **V** perpendiculară pe axa elementului de rezistență şi momentul (cuplul) **M**.

2.3 Calculul reacțiunilor

În paragraful anterior (2.2), am văzut care sunt reacțiunile pentru principalele tipuri de reazeme şi care este direcția acestora. Nu s-a precizat care este mărimea şi sensul (orientarea) acestora. Mărimea şi orientarea reacțiunilor se determină din condiția ca fiecare element de rezistență în parte, să se afle în echilibru sub acțiunea tuturor forțelor aplicate şi a reacțiunilor (a forțelor exterioare).

Se exemplifică în continuare, calculul reacțiunilor pentru sisteme plane. Este ştiut faptul că, un sistem plan este în echilibru dacă:

- nu se deplasează pe o direcție (fie x această direcție),
- nu se deplasează pe o direcție perpendiculară pe prima (fie y direcția perpendiculară pe x),
- nu se roteşte.

Cele trei condiții enunțate mai înainte sunt satisfăcute dacă suma proiecțiilor tuturor forțelor pe direcția x, respectiv y, este nulă şi suma tuturor cuplurilor față de un punct oarecare (fie K acest punct) al planului, este nul. Aceste condiții pot fi scrise sub forma unor relații de forma:

$$\begin{aligned} \left(\sum F\right)_x &= 0 \\ \left(\sum F\right)_y &= 0 \\ \left(\sum M\right)_K &= 0 \end{aligned} \qquad \text{2.3-1}$$

Relațiile 2.3-1 exprimă condițiile pentru ca un sistem plan să fie în echilibru. Acest sistem, pentru a putea fi rezolvat, poate conține maxim trei necunoscute. În cazul nostru, cele trei necunoscute sunt reacțiunile. Dacă sunt mai mult de trei necunoscute (reacțiuni), sistemul de ecuații 2.3-1 nu poate fi rezolvat şi în acest caz, sistemul dat inițial este un ***sistem static nederminat***. Pentru rezolvarea sistemelor static nederminate, sunt necesare ecuații suplimentare.

Modul de rezolvare a sistemelor static nederminate, va fi prezentat într-un alt capitol.

Determinând reacțiunile unui element de rezistență cu relația 2.3-1, se observă că nu avem o posibilitate simplă pentru verificarea corectitudinii calculului efectuat.

Pentru a avea posibilitatea verificării corectitudinii determinării reacțiunilor şi pentru a obține ecuații uşor de rezolvat, relațiile pentru calculul reacțiunilor vor rezulta din următoarele considerente:

- sistemul să nu se deplaseze pe o direcție (fie x această direcție, dar nu neaparat direcția orizontală). Această direcție, este acea direcție pe care există numai o singură reacțiune necunoscută,

- sistemul să nu se rotească față de un punct (fie K_1 acest punct) al planului. Punctul K_1 va fi unul din cele două reazeme ale elementului de rezistență,

- sistemul să nu se rotească față de un alt punct (fie K_2 acest punct şi diferit de K_1) al planului. Punctul K_2 va fi neaparat celălalt reazem al elementului de rezistență.

Condițiile de mai sus, se scriu sub forma unor relații:

$$\begin{aligned} \left(\sum F\right)_x &= 0 \\ \left(\sum M\right)_{K_1} &= 0 \\ \left(\sum M\right)_{K_2} &= 0 \end{aligned} \qquad \text{2.3-2}$$

Sistemul 2.3-2 neconținând şi relația $\left(\sum F\right)_y = 0$, nu înseamnă că elementul de rezistență este în echilibru dar, scris sub această formă, ne permite să calculăm cele trei reacțiuni. Pentru a putea şti că reacțiunile determinate (cu relațiile 2.3-2) sunt corecte, valorile reacțiunilor găsite se introduc în relația $\left(\sum F\right)_y$.

Dacă:

$$\begin{aligned} &\left(\sum F\right)_y = 0, && \text{reacțiunile sunt corect calculate,} \\ &\left(\sum F\right)_y \neq 0, && \text{reacțiunile sunt greşit calculate.} \end{aligned} \qquad \text{2.3-3}$$

În acest ultim caz, se reface calculul reacțiunilor.

În concluzie, calculul reacțiunilor pentru un sistem plan se face pe baza ecuațiilor 2.3-2 iar verificarea corectitudinii calculului (etapă obligatorie), cu relațiile 2.3-3.

2.4 Etape în calculul reacțiunilor. Exemple

Pentru a calcula corect reacțiunile unui sistem plan de elemente de rezistență, propun parcurgerea următoarelor ***etape***:

- *Priviţi atent sistemul; căutaţi reazemele şi notaţi-le cu litere (A, B, C, ...). Dacă puteţi nu utilizaţi litera A, deoarece mai târziu această literă se va utiliza mult, pentru aria secţiunii transversale a elementului de rezistenţă.*
- *Identificaţi fiecare reazem: articulaţie mobilă, articulaţie fixă, încastrare,*
- *După ce aţi identificat reazemele, introduceţi reacţiunile în fiecare reazem (vezi parag. 2.2) şi le notaţi (H_B, V_C, M, ...). Recomand ca literele utilizate să fie însoţite de un indice, iar acesta să fie cel cu care s-a notat reazemul respectiv. Este uşor mai târziu să găsiţi reacţiunile, în situaţia în care iniţial le-aţi calculat greşit.*
- *Dacă pe elementul de rezistenţă aveţi sarcini distribuite, este bine să le înlocuiţi cu rezultanta corespunzătoare (vezi parag. 1.1), dar cu linie întreruptă, pentru a nu o considera din neatenţie de două ori,*
- *Acum se poate trece la scrierea detaliată a relaţiilor 2.3-2 şi determinarea din acest sistem de ecuaţii, a reacţiunilor. La scrierea acestor ecuaţii, pentru ecuaţiile de momente, alegeţi-vă un sens de rotire considerat pozitiv şi nu-l mai schimbaţi până nu aţi scris toată relaţia,*
- *După ce aţi calculat reacţiunile cu ajutorul ecuaţiilor 2.3-2, utilizaţi relaţia 2.3-3. Dacă obţineţi 0 (zero), înseamnă că nu aţi greşit, reacţiunile sunt corecte. Dacă acea sumă nu conduce la 0 (zero), aţi greşit şi reluaţi calculul de la prima ecuaţie a sistemului de ecuaţii, 2.3-2.*

Exemple:

2.4.1 *Să se calculeze reacţiunile pentru grinda prezentată în Fig.2.4.1-1.*

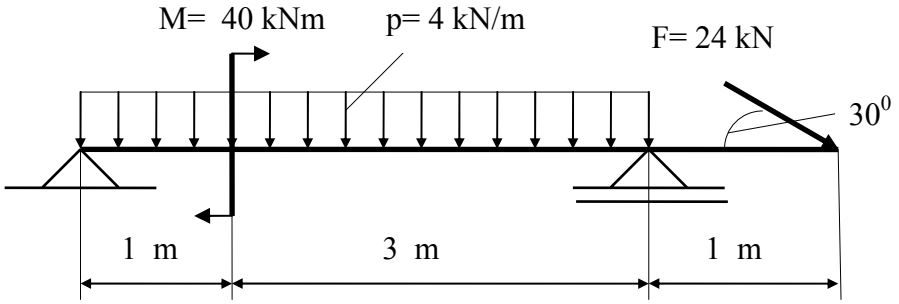


Fig.2.4.1-1

Parcurgem acum toate etapele recomandate pentru calculul reacţiunilor (vezi Fig.2.4.1-2):

- elementul de rezistenţă este sprijinit (rezemat) pe două reazeme pe care le notăm cu B şi C; B este în stânga iar C este cel din dreapta.

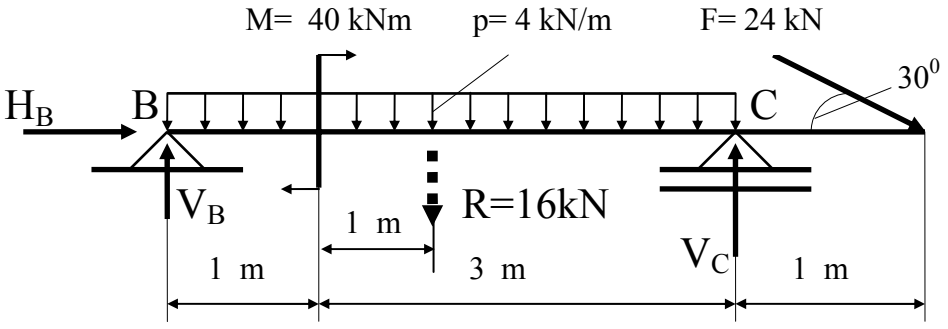


Fig.2.4.1-2

- reazemul din stânga B, este o articulaţie fixă. Introducem cele două reacţiuni pentru acest reazem: H_B şi V_B. Reazemul din dreapta C, este o articulaţie mobilă. Singura reacţiune din acest reazem şi pe care o punem este $V_{C.}$.

- înlocuim sarcina uniform distribuită p, cu rezultanta sa R= p4 =16 kN, care acționează la mijlucul distanței dintre reazeme (la 2 m de reazemul B şi tot la 2 m de reazemul C),

- scriem detaliat ecuațiile pentru calculul reacțiunilor (rel. 2.3-2). Prima direcție x, o alegem ca fiind cea orizontală, deoarece pe această direcție există o singură reacțiune şi anume H_B. Deci:

$$\left(\sum F\right)_x = 0$$

$$H_B - F\cos 30^0 = 0 \qquad (1)$$

$$\left(\sum M\right)_{K_1} \equiv \left(\sum M\right)_B = 0$$

$$F\sin 30^0\, 5 - V_C\, 4 + R\, 2 + M = 0 \qquad (2)$$

$$\left(\sum M\right)_{K_2} \equiv \left(\sum M\right)_C = 0$$

$$V_B\, 4 + M - R\, 2 + F\sin 30^0\, 1 = 0 \qquad (3)$$

Din ecuația (1), rezultă: $H_B = F\cos 30^0 = 12\sqrt{3}$ kN.
Din ecuația (2), rezultă: $V_C =$ 33 kN.
Din ecuația (3), rezultă: $V_B =$ - 5 kN.

Reacțiunile H_B şi V_C, au rezultat pozitive, ceea ce înseamnă că ele sunt orientate aşa cum sunt figurate în Fig.2.4.1-2. Reacțiunea V_B, rezultând negativă, este orientată invers de cum este pe Fig.2.4.1-2, adică este orientată de sus în jos.

- Verificăm acum dacă valorile calculate pentru cele trei reacțiuni sunt bune. Pentru aceasta, scriem o ecuație de echilibru ca sumă de forțe pe o direcție perpendiculară pe direcție utilizată la calculul reacțiunilor. Cum la calculul reacțiunilor am utilizat direcția x (orizontală), pentru verificarea reacțiunilor, utilizăm direcția y (verticala). Aşadar, rezultă:

$$\left(\sum F\right)_y = V_B - R + V_C - F\sin 30^0 =$$

$$= - 5 - 16 + 33 - 24\ 1/2 = - 21 + 33 - 12 = -33 + 33 = 0$$

A rezultat $\left(\sum F\right)_y = 0$, ceea ce înseamnă că condiția 2.3-3 este îndeplinită, deci reacțiunile sunt corect calculate şi valorile lor sunt bune.

2.4.2 *Parcurgând etapele cunoscute, calculați şi verificați reacțiunile pentru cadrul prezentat în Fig.2.4.2-1.*

Observație: *Tot ce rezultă a fi făcut, pentru acest exemplu este reprezentat în Fig.2.4.2-1.*

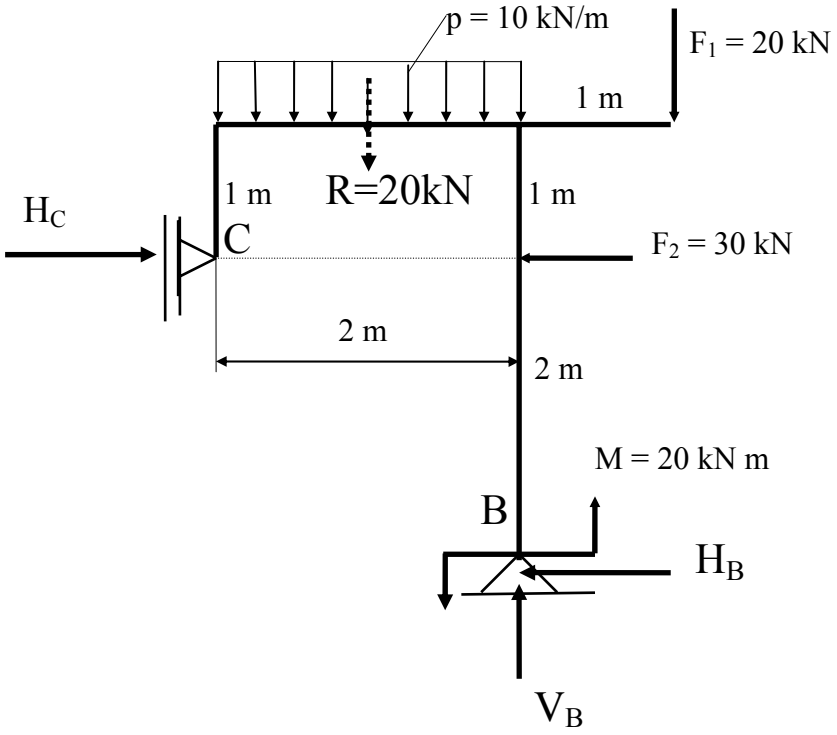


Fig.2.4.2-1

- Cadrul prezintă două reazeme, pe care le notăm cu B respectiv, cu C,

- Reazemul C este o articulație mobilă şi introduce numai reacțiunea H_C. Reazemul B este o articulație fixă şi introduce două reacțiuni: H_B şi V_B,

- Înlocuim sarcina distribuită p, cu rezultanta sa R= 10 2 = 20 kN,

- Trecem la scrierea ecuațiilor pentru calculul reacțiunilor (rel. 2.3-2). Se observă că pe verticală, există o singură reacțiune şi anume V_B.

Prima ecuație va fi atunci:

$$\left(\sum F\right)_y = 0$$

$$R + F_1 - V_B = 0 \qquad (1)$$

Celelalte ecuații sunt ecuații de momente față de reazemele B şi C:

$$\left(\sum M\right)_B = 0$$

$$H_C\ 2 - R\ 1 + F_1\ \ 1 - F_2\ 2 - M = 0 \qquad (2)$$

$$\left(\sum M\right)_C = 0$$

$$V_B\ 2 + H_B\ 2 + M + F_2\ \ 0 - F_1\ 3 - R\ 1 = 0 \qquad (3)$$

Din relația (1), rezultă: $V_B =$ 40 kN.
Din relația (2), rezultă: $H_C =$ 40 kN.
Din relația (3), rezultă : $H_B =$ - 10 kN.

Se constată şi în acest exemplu, că reacțiunea H_B este orientată invers de cum a fost reprezentată inițial în Fig.2.4.2-1.

Să verificăm acum corectitudinea calculului efectuat. De data aceasta, ecuația de verificare este o ecuație de proiecții de forțe pe orizontală (pe o direcție perpendiculară la direcția utilizată la calculul reacțiunilor, care a fost direcția verticală y).

$$\left(\sum F\right)_x = H_C - F_2 + H_B = 40 - 30 - 10 = 0$$

Cum această ecuație satisface condiția 2.3-3 de verificare a reacțiunilor, rezultă că valorile calculate pentru reacțiuni sunt bune. Cu aceste reacțiuni, cadrul prezentat în Fig.2.4.2-1, este supus acțiunii unui sistem de forțe exterioare, ca cel prezentat în Fig.2.4.2-2.

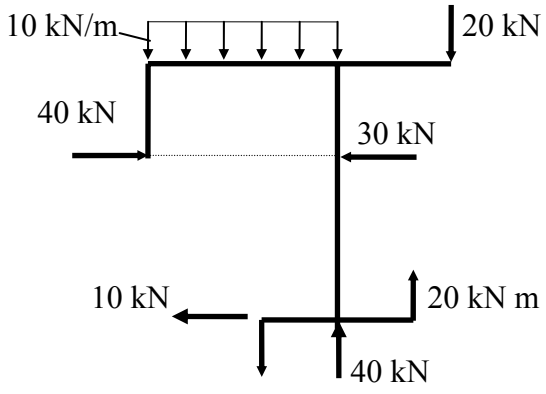


Fig.2.4.2-2

3. EFORTURI. DIAGRAME DE EFORTURI

3.1 Eforturi

Eforturile *sunt forţe interioare care iau naştere în elementele de rezistenţă ca urmare a acţiunii asupra acestora a forţelor exterioare*.

Pentru un sistem plan, eforturile posibile dintr-o secţiune transversală a elementului de rezistenţă, sunt: (Fig.3.1-1)

- **efortul axial N**, care acţionează în centrul de greutate al secţiunii şi este perpendicular pe planul acesteea,

- **efortul tăietor T**, acţionează în centrul de greutate al secţiunii şi este situat în planul secţiunii,

- **momentul încovoietor M_i**, acţionează în centrul de greutate al secţiunii şi este situat în planul acesteea.

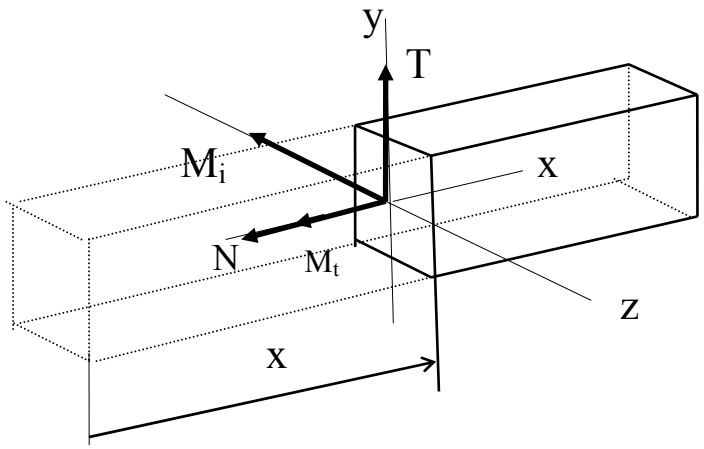


Fig.3.1-1

Eforturile de pe faţa din dreapta, suplinesc acţiunea forţelor exterioare care acţionează pe partea stângă (considerată înlăturată) a elementului (vezi Fig.3.1-1). Eforturile de pe faţa din stânga a secţiunii, suplinesc acţiunea forţelor exterioare care acţionează asupra părţii din dreapta elementului (considerată îndepărtată).

La sistemele spaţiale, eforturi tăietoare există pe ambele direcţii principale de inerţie ale secţiunii transversale. La aceste sisteme, momente pot exista pe toate cele trei direcţii: x, y, z. Momentele situate pe axele din planul secţiunii (axele y şi z) sunt ***momente***

încovoietoare, iar momentul situat pe axa x (normală la planul secțiunii), este un ***moment de torsiune*** (răsucire) care se notează cu M_t.

Valoarea eforturilor este determinată de valoarea forțelor exterioare care solicită elementul de rezistență.

Să vedem acum, pentru un sistem plan, cum se determină mărimea eforturilor.

Pentru un sistem plan, pot exista trei eforturi: axial (N), tăietor (T) şi moment încovoietor M_i.

- ***Efortul axial N*** *într-o secțiune, este egal în mărime cu suma algebrică a proiecțiilor pe normala la secțiunea barei a tuturor forțelor exterioare din stânga secțiunii sau a celor din dreapta, luate însă cu semn schimbat. Efortul axial N, se consideră pozitiv, atunci când are efect de întindere a porțiunii rămase a barei (Fig.3.1-2a)*
- ***Efortul tăietor T*** *într-o secțiune a elementului de rezistență, este egal în mărime cu suma algebrică a proiecțiilor pe o direcție perpendiculară la normala secțiunii (deci în planul secțiunii) a tuturor forțelor exterioare din stânga secțiunii sau a celor din dreapta, luate însă cu semn schimbat. Efortul tăietor se consideră pozitiv, când la o bară dreaptă acționează de sus în jos pe fața din stânga sau de jos în sus pe fața din dreapta, sau altfel spus când acesta are tendința să rotească secțiunea în care acționează în sensul acelor de ceasornic (Fig.3.1-2b).*

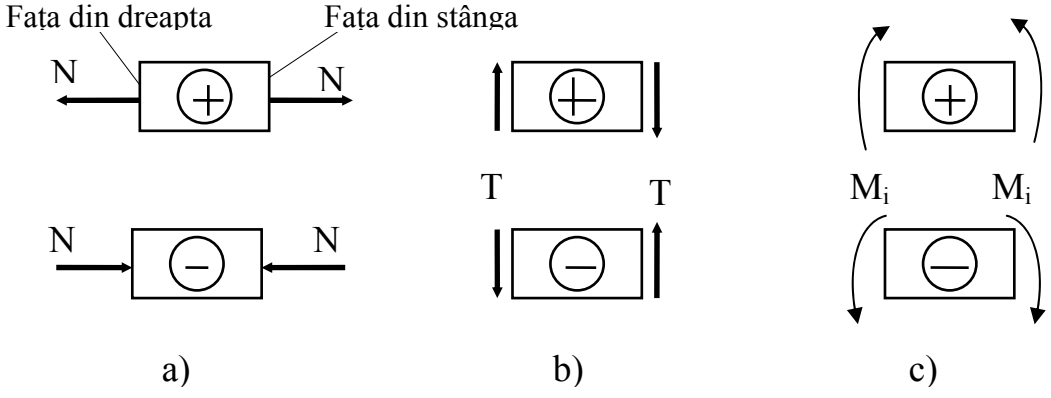


Fig.3.1-2

- ***Momentul încovoietor M_i*** *dintr-o secţiune a unui element de rezistenţă este egal în mărime cu suma algebrică a momentelor în raport cu centrul de greutate al secţiunii considerate, a tuturor forţelor exterioare din stânga secţiunii sau a celor din dreapta, însă luate cu semn schimbat. La o bară dreaptă, M_i se consideră pozitiv atunci când pe faţa din stânga are sensul acelor de ceasornic iar pe faţa din dreapta, sens contrar acestora (Fig.3.1-2c)*

Într-o reprezentare centralizată, în Fig.3.1-3 se prezintă orientarea pozitivă a celor trei eforturi N, T, M_i, atât pe faţa din stânga cât şi pe cea din dreapta a secţiunii unui element de rezistenţă.

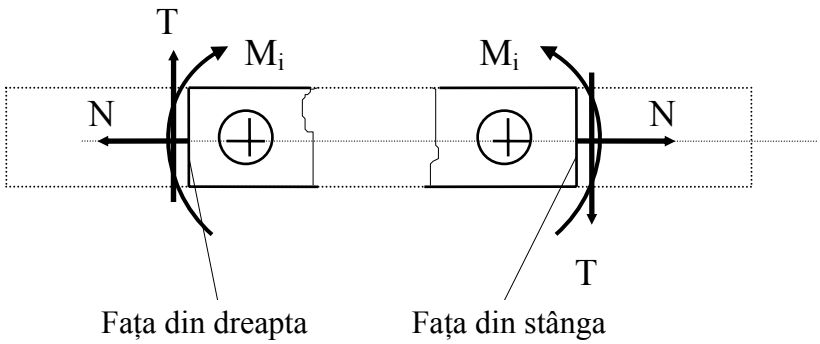


Fig.3.1-3

Această convenţie de semne este valabilă şi pentru cazul barelor verticale sau înclinate (vezi cadrele), cu condiţia să se aleagă un sens de parcurs al barei de la un capăt spre celălalt.

Pentru uşurinţa trasării diagramelor de eforturi, propun păstrarea aceleeaşi convenţii de semne pozitive ale eforturilor şi în cazul barelor curbe plane.

- ***Pentru momentul de torsiune M_t,*** *nu există o convenţie unanim acceptată pentru ca acesta să fie considerat pozitiv. Pentru a nu încărca memoria cu prea multe noţiuni, propun ca momentul de torsiune să fie considerat pozitiv, dacă este orientat după normala exterioară la secţiune, adică la fel ca pentru efortul axial N.*

3.2 Diagrame de eforturi

Calculul de rezistență al diferitelor elemente, necesită cunoaşterea în orice secțiune a valorilor eforturilor. Deoarece eforturile depind de secțiunea în care se determină, variația fiecărui efort de-a lungul elementului de rezistență, se exprimă funcție de coordonata secțiunii respective. O astfel de expresie (funcție) pentru efort, poartă numele de ***funcție de efort***. În cazul problemelor plane (la care ne vom rezuma cel mai mult), funcțiile de eforturi reprezintă însăşi variația eforturilor N, T, M_i în lungul elementului de rezistență.

Reprezentarea grafică a funcțiilor de eforturi, conduce la obținerea aşa numitelor ***diagrame de eforturi***.

Pentru a obține diagrame de eforturi corecte, pe lângă modul de obținere a acestora, mai trebuie ştiut câteva aspecte care rezultă din relațiile diferențiale care există între eforturi şi forțele exterioare care solicită elementul de rezistență.

Iată câteva aspecte care sunt obligatoriu a fi cunoscute, pentru obținerea unor diagrame de eforturi corecte:

- *valoarea efortului tăietor într-o secțiune, reprezintă tangenta trigonometrică a unghiului pe care îl face cu axa x (axa longitudinală a barei) tangenta la diagrama M_i în secțiunea respectivă,*
- *dacă pe o porțiune (interval) oarecare:*

a) *efortul tăietor $T > 0$ (pozitiv), momentul încovoietor M_i creşte,*

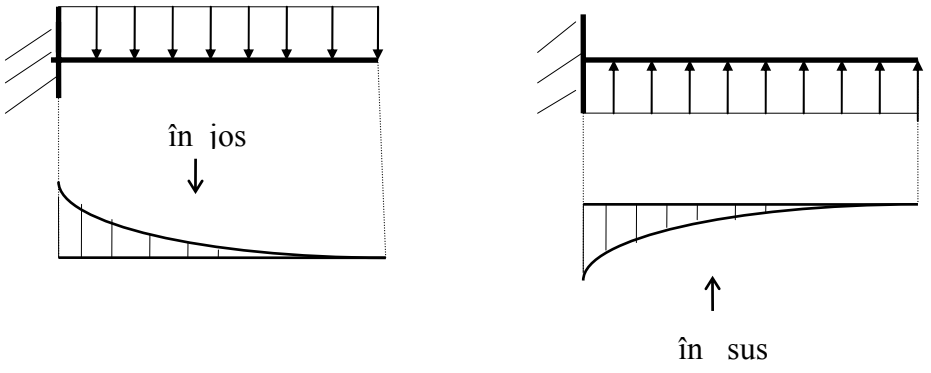
b) *efortul tăietor $T < 0$ (negativ), momentul încovoietor M_i scade,*

c) *efortul tăietor T trece prin valoarea zero schimbând semnul din + (plus) în - (minus), atunci în acea secțiune, M_i are un maxim ($M_i = M_{i,max}$), iar când semnul se schimbă din - în +, M_i are un minim ($M_i = M_{i,min}$),*

d) *efortul tăietor este nul ($T = 0$), momentul încovoietor M_i este constant ($M_i = const.$),*

- *Dacă sarcina distribuită este nulă ($p = 0$) pe un interval (interval neîncărcat), pe ecel interval efortul tăietor T este constant ($T = const.$). Pe acest interval, diagrama momentului încovoietor M_i este reprezentată prin drepte oblice, numai dacă $T \neq 0$. Dacă $p < 0$, efortul tăietor, scade.*

- *Pe intervale încărcate cu sarcină uniform distribuită (p = const.), diagrama M_i este o parabolă, iar diagrama T, o dreaptă înclinată. În cazul unei distribuţii neuniforme a sarcinii distribuite p, ambele diagrame (T şi M_i) vor fi curbe a căror natură depinde de tipul sarcinii p.*
- *În secţiunile din dreptul forţelor concentrate, diagrama T prezintă o discontinuitate de valoare (salt), egală cu valoarea acelei forţe şi produsă în sensul forţei, iar diagrama M_i prezintă o discontinuitate de tangentă (o frângere) a porţiunilor vecine ale diagramei.*
- *Dacă sarcina distribuită este orientată în jos (p < 0), diagrama M_i este o curbă a cărei convexitate este dirijată în jos (Fig.3.2-1a), iar dacă sarcina distribuită este dirijată în sus (p > 0), diagrama M_i pe acea porţiune are convexitatea în sus (Fig.3.2-1b).*
- *Pe intervale încărcate cu sarcini distribuite liniar, efortul tăietor T variază după o curbă de gradul doi, iar efortul M_i după o curbă de gradul trei. Convexitatea diagramei M_i, se stabileşte la fel ca în cazul p = const., (Fig.3.2-1). Convexitatea efortului T, se stabileşte uşor pe baza celor cunoscute din Analiza Matematică.*



a) b)

Fig.3.2-1

- *Pe reazemul articulat de la capătul grinzii, momentul încovoietor M_i este egal cu zero dacă pe acest reazem nu se găseşte un cuplu (moment) concentrat. Dacă în secţiunea de la capătul consolei nu*

este aplicată o forță concentrată, efortul tăietor pe consolă T, este egal cu zero.

- *La capătul încastrat al unei bare, eforturile T şi M_i sunt egale cu reacțiunea, respectiv momentul din încastrare.*
- *Secțiunile în care se aplică un cuplu concentrat (moment concentrat exterioar), diagrama M_i prezintă o discontinuitate în valoare (salt) egală cu valoarea acelui cuplu concentrat şi produsă în sensul de acțiune al cuplului. Asupra diagramei T, acest cuplu concentrat, nu are nici o influență.*

3.3 Etape pentru trasarea diagramelor de eforturi

Pentru trasarea diagramelor de eforturi, recomand parcurgerea următoarelor ***etape***:

- *Se calculează şi se verifică reacțiunile (*vezi Cap.1*). Nu se trece la etapa următoare până când nu s-au verificat reacțiunile şi avem certitudinea că acestea sunt calculate corect. Altfel, toată munca depusă mai departe este zadarnică.*
- *Se notează (cu numere ori litere) toate secțiunile care pot delimita intervale. Un interval este acea porțiune a unui element de rezistență, pe care eforturile nu-şi modifică funcțiile. Astfel de puncte, pot fi considerate secțiunile în care acționează forțe, reacțiuni, cupluri, începutul şi sfârşitul sarcinii distribuite, bara îşi modifică orientarea (noduri), etc.*
- *Analizând elementul de rezistență, se stabileşte care sunt eforturile care pot apărea în secțiunile acestuia. Se trasează acum liniile de valoare zero ale eforturilor (linii care coincid cu axa geometrică a elementului), se notează eforturile care urmează a fi determinate şi se pun şi unitățile de măsură utilizate pentru eforturi.*
- *Se trece la scrierea funcțiilor de eforturi şi reprezentarea lor grafică, adică obținerea diagramelor de eforturi.*

Pentru scrierea funcțiilor de eforturi şi reprezentarea lor grafică, se parcurg ***etapele***:

- *Din mulțimea de intervale care au rezultat, se alege unul singur.*

- *În intervalul ales, se face o secţiune (imaginară) şi considerăm că prin această secţiune am separat elementul de rezistenţă în două: o parte situată în stânga iar cealaltă în dreapta secţiunii făcute.*
- *Privim atent cele două părţi rezultate şi alegem pentru scrierea funcţiilor de eforturi, pe cea cu forţe exterioare mai puţine.*
- *Luăm variabila (x sau φ - pentru bare curbe) care poziţionează secţiunea făcută, în vederea scrierii funcţiilor de eforturi. Originea variabilei este în unul din capetele intervalului stabilit pentru rezolvare. Dacă s-a ales partea stângă de parcurs, atunci originea variabilei este în capătul din stânga al intervalului, iar dacă s-a ales de parcurs partea dreaptă, atunci originea variabilei este în capătul din dreapta al intervalului.*
- *Se notează intervalul care se rezolvă. Tot acum se scrie şi intervalul valorilor variabilei, ca de exemplu:*

  Intervalul (B - 1) cu x ∈ (0 ; 2 m).
- *După stabilirea intervalului, se trece la scrierea funcţiilor de eforturi pe acest interval (vezi parag. 3.1), funcţii care apoi se reprezintă grafic. Odată cu trasarea diagramelor, corectitudinea acestora se verifică cu ajutorul cunoştiinţelor prezentate la paraggraful 3-2.*
- *Dacă totul a reieşit bine, se alege un alt interval şi se parcurg din nou toate etapele indicate.*
- *După trasarea diagramelor de eforturi pentru tot elementul de rezistenţă, se recomandă a se mai face încă o verificare pe baza celor prezentate la paragraful 3.2.*

La barele curbe, apar mici diferenţe, dar acestea se vor specifica atunci când se prezintă un exemplu de trasare al diagramelor de eforturi la astfel de bare (vezi parag. 3.4.3).

3.4 Exemple de trasare ale diagramelor de eforturi

3.4.1 *Diagrame de eforturi la bare drepte orizontale*

3.4.1-1 *Să se traseze diagramele de eforturi pentru bara dreaptă orizontală din Fig.3.4.1-1a.*

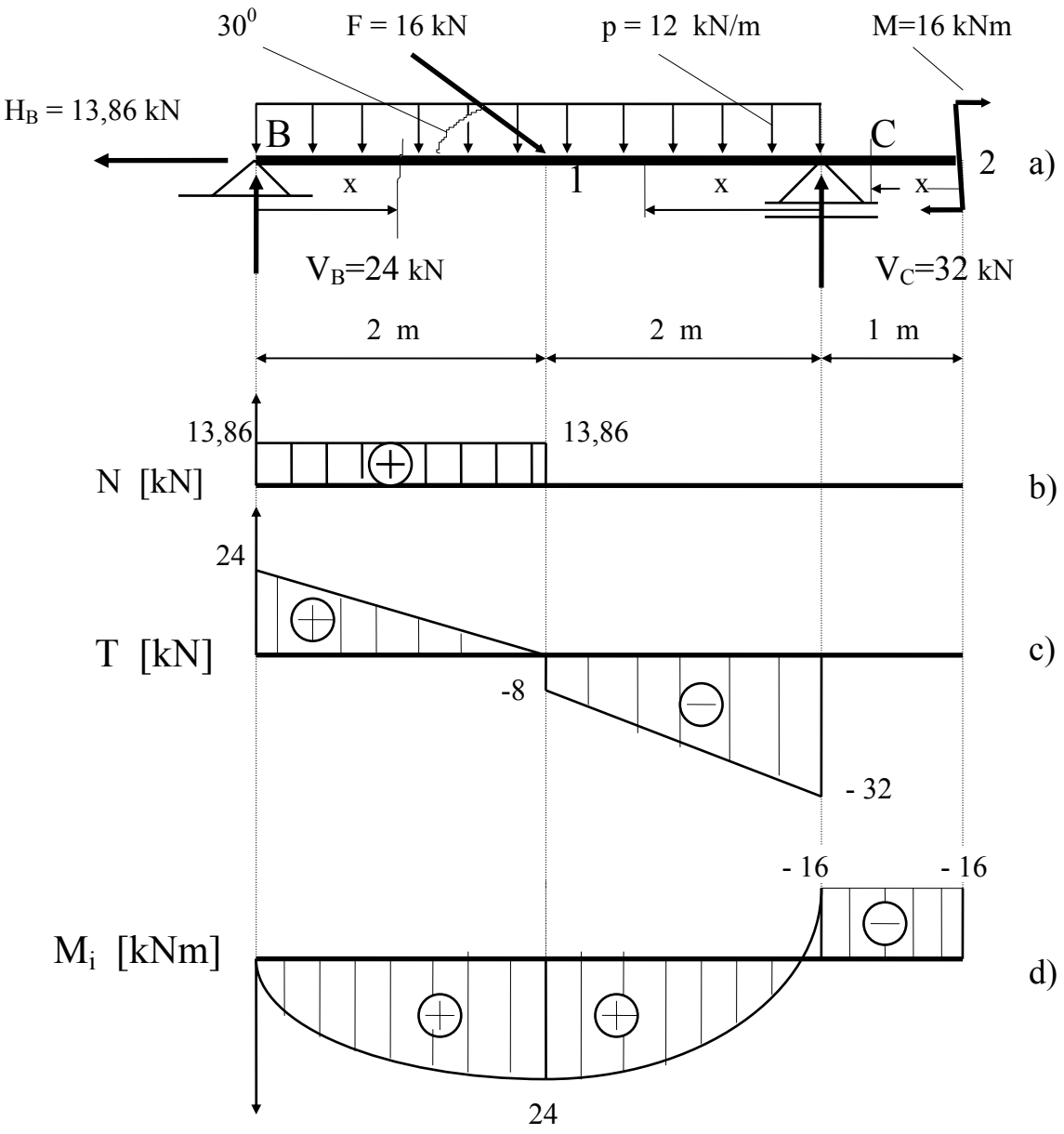


Fig.3.4.1-1

La barele drepte orizontale, se consideră că observatorul (cel care rezolvă problema) se află sub bară şi de aici priveşte modul de solicitare şi deformare al barei.

De la început, trebuie lăsat loc suficient sub bară pentru diagramele de eforturi.

- Calculul reacţiunilor şi verificarea lor, a condus la următoarele valori:

$H_B = 13,86$ kN
$V_B = 24$ kN
$V_C = 32$ kN.

- Notăm celelalte secţiuni caracteristice cu 1 şi 2. Au rezultat astfel trei intervale caracteristice: B-1 ; 1-C ; C-2. Pe fiecare astfel de interval, eforturile au funcţii unice.

- Tinând seama de forţele exterioare, se constată că pentru această grindă există trei eforturi: N, T, M_i.

- Am reprezentat liniile de valoare zero (axa barei), le-am notat cu N, T, respectiv M_i şi am pus în paranteze drepte, unităţile de măsură corespunzătoare: [kN], [kN], [kNm].

Trecem la scrierea funcţiilor de eforturi şi trasarea acestor diagrame, pe fiecare interval.

- Alegem pentru început, intervalul din stânga şi realizăm o secţiune imaginară (Fig.3.4.1-1a). Au rezultat astfel două părţi faţă de această secţiune: una în stânga şi cealaltă în dreapta. Se constată că partea din stânga (porţiunea B - până la secţiune) este mai puţin încărcată, motiv pentru care alegem această parte. Originea variabilei x o alegem în stânga, în punctul B (în reazem).

Deci, rezolvăm:

Intervalul (B - 1) cu $x \in [0 ; 2\ m]$.

Pe acest interval, funcţiile de eforturi sunt (vezi şi convenţia de semne pozitive):

Efortul axial N:

$N = H_B = 13,86$ kN. Efortul N, nu depinde de poziţia secţiunii x şi este constant. Valorile pozitive le reprezentăm grafic, deasupra axei de valoare zero (vezi sensul pozitiv al ordonatei). În secţiunea B, rezultă un salt de 13,86 kN, salt care trebuie să existe (Fig.3.4.1-1b).

***Efortul tăietor T*:**

$T = V_B - p\ x = 24 - 12\ x$ şi este o dreaptă (corect).

Calculăm valorile lui T, la capetele intervalului B - 1:

$T_B = T_{x=0} = 24 - 12\ 0 = 24$ kN, rezultă salt (corect),

$T_1 = T_{x=2} = 24 - 12\ 2 = 24 - 24 = 0$ kN

Se unesc valorile de la capetele intervalului şi rezultă diagrama care prezintă o variaţie liniară (corect - Fig.3.4.1-1c).

***Efortul moment încovoietor, M_i*:**

$M_i = V_B\ x - p\ x\ x/2 = 24\ x - 6\ x^2$ - este o parabolă (corect).

Calculăm valorile lui M_i, la capetele intervalului:

$M_{i,B} = M_{i,x=0} = 24\ 0 - 6\ 0^2 = 0$ (corect),

$M_{i,B} = M_{i,x=2} = 24\ 2 - 6\ 2^2 = 48 - 24 = 24$ kNm.

Rezultă, M_i crescător (corect, $T>0$) şi nu are salt sau extrem (corect). La momentul încovoietor, valorile pozitive se reprezintă sub axa de valoare zero (dedesubt - Fig.3.4.1-1d).

Deoarece am terminat intervalul din stânga, trecem la alt interval. Alegem spre exemplu, intervalul din dreapta.

- Am realizat secţiunea imaginară (Fig.3.4.1-1a),
- Se observă că partea din dreapta, faţă de secţiune, este mai puţin încărcată: numai cu momentul M. Alegem această parte.

-Variabila x, are originea în secţiunea 2.

- Rezolvăm acum:

Intervalul (2 - C) cu $x \in [0 ; 1\ m]$.

Pe acest interval, funcţiile de eforturi, sunt (atenţie la semnele pozitive ale eforturilor - parcurgem intervalul de la dreapta la stânga):

$N = 0$ (nu există forţe exterioare axiale pe partea din dreapta),

$T = 0$ (nu există forţe exterioare normale la axa barei),

$M_i = - M = - 16$ kNm - nu depinde de poziţia secţiunii x,
- este constant,
- prezintă salt în secţiunea 2 (corect).

A mai rămas intervalul din mijloc.

- Facem o secţiune imaginară x (vezi Fig.3.4.1-1a).

- Am impresia că partea din dreapta este mai simplu de rezolvat. Alegem această parte. Varibila x, are originea în secțiunea C (reazemul din dreapta).

Rezolvăm acum:

Intervalul (C - 1) cu x $\in$ [0 ; 2 m].

Funcțiile de eforturi, pe acest interval, sunt:

N = 0 (nu există forțe exterioare axiale pe partea din dreapta),

- în secțiunea 1, apare un salt de 13,86 kN (corect - Fig.3.4.1-1b),

$T = - V_C + p\ x = -32 + 12\ x$ - variație liniară (corect),

Valorile lui T la capetele intervalului, sunt:

$T_C = T_{x=0} = -32 +12\ \ 0 = -32$ kN,

$T_1 = T_{x=2} = -32 +12\ \ 2 = -32 + 24 = -8$ kN.

În secțiunea C, apare un salt de 32 kN (corect), iar în secțiunea 1, un salt de 8 kN (corect). Efortul T nu se anulează pe acest interval, decât în secțiunea 1 (Fig.3.4.1-1c).

$M_i = -M + V_C\ x - p\ x\ x/2 = -16 +32\ x - 6\ x^2$ -variație parabolică (corect).

Valorile lui M_i la capetele intervalului, sunt:

$M_{i,C} = M_{i,x=0} = -16$ kNm -diagrama se închide în C (corect),

$M_{i,1} = M_{i,x=2} = -16 +32\ \ 2 - 6\ \ 2^2 = -16 +64 -24 = 24$ kNm - diagrama se închide în 1 (corect). În secțiunea 1, rezultă un extrem (corect, deoarece $T_1 = 0$). Pe intervalul 1 - C, $T < 0$, iar M_i este descrescător, scade de la 24 kNm la -16 kNm (corect).

Aşa se trasează corect diagramele de eforturi. Este bine ca verificarea corectitudinii diagramelor de eforturi, să se facă aşa ca în exemplul prezentat, adică o dată cu trasarea diagramelor şi apoi se recomandă o reverificare la final. O verificare a diagramelor de eforturi numai la final (după ce acestea au fost trasate), prin corectare conduce la un aspect urât, dezordonat, de unde nu se mai înțelege nimic

3.4.1-2 *Să se traseze diagramele de eforturi, pentru bara dreaptă din figura de mai jos* (Fig.3.4.1-2).

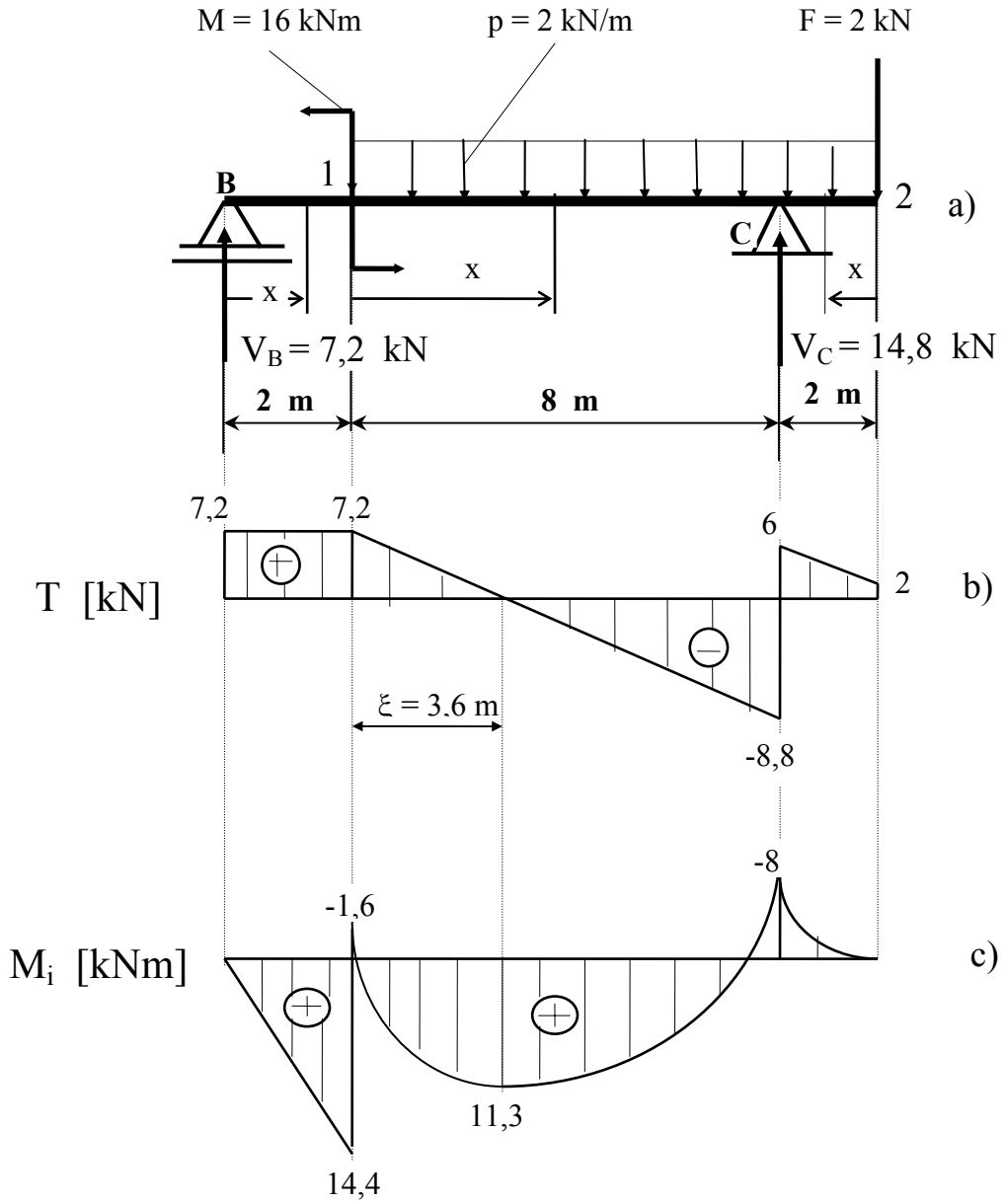


Fig.3.4.1-2

Calculul reacţiunilor a condus la următoarele valori:

$V_B = 7,2$ kN
$H_C = 0$
$V_C = 14,8$ kN.

Pentru acest element de rezistenţă, există numai eforturile T şi M_i. Neexistând încărcări axiale, nu există nici efort axial N (N = 0).

Alte puncte caracteristice în afară de reazeme, sunt secţiunile 1 şi 2 (Fig.3.4.1-2a). Alegem pentru început,

Intervalul (B - 1) cu x $\in$ [0 ; 2 m].

Originea variabilei x este în secţiunea B, deoarece alegem partea din stânga, fiind mai puţin încărcată.

Funcţiile eforturilor pe acest interval, sunt:

$T = V_B = 7,2$ kN -rezultă efort tăietor constant, cu salt în secţiunea B (corect - vezi Fig.3.4.1-2b),

$M_i = V_B\ x = 7,2\ x$ -variaţie liniară (corect).

La capetele intervalului, valorile lui M_i, sunt:

$M_{i,B} = M_{i,x=0} = 7,2\ \ 0 = 0$ (corect),

$M_{i,1} = M_{i,x=2} = 7,2\ \ 2 = 14,4$ kNm.

Momentul încovoietor M_i este crescător (corect, deoarece $T > 0$ -vezi Fig.3.4.1-2c).

Alegem alt interval şi anume, pe cel din mijloc, în care realizăm o secţiune imaginară (Fig.3.4.1-2a). Partea din stânga pare mai uşor de rezolvat. Rezolvăm acum,

Intervalul (1 - C) cu x $\in$ [0 ; 8 m].

Funcţiile eforturilor pe intervalul 1 - C, sunt:

$T = V_B - p\ x = 7,2 - 2\ x$ -variaţie liniară (corect).

Valorile efortului tăietor la capetele intervalului, sunt:

$T_1 = T_{x=0} = 7,2 - 2\ \ 0 = 7,2$ kN -diagrama se închide fără salt în secţiunea 1 (corect - vezi Fig.3.4.1-2b),

$T_C = T_{x=8} = 7,2 - 2\ \ 8 = 7,2 - 16 = -8,8$ kN.

Efortul tăietor T se anulează (trece de la valori pozitive la valori negative). Secţiunea în care T se anulează, trebuie determinată, deoarece în această secţiune, efortul M_i prezintă un extrem (maxim în cazul nostru). Punem condiţia ca T să fie nul. Rezultă:

$T = 7,2 - 2\ \xi = 0$, de unde $\xi = 7,2 / 2 = 3,6$ m. Se cotează poziţia acestei secţiuni (vezi Fig.3.4.1-2b).

Efortul M_i, are pe intervalul 1 - C, expresia:

$M_i = V_B\ (2 + x) - M - p\ x\ x / 2$ sau,

$M_i = 7,2\ (2 + x) - 16 - x^2$ -variaţie parabolică (corect).

Valorile lui M_i la capetele intervalului şi valoarea extremă (maxim), sunt:

$M_{i,1} = M_{i,x=0} = 7,2\ (2 + 0)\ -16\ -\ 0^2 = -1,6$ kNm -rezultă în secțiunea 1 un salt de 16 kNm (corect -Fig.3.4.1-2c),

$M_{i,extrem} = M_{i,\xi=3,6} = 7,2\ (2 + 3,6)\ -16\ -\ 3,6^2 = 11,3$ kNm,

$M_{i,C} = M_{i,x=8} = 7,2\ (2 + 8)\ -16\ -\ 8^2 = -8$ kNm.

Pe porțiunea unde $T > 0$, M_i descreşte de la 11,3 kNm la -8 kNm (corect - Fig.3.4.1-2c).

A mai rămas, intervalul din dreapta. După realizarea secțiunii imaginare în acest interval (Fig.3.4.1-2a), se observă că partea dreaptă este mai puțin încărcată. Alegem atunci,

Intervalul (2 - C) cu x $\in$ [0 ; 2 m].

Pe intervalul 2 - C, eforturile prezintă următoarele expresii:

$T = F + p\ x = 2 + 2\ x$ -variație liniară (corect).

La capetele intervalului, efortul tăietor T, are valorile:

$T_2 = T_{x=0} = 2 + 2\ \ 0 = 2$ kN,

$T_C = T_{x=2} = 2 + 2\ \ 2 = 6$ kN.

În secțiunea 2, apare un salt de 2 kN (corect), iar în secțiunea C un salt de 14,8 kN (corect - Fig.3.4.1-2b). Efortul tăietor este pozitiv şi nu se anulează.

Funcțiile de moment încovoietor M_i pe intervalul 2 - C, sunt:

$M_i = -F\ x - p\ x\ x/2 = -2\ x - x^2$ -variație parabolică (corect).

Cum T nu se anulează, M_i nu prezintă extrem.

La capetele intervalului 2 - C, valorile lui M_i, sunt:

$M_{i,2} = M_{i,x=0} = -2\ \ 0 - 0^2 = 0$ -fără salt în secțiunea 2 (corect),

$M_{i,C} = M_{i,x=2} = -2\ \ 2 - 2^2 = -8$ kNm -diagrama se închide în secțiunea C fără salt (corect). Cum pe intervalul 2 - C, $T > 0$, efortul M_i creşte de la -8 kNm la zero (corect).

3.4.2 *Diagrame de eforturi la cadre cu bare drepte*

3.4.2-1 *Să se traseze diagramele de eforturi, pentru cadrul plan din Fig.3.4.2-1*

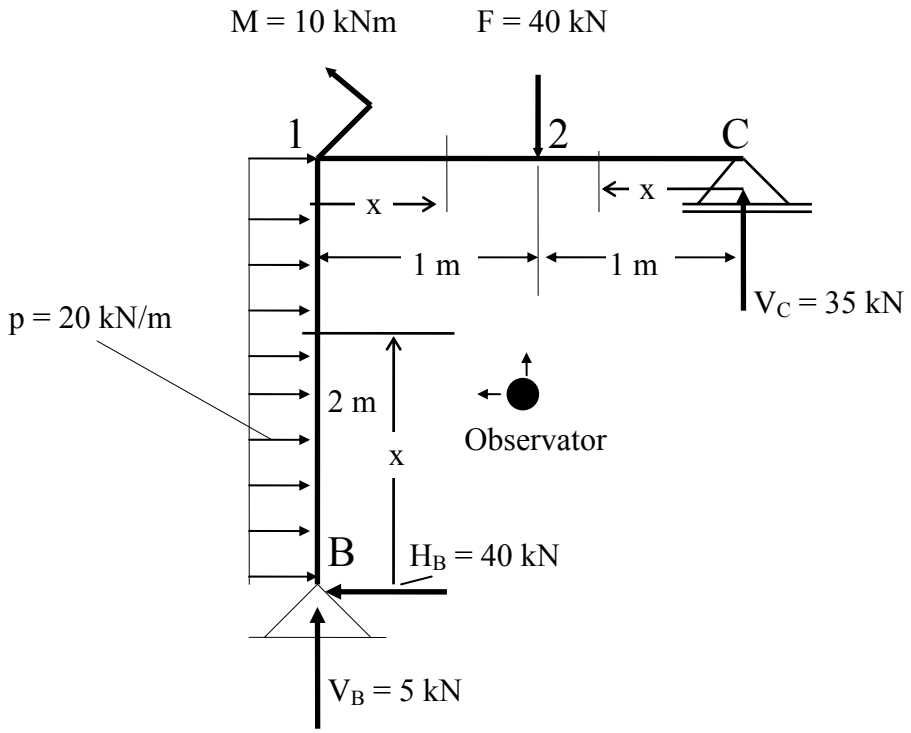


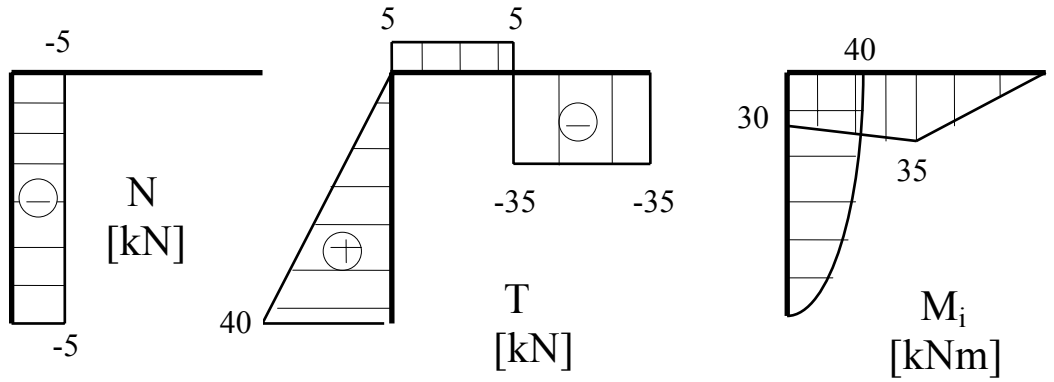
Fig.3.4.2-1

Calculul reacţinilor a condus la următoarele valori:

H_B = 40 kN
V_B = 5 kN
V_C = 35 kN.

Liniile de valoare zero ale eforturilor, nu mai pot fi puse sub elementul de rezistenţă ca la barele drepte orizontale. În acest caz, liniile de valoare zero ale eforturilor urmăresc conturul cadrului şi se aşează separat, ca în Fig.3.4.2-2. Aici se notează natura efortului şi unitatea de măsură.

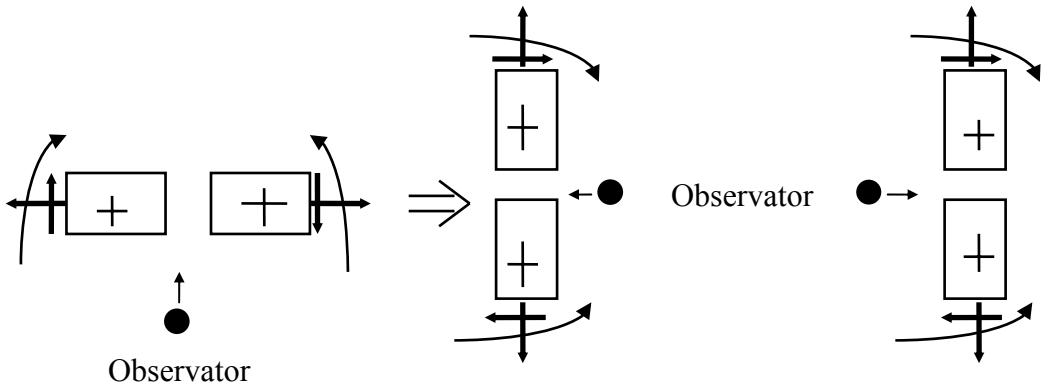
Alte puncte caracteristice ale cadrului sunt secţiunile 1 şi 2 (Fig.3.4.2-1). Şi pentru acest cadru, avem tot trei intervale caracteristice (B - 1, 1 - 2, 2 - C), unul (B - 1) fiind orientat pe verticală, iar celelalte două pe orizontală, ca la exemplul 3.4.1. Aşezarea pe verticală a intervalului B - 1, nu ridică probleme deosebite pentru scrierea funcţiilor de eforturi şi trasarea diagramelor.



a) b) c)

Fig.3.4.2-2

Nu ne rămâne decât să ne imaginăm că eforturile pe care le-am reprezentat pentru bara dreaptă orizontală, s-au rotit cu 90^0 şi au ajuns orientate pe vericală (Fig.3.4.2-3)



a) b) c)

Fig.3.4.2-3

La cadre, pentru barele verticale, poziția observatorului este astfel încât trecerea la barele orizontale să fie făcută fără a trece de cealaltă parte a barei. Pentru cadrele cu contururi închise, rezultă că poziția observatorului trebuie să fie în interiorul cadrului. Pentru exemplul nostru, la porțiunea verticală, observatorul va privi bara din partea dreaptă (Fig.3.4.2-1).

Începem scrierea funcţiilor de eforturi şi trasarea diagramelor de eforturi cu intervalul orientat pe verticală.

Realizăm secţiunea imaginară în acest interval (Fig.3.4.2-1) şi constatăm că porţiunea mai puţin încărcată este cea din partea stângă a observatorului (dinspre reazemul B). Ca urmare, originea variabilei x, va fi în secţiunea B.

La scrierea funcţiilor de eforturi, pentru această situaţie, ne orientăm după convenţia de semne pozitive, prezentată în Fig.3.4.2-3b. Rezolvăm atunci,

Intervalul (B - 1) cu x $\in$ [0 ; 2 m]

Funcţiile de eforturi pe acest interval, sunt:

$N = - V_B = -5$ kN -efort constant (corect)

-salt în secţiunea B (corect - Fig.3.4.2-2a)

$T = H_B - p\ x = 40 - 20\ x$ -variaţie liniară (corect).

Valorile lui T la capetele intervalului, sunt:

$T_B = T_{x=0} = 40 - 20\ \ 0 = 40$ kN, salt în secţiunea B (corect),

$T_1 = T_{x=2} = 40 - 20\ \ 2 = 0$ kN -se anulează în capătul intervalului şi este pozitiv (corect - Fig.3.4.2-2b).

$M_i = H_B\ x - p\ x\ x/2 = 40\ x - 10\ x^2$ -variaţie parabolică (corect).

Valorile lui M_i la capetele intervalului B - 1, sunt:

$M_{i,B} = M_{i,x=0} = 40\ \ 0 - 10\ \ 0^2 = 0$ -fără salt în secţiunea B (corect),

$M_{i,1} = M_{i,x=2} = 40\ \ 2 - 10\ \ 2^2 = 40$ kNm -momentul încovoietor M_i este crescător (corect) şi prezintă extrem în secţiunea 1 (corect - Fig.3.4.2-2c).

Trasăm acum diagramele de eforturi pentru,

Intervalul (C - 2) cu x $\in$ [0 ; 1 m]

Originea variabilei x este în secţiunea C, deoarece am ales partea din dreapta secţiunii. Acest interval fiind orizontal, nu ridică nici un fel de probleme.

Funcţiile de eforturi, sunt:

$N = 0$ -nu există sarcini axiale pe partea luată în considerare (corect),

$T = - V_C = -35$ kN -efort constant cu salt în secţiunea C (corect - Fig.3.4.2-2b),

$M_i = V_C\ x = 35\ x$ -variație liniară (corect).

La capetele intervalului C - 1, valorile lui M_i, sunt:

$M_{i,C} = M_{i,x=0} = 35\ \ 0 = 0$ -fără salt în secțiunea C (corect),

$M_{i,2} = M_{i,x=1} = 35\ \ 1 = 35$ kNm -momentul încovoietor este descrescător pe intervalul 2 - C de la valoarea 35 kNm la 0 kNm (Fig.3.4.2-2c).

Intervalul (2 - 1) cu x $\in$ [0 ; 1 m]

va fi rezolvat tot de la dreapta spre stânga cu originea variabilei x, în secțiunea 1 (Fig.3.4.2-1).

Pe acest interval, funcțiile de eforturi au expresiile:

N = 0 -nu există forțe exterioare axiale pe partea considerată (corect),

$T = -V_C + F = -35 + 40 = 5$ kN -efort constant cu salt de 40 kN în secțiunea 1 şi pozitiv (corect - Fig.3.4.2-2b),

$M_i = V_C\ (1 + x) - F\ x = 35\ (1 + x) - 40\ x = 35 - 5\ x$ -variație liniară (corect).

Valorile lui M_i la capetele intervalului, sunt:

$M_{i,2} = M_{i,x=0} = 35 - 5\ \ 0 = 35$ kNm -diagrama în secțiunea 2 se închide fără salt (corect - Fig.3.4.2-2c),

$M_{i,1} = M_{i,x=1} = 35 - 5\ \ 1 = 30$ kNm -momentul încovoietor este crescător pe intervalul 1 - 2 (T > 0). În nodul rigid 1, apare un salt de moment încovoietor de la 30 kNm (pe bara verticală) la 40 kNm (pe bara orizontală). Apariția acestui salt de 10 kNm este corectă, deoarece în secțiunea 1 acționează momentul concentrat M = 10 kNm.

Se poate constata că în nodurile neîncărcate, formate de bare perpendiculare, efortul axial de pe o bară devine tăietor pe cealaltă, iar efortul tăietor de pe o bară devine axial pe cealaltă bară. De asemenea, în nodurile neîncărcate formate din bare perpendiculare, momentul încovoietor M_i de pe o bară, se transmite pe cealaltă bară în mărime şi semn.

3.4.3 *Diagrame de eforturi la bare curbe plane*

3.4.3-1 *Să se traseze diagramele de eforturi pentru bara curbă plană din Fig.3.4.3-1.*

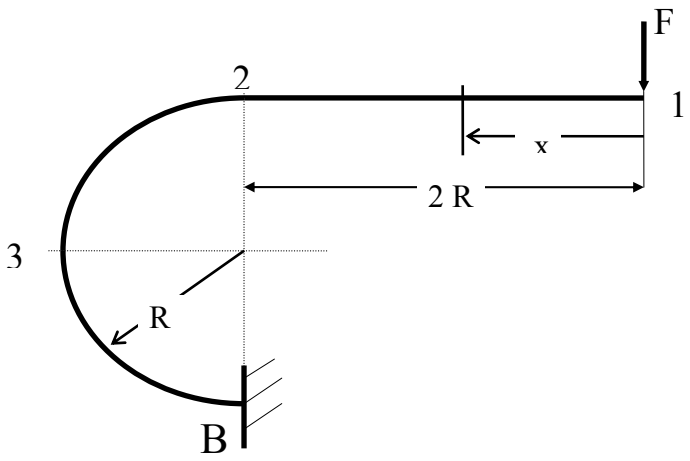


Fig.3.4.3-1

La bare înțepenite, pentru trasarea diagramelor de eforturi, se poate renunța la calculul reacțiunilor, cu condiția ca funcțiile de eforturi pentru toate intervalele să fie scrise parcurgând fiecare interval caracteristic dinspre capătul liber spre încastrare.

Pentru bara din Fig.3.4.3-1, după notarea secțiunilor caracteristice 1, 2 respectiv B, rezultă două intervale caracteristice: primul interval 1 - 2 constituie o porțiune dreaptă, iar cel de-al doilea 2 - 3 - B, este o porțiune curbă cu raza de curbură R.

Abordăm trasarea diagramelor de eforturi la fel ca la cadre (vezi parag. 3.4.2). Diagramele de eforturi, le trasăm pe conturul cadrului prezentat în Fig.3.4.3-2. Începem cu:

Intervalul (1 - 2) cu x $\in$ [0 ; 2R].

Originea variabilei x este în secțiunea 1, deoarece considerăm că partea din dreapta secțiunii este mai puțin încărcată şi mai uşor de rezolvat.

Pe intervalul 1 - 2, funcțiile de eforturi au expresiile:

N = 0 -nu există forțe exterioare axiale pe partea dreaptă,

T = F -efort axial constant de valoare F, pozitiv, iar în secțiunea 1 apare un salt de valoare F (corect - Fig.3.4.3-2b),

M_i = -F x -variație liniară (corect).

Valorile lui M_i la capetele intervalului 1 - 2, sunt:

$M_{i,1} = M_{i,x=0}$ = F 0 = 0 -nu apare salt în secțiunea 1 (corect - Fig.3.4.3-2c),

$M_{i,2} = M_{i,x=2R} = F \quad 2R = 2FR$ -momentul încovoietor M_i pe intervalul 2 -1 este descrescător, $T < 0$ (corect - Fig.3.4.3-2c).

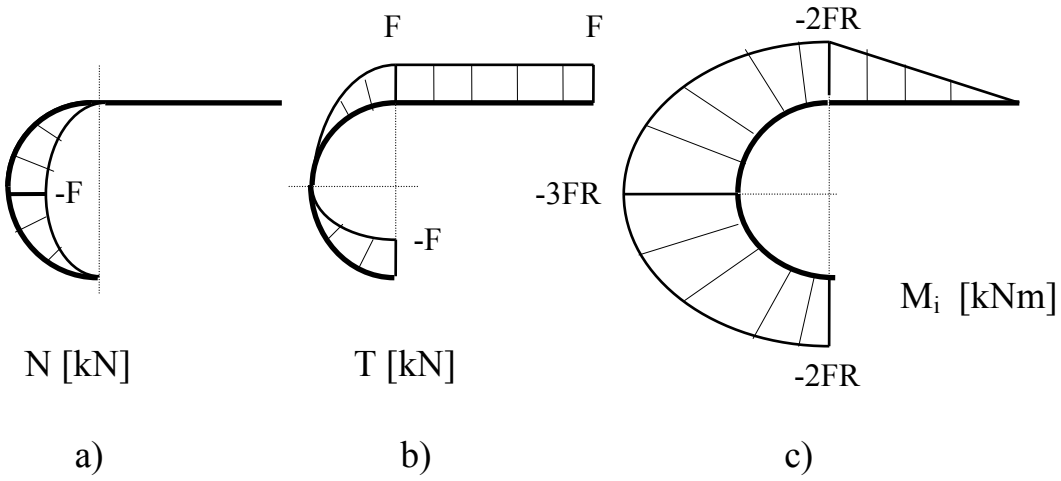


Fig.3.4.3-2

Cel de-al doilea interval, după cum se poate observa, nu mai este drept, ci este o porțiune curbă. Variabila liniară x de la barele drepte nu poate fi utilizată şi pentru porțiunile curbe. Pentru porțiunile curbe, variabila care poziționează secțiunea în care se scriu funcțiile de eforturi este un unghi, fie el notat cu φ (Fig.3.4.3-3).

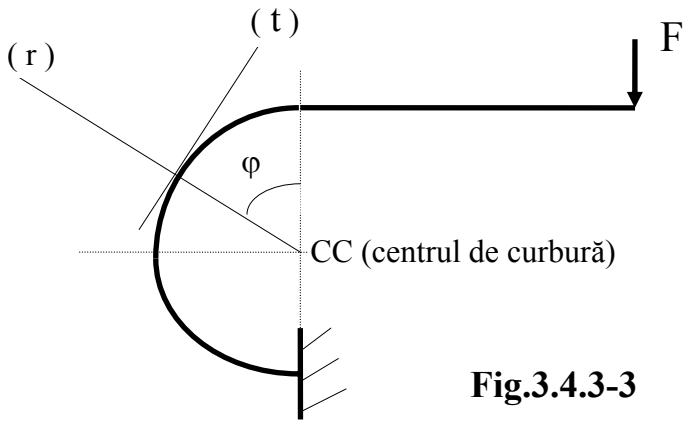


Fig.3.4.3-3

În secțiunea definită de unghiul φ, trebuie scrise funcțiile de eforturi.

După cum se ştie, efortul axial N este situat pe o direcție perpendiculară la secțiune. La porțiunile curbe, o astfel de direcție este tangenta la curbă, notată (t) în Fig.3.4.3-3. Efortul tăietor T, este conținut în planul secțiunii. La porțiunile curbe, această direcție trece prin secțiune şi prin centrul de curbură (direcția radială r-Fig.3.4.3-3).

Aşadar, pentru a stabili funcţia de efort axial N într-o secţiune a unei porţiuni curbe, toate forţele exterioare de pe partea considerată, trebuie proiectate pe tangenta la curbă în secţiunea respectivă (direcţia t).

Pentru funcţia efort tăietor T, se proiectează toate forţele exterioare de pe partea considerată, pe direcţia radială (r) care conţine acea secţiune.

Dacă o proiectare directă a forţelor exterioare ce acţionează pe partea considerată este dificilă, atunci se recomandă reducerea tuturor acestor forţe exterioare în secţiunea respectivă (vezi şi parag. 1.3).

Exemplu de reducere a forţelor exterioare, pentru problema studiată (Fig.3.4.3-1) este prezentat în Fig.3.4.3-4.

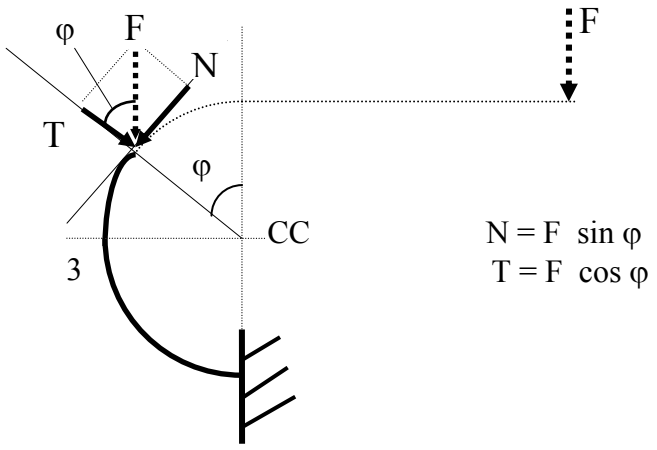


Fig.3.4.3-4

Acum putem scrie funcţiile de eforturi (cu aceleaşi convenţii de semn pozitiv de la barele drepte) pe:

Intervalul (2 - B) cu $\varphi \in [o ; \pi]$.

Efortul axial N, are expresia:

$N = -F \sin \varphi$ -variaţie sinusoidală (vezi Fig.3.4.3-4),

Valorile efortului axial N la capetele intervalului considerat, sunt:

$N_2 = N_{\varphi=0} = -F \sin 0 = 0$ -nu apare salt în diagramă (corect - Fig.3.4.3-2a),

$N_3 = N_{\varphi=\Pi/2} = -F \sin \Pi/2 = -F$

$N_B = N_{\varphi=\Pi} = -F \sin \Pi = -F \ 0 = 0$ -se poate constata că pe intervalul 2 - B, efortul axial N, prezintă un singur extrem pentru $\varphi = \Pi/2$ (Fig.3.4.3-2a).

Efortul tăietor T, are expresia:

$T = F \cos \varphi$ -variație cosinusoidală (vezi Fig.3.4.3-4).

Valorile lui T pe intervalul considerat, sunt:

$T_2 = T_{\varphi=0} = F \cos 0 = F$ -diagrama T se închide fără salt în secțiunea 2 (corect - Fig.3.4.3-2b),

$T_3 = N_{\varphi=\Pi/2} = F \cos \Pi/2 = 0$

$T_B = T_{\varphi=\Pi} = F \cos \Pi = F \ (-1) = -F$ -în secțiunea B apare un salt determinat de reacțiunea verticală din înțepenire (corect - Fig.3.4.3-2b).

Efortul moment încovoietor M_i în secțiunea considerată, se scrie relativ uşor. Din Fig.3.4.3-4, rezultă:

$M_i = -F \ (2R + R \sin \varphi) = -FR \ (2 + \sin \varphi)$ -o variație sinusoidală.

Pe intervalul 2 - B, valorile lui M_i sunt:

$M_{i,2} = M_{i,\varphi=0} = -FR \ (2 + \sin 0) = -2FR$ -diagrama M_i se închide fără salt în secțiunea 2 (corect - Fig.3.4.3-2c),

$M_{i,3} = M_{i,\varphi=\Pi/2} = -FR \ (2 + \sin \Pi/2) = -FR(2 + 1) = -3FR$ -are extrem în secțiunea 3, deoarece $T_3 = 0$ (corect - Fig.3.4.3-2c),

$M_{i,B} = M_{i,\varphi=\Pi} = -FR \ (2 + \sin \Pi) = -FR(2 + 0) = -2FR$ -în secțiunea B apare un salt determinat de reacțiunea unui cuplu din încastrare (corect - Fig.3.4.3-2c). Pe porțiunea 3 - 2 unde $T > 0$, M_i creşte de la -3FR la -2FR, iar pe porțiunea B - 3 unde $T < 0$, M_i descreşte de la -2FR la -3FR (corect - Fig.3.4.3-2c).

Trasarea diagramelor de eforturi la bare curbe a fost prezentată pe un exemplu de combinație bară dreaptă - bară curbă. În cazul existenței numai a porțiunilor curbe, scrierea funcțiilor şi trasarea diagramelor de eforturi, se face la fel ca pentru porțiunea curbă prezentată.

Se atrage atenția asupra faptului că în unele situații, funcțiile de efort N şi T pot prezenta extrem, a cărui valoare trebuie determinată. La aceste eforturi, extreme se pot întâlni atunci când funcțiile eforturilor conțin atât funcția trigonometrică *sin* cât şi *cos*, sau combinații de aceste funcții trigonometrice.

Pentru semnele pozitive ale eforturilor din barele curbe plane, recomand utilizarea convenției stabilită la barele drepte şi nu altele, care nu fac altceva decât să îngreuneze calculul şi să deruteze sau să încurce pe rezolvitor.

3.4.4 *Diagrame de eforturi la sisteme spațiale de bare drepte*

Sistemele spațiale sunt printre cele mai răspândite sisteme într-o construcție sau structură de rezistență. Ele pot fi formate din bare drepte, curbe sau combinație a acestora.

Mă voi opri asupra sistemelor spațiale alcătuite din bare drepte, nu numai pentru faptul că sunt cele mai răspândite, ci şi pentru aceea că formează baza de studiu pentru studenții facultăților cu profil mecanic.

La sistemele spațiale, nu putem utiliza toate convențiile pe care le-am utilizat la exemplele precedente. La aceste sisteme, folosim următoarele **convenții pentru trasarea diagramelor de eforturi**:

- *Diagrama efortului axial N, o putem reprezenta în orice plan al sistemului. În această diagramă, vom pune semn: plus* (+) *dacă efortul este de întindere şi minus* (-) *dacă este de compresiune.*
- *Diagrama efortului tăietor T, se va reprezenta în planul în care acționează forțele exterioare normale la axa barei şi de aceeaşi parte a barei cu forțele respective. În diagrama T, nu se mai pune semn.*
- *Diagrama momentului încovoietor M_i, se va reprezenta de partea fibrei întinse a barei, iar în diagramă nu se mai pune semn.*
- *Momentul de torsiune M_t, se poate reprezenta în orice plan, nu se mai pune semn în diagramă, iar "haşura" diagramei M_t se face printr-o spirală, tocmai pentru a se deosebi de momentul încovoietor M_i.*

Înainte de a ne apuca să trasăm diagramele de eforturi la un sistem spațial, este recomandat a ne reaminti cum variază eforturile în funcție de încărcarea fiecărui interval (vezi parag.3.2). De asemenea este bine să ne reamintim cum se reduc forțele exterioare într-o secțiune (vezi parag. 1.3) şi *faptul că o dimensiune a unui element de*

rezistență paralelă cu suportul forței nu constituie braț al forței şi ca urmare produsul dintre forță şi o astfel de dimensiune, nu produce niciodată un cuplu (moment).
Dacă ne-am reamintit toate acestea, putem începe să trasăm diagrame de eforturi pentru sisteme spațiale.

3.4.4.1 *Pentru cadrul din Fig.3.4.4.1-1, să se traseze diagramele de eforturi.*

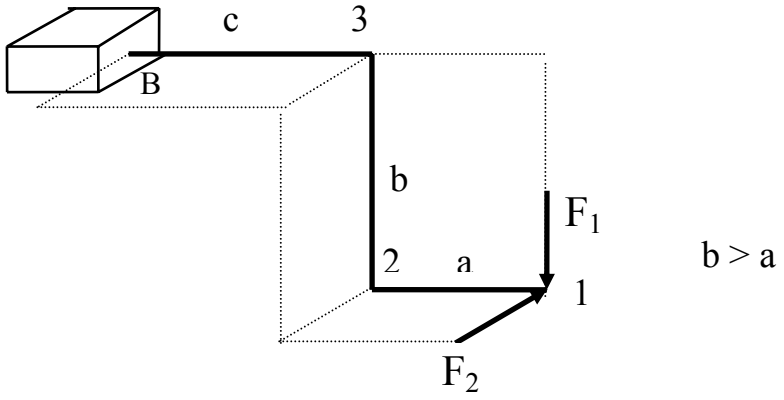


Fig.3.4.4.1-1

După cum se poate constata, cadrul proprizis împreună cu F_1, formează un sistem plan. Cum F_2 este într-un plan perpendicular pe planul cadrului şi a forței F_1, rezultă un sistem spațial.

Notăm secțiunile caracteristice ale sistemului cu: 1, 2, 3, B. S-au obținut astfel trei intervale caracteristice (Fig.3.4.4.1-1).

Privind atent sistemul din Fig.3.4.4.1-1, se pot stabili o serie de aspecte cu privire la diagramele de eforturi. Iată doar câteva dintre acestea:

. efortul axial N există numai pe tronsonul 2 - 3 dat de F_1, este constant şi de întindere; poate fi pus pe diagrama N (Fig.3.4.4.1-2a).

- forța exterioară F_1 produce efort tăietor pe intervalele 1 - 2 şi 3-B, constant, de valoare F_1. În diagramă acest efort se va reprezenta în plan vertical (cum acționează şi F_1) şi deasupra barei (de partea

forței F_1). Efortul tăietor produs de F_1, este reprezentat în diagrama T din Fig.3.4.4.1-2b.

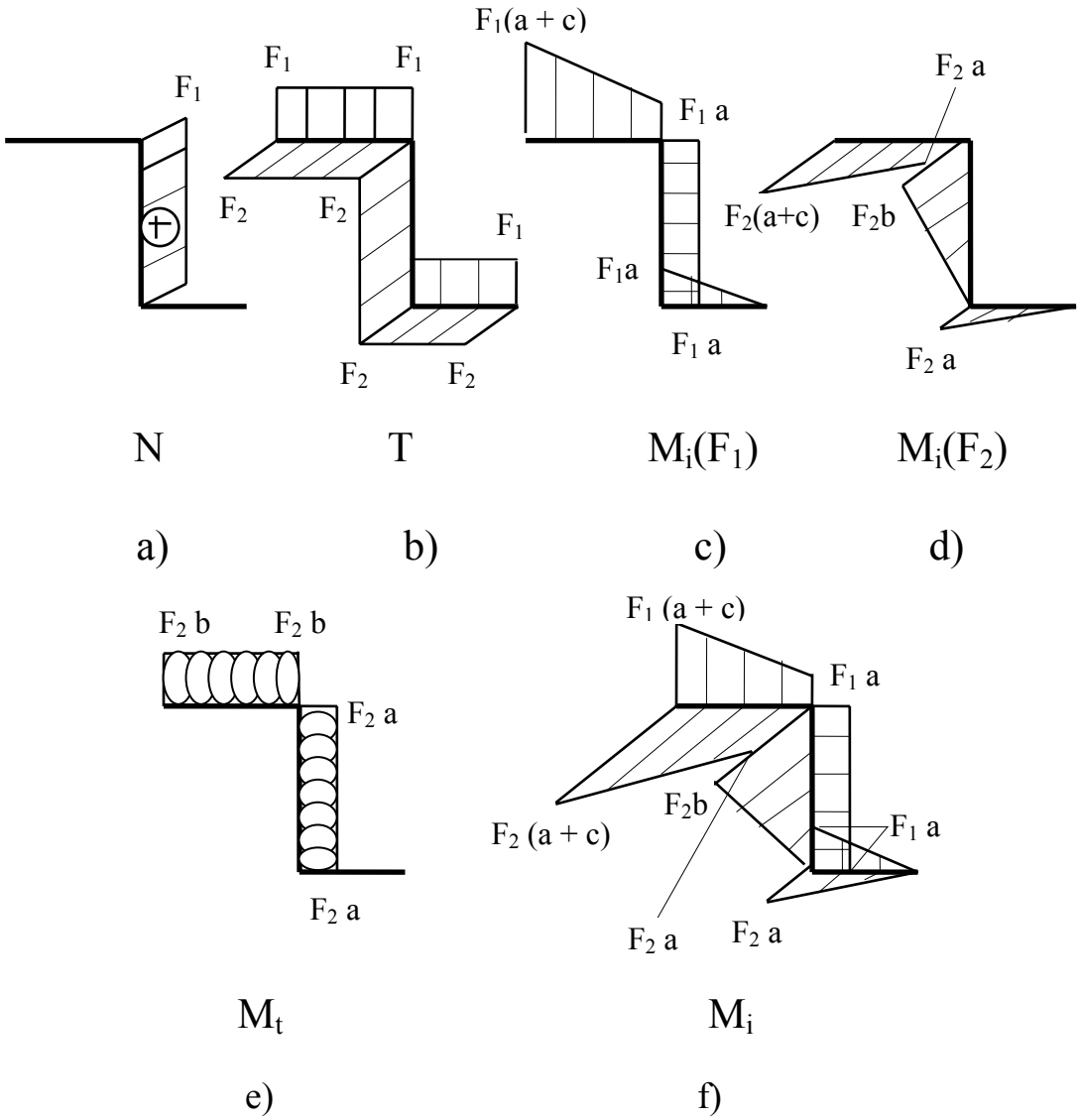


Fig.3.4.4.1-2

- forța exterioară F_2 este perpendiculară pe toate intervalele sistemului, deci pe fiecare interval produce efort tăietor, constant şi de valoare F_2. Efortul tăietor produs de F_2 se reprezintă în diagrama T în planul în care acționează F_2 şi de aceeaşi parte a barei cu F_2 (vezi Fig.3.4.4.1-2b).

După cum se poate observa, la sistemele spațiale alcătuite din bare drepte, trasarea diagramelor de eforturi N şi T, se face foarte uşor, fără a mai fi nevoie de scrierea funcțiilor eforturilor.

Trasarea diagramelor M_i şi M_t este ceva mai dificilă, dar dacă v-aţi însuşit bine toate cunoştiinţele prezentate până acum, veţi vedea că nu aveţi dificultăţi.

Trasarea diagramelor M_i şi M_t este bine să se facă prin suprapunere de efecte. Asta înseamnă că se va lua sistemul încărcat pe rând numai cu câte o sarcină. Acest principiu îl aplicăm şi exemplului nostru din Fig.3.4.4.1-1.

Pentru început, considerăm sistemul încărcat numai cu forţa exterioară F_1 (Fig.3.4.4.1-3).

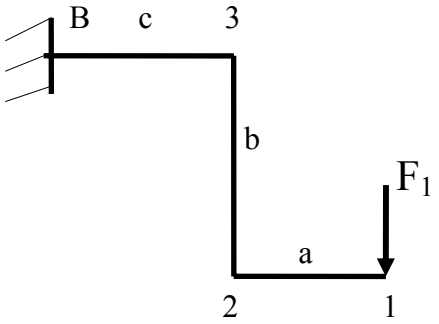


Fig.3.4.4.1-3

Privind sistemul şi având trasate diagramele T, putem afirma următoarele:

- Sistemul din Fig.3.4.4.1-3 este un cadru plan (vezi diagramele de eforturi de la parag. 3.4.2).

- Pe toate intervalele, diagramele M_i produse de F_1, prezintă variaţie liniară (intervale neîncărcate).

- Dimensiunea **b** a intervalului 2 - 3 fiind paralelă cu suportul forţei F_1, nu va fi braţ pentru aceasta. Asta înseamnă că nu va exista nici un moment egal cu F_1b.

- Dacă variaţia momentelor produse de F_1 sunt liniare, atunci este convenabil să determinăm valoarea momentelor numai la capetele intervalelor şi apoi să le unim cu linie dreaptă.

- Cum intervalul 2 - 3 este paralel cu suportul forţei F_1 dar la o distanţă **a** de acesta, rezultă că pe acest interval, momentul produs de F_1 este constant.

- Mai ştim că în noduri rigide (cum sunt nodurile 2 şi 3), la sistemele plane, momentele se transmit de la o bară la alta.

- Sistemul fiind plan şi neexistând încărcări cupluri (momente) de torsiune, nu va exista nici efort moment de torsiune M_t.

În Fig.3.4.4.1-4, se arată valorile momentelor produse de forța F_1 la capetele fiecărui interval.

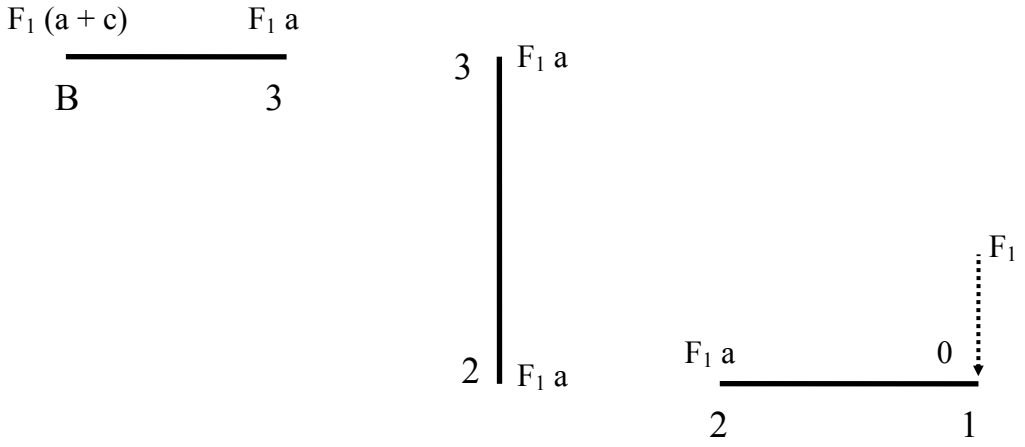


Fig.3.4.4.1-4

Nu ne rămâne acum decât ca aceste momente să fie identificate (sunt de încovoiere sau de torsiune), să fie reprezentate de partea fibrei întinse (cele de încovoiere în Fig.3.4.4.1-4 s-au pus de partea fibrei întinse) şi unite valorile cu linii drepte. Această etapă este parcursă în Fig.3.4.4.1-2c.

Să procedăm la fel şi pentru forța exterioară F_2 (Fig.3.4.4.1-5).
Şi la acest sistem, se pot preciza încă de început, câteva aspecte:

- Pe toate intervalele, momentele au o variație liniară (intervale neîncărcate).

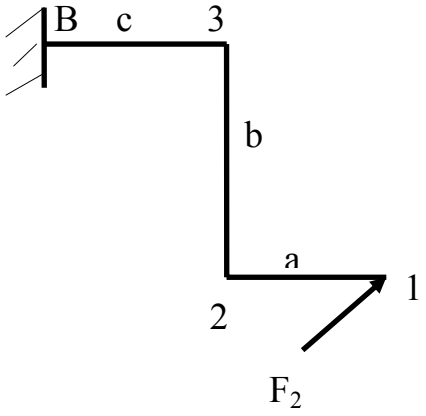


Fig.3.4.4.1-5

- Toate dimensiunile **a**, **b**, **c** sunt perpendiculare pe direcția forței F_2, deci toate sunt brațe pentru F_2, toate vor creea momente cu F_2.

- Cum forța F_2 împinge sistemul dinspre noi înspre partea opusă nouă, rezultă că fibrele întinse ale cadrului sunt situate înspre noi. De această parte vor fi reprezentate şi diagramele M_i.

În Fig.3.4.4.1-6, sunt puse la capetele intervalelor, momentele produse de forța exterioară F_2.

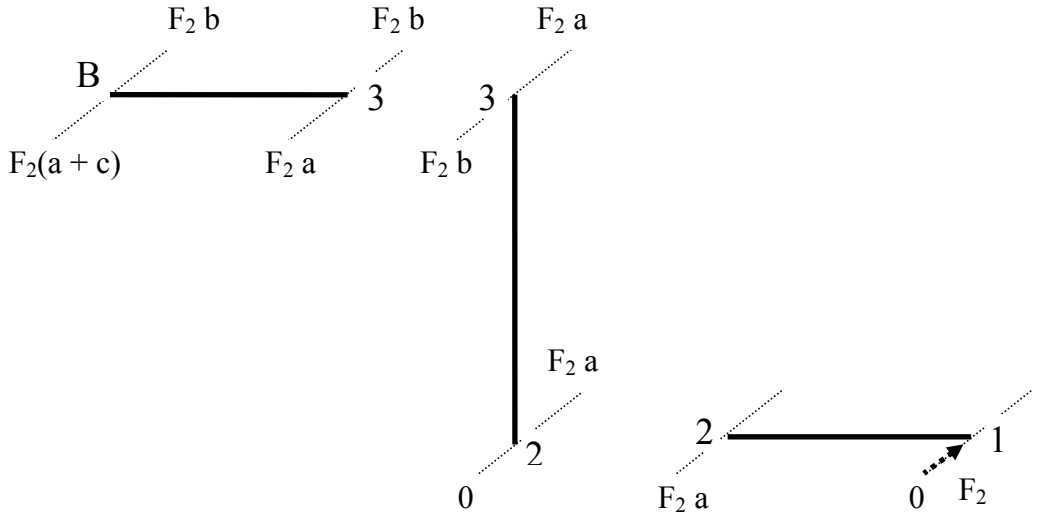


Fig.3.4.4.1-6

Rămâne acum să stabilim natura momentelor şi să le reprezentăm grafic (Fig.3.4.4.1-2d,e).

Intervalul 1 - 2. Momentul $\mathbf{F_2a}$ din secțiunea 2, este moment încovoietor M_i.

Intervalul 2 - 3. Momentul $\mathbf{F_2a}$ din secțiunea 2, este moment de torsiune M_t. În secțiunea 2, nu există moment încovoietor M_i. Momentul $\mathbf{F_2b}$ din secțiunea 3, este moment încovoietor M_i, iar momentul $\mathbf{F_2a}$ din secțiunea 3, este moment de torsiune M_t.

Intervalul 3 - B. Momentul $\mathbf{F_2b}$ din secțiunea 3, este moment de torsiune M_t. Momentul $\mathbf{F_2a}$ din secțiunea 3, este moment încovoietor M_i. Momentul $\mathbf{F_2(a + c)}$ din secțiunea B, este moment încovoietor, iar momentul $\mathbf{F_2b}$ din secțiunea B, este moment de torsiune M_t.

Puse pe diagramă şi unind valorile momentelor de acelaşi tip, au rezultat diagramele de eforturi din Fig.3.4.4.1-2d,e. Se poate constata că momente încovoietoare M_i există în mai multe plane, produse de F_1 şi F_2. Diagrama finală rezultată M_i este prezentată în Fig.3.4.4.1-2f.

Pentru cazul prezentat, diagramele finale de eforturi N, T, M_i, M_t sunt cele reprezentate în Fig.3.4.4.1-2a,b,e,f.

S-a prezentat prin acest exemplu, o metodă simplă de trasare a diagramelor de eforturi pentru sistemele spațiale, care nu necesită sisteme de axe, scrierea funcțiilor de eforturi, etc.

Dacă există intervale cu sarcini uniform distribuite, nu uitați că pe acele intervale, T variază liniar, iar M_i, parabolic. Pe celelalte intervale, efectul sarcinii distribuite este dat de rezultanta sarcinii distribuite (reamintiți-vă valoarea rezultantei şi punctul ei de aplicație).

3.4.4.2 *Pentru bara cotită din Fig.3.4.4.2-1, să se traseze diagramele de eforturi.*

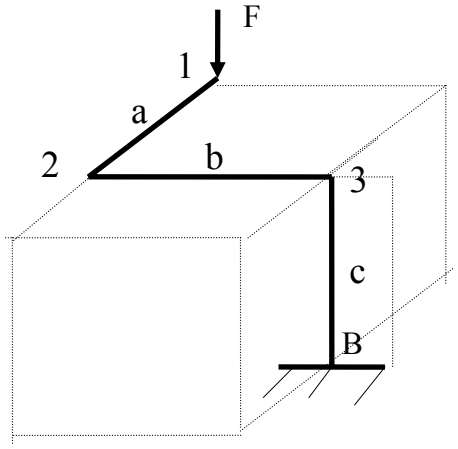


Fig.3.4.4.2-1

Nu calculăm reacțiunea din înțepenire, dar toate intervalele vor fi parcurse dinspre capătul liber spre înțepenire.

Notăm secțiunile caracteristice ale cadrului cu: 1, 2, 3, B (Fig.3.4.4.2-1), rezultând trei intervale: 1 - 2, 2 - 3, 3 - B.

Privind atent sistemul (cadrul şi încărcarea), diagramele eforturilor N şi T se trasează foarte uşor. Toate intervalele sunt neîncărcate (p = 0), de unde rezultă că N şi T sunt constante, iar M (M_i şi M_t) prezintă variație liniară.

Pe intervalele 1 - 2 şi 2 - 3, forța exterioară F produce efort tăietor care acționează în plan vertical (de sus în jos), iar pe intervalul 3 - B, forța F produce efort axial N, de compresiune. Efortul axial N se poate reprezenta în diagramă în orice plan, iar efortul T îl reprezentăm în planul forței F, adică în plan vertical, deasupra barei (pentru a fi de aceeaşi parte pe bară cu forța F).

Diagramele N şi T, sunt prezentate în Fig.3.4.4.2-2a, respectiv Fig.3.4.4.2-2b.

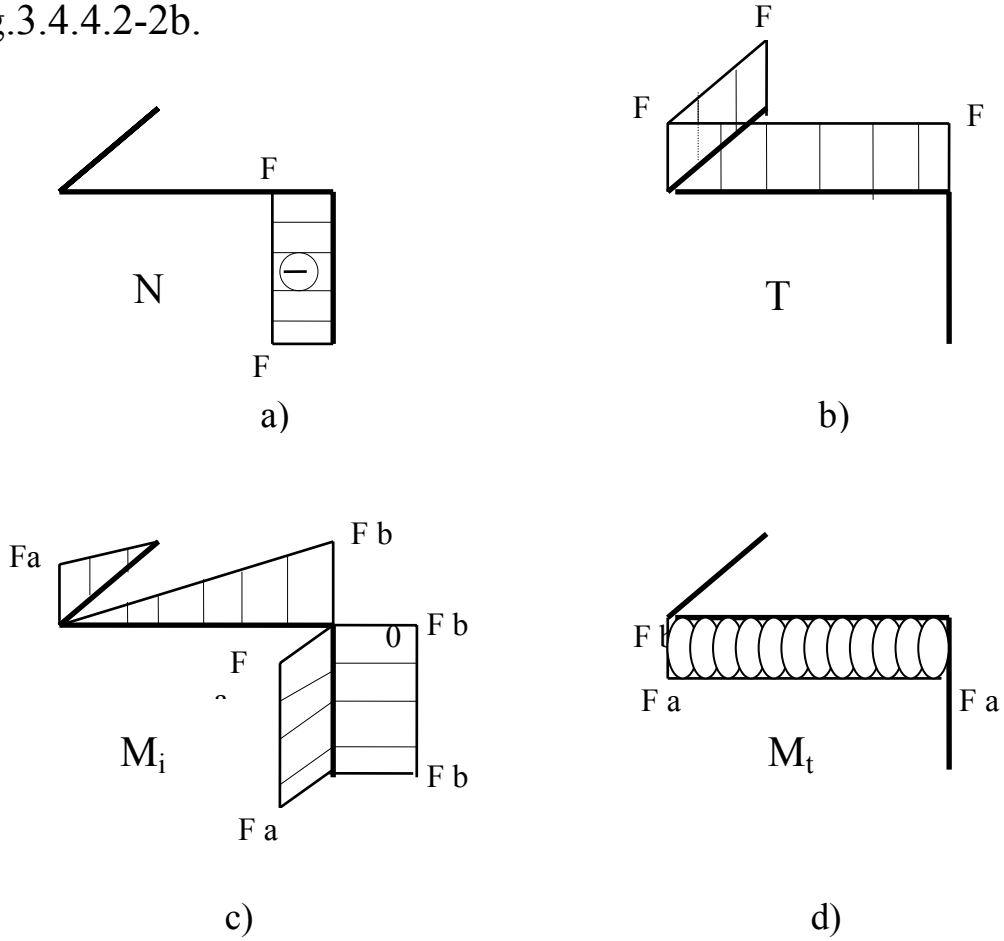


Fig.3.4.4.2-2

În diagrama N punem semn, iar în diagrama T nu mai punem semn.

Să calculăm şi să trasăm acum diagramele de momente (încovoietoare M_i şi de torsiune M_t), diagrame care se obțin ceva mai greu.

Utilizăm aceeaşi metodă ca la exemplul precedent. Separăm cele trei intervale (Fig.3.4.4.2-3) şi calculăm valoarea momentelor la capetele fiecărui interval. Să ne reamintim că, într-o secțiune (nu contează la care interval aparține), eforturile M sunt aceleaşi, dar de la un interval la altul pot fi de natură diferită ($M_i \rightarrow M_t$ sau $M_t \rightarrow M_i$).

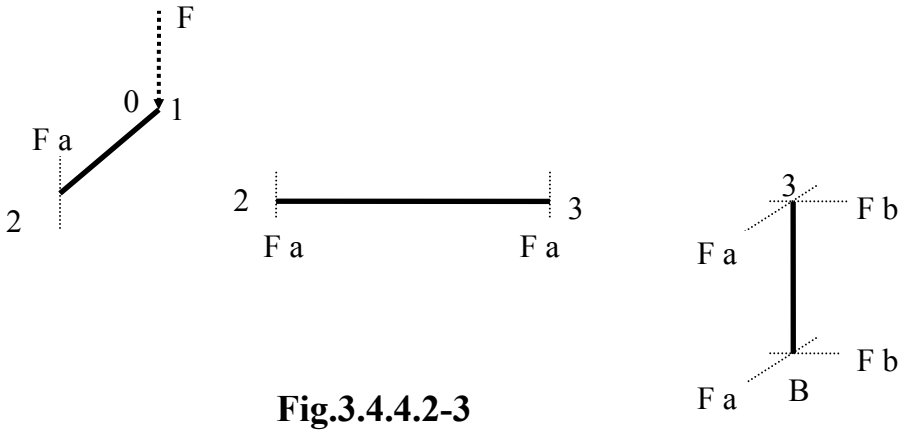


Fig.3.4.4.2-3

Se poate constata că dimensiunile **a** şi **b** ale primelor două intervale, sunt perpendiculare pe suportul forţei **F** şi ca urmare aceste dimensiuni sunt braţe pentru forţa **F**; ele creează momente împreună cu forţa **F**. Dimensiunea **c** a celui de-al treilea interval (3 - B), este paralelă cu direcţia forţei **F**, ceea ce înseamnă că dimensiunea **c** nu va fi braţ pentru **F** şi ca urmare nu există nici un moment dat de **F** cu **c**.

Aşadar, să începem cu ,

Intervalul (1 - 2).

În secţiunea 1, $M_1 = 0$.

În secţiunea 2, $M_2 = F\ a$.

Valorile momentelor pentru acest interval, sunt trecute în Fig.3.4.4.2-3 la capetele intervalului. Rămâne să stabilim natura acestora. $\mathbf{M_2 = Fa}$ este moment încovoietor (este perpendicular pe planul format de **F** şi braţul **b**). Variaţia lui $M_{1\text{-}2}$ este liniară, fibra întinsă fiind deasupra. Diagrama aceasta este reprezentată în Fig.3.4.4.2-2c.

Intervalul (2 - 3).

În secţiunea 2 a intervalului 2 - 3, există acelaşi moment $\mathbf{M_2 = Fa}$ care a existat şi în secţiunea 2 a intervalului 1 - 2. Momentul $\mathbf{M_2 = Fa}$ este scris la capătul intervalului 2 - 3 (Fig.3.4.4.2-3). Acest moment este un moment de torsiune (este orientat în lungul barei 2 - 3). În secţiunea 3 a intervalului 2 - 3, forţa **F** creează două momente (pentru a ajunge în secţiunea 3, trebuie parcurse braţele **a** şi **b**): $\mathbf{M_{1,3} = Fa}$ şi $\mathbf{M_{2,3} = Fb}$. Momentele $M_{1,3}$ şi $M_{2,3}$ sunt puse în secţiunea 3 a intervalului 2 - 3 (Fig.3.4.4.2-3). Momentul $\mathbf{M_{1,3} = Fa}$ este un moment

de torsiune, iar $\mathbf{M_{2,3}} = \mathbf{Fb}$ moment încovoietor, fibra întinsă fiind deasupra barei. De remarcat că în secțiunea 2 a intervalului 2 - 3, nu există moment încovoietor şi momentul $\mathbf{M_2} = \mathbf{Fa}$ (încovoietor) din secțiunea 2 a intervalului 1 - 2, devine moment de torsiune în aceeaşi secțiune 2, dar a intervalului 2 - 3. Valorile momentelor determinate pentru intervalul 2 - 3, sunt trecute în diagrama din Fig.3.4.4.2-2c, respectiv Fig.3.4.4.2-2d şi apoi aceste valori sunt unite prin linie dreaptă (variație liniară). Diagrama M_t rezultată, poate fi reprezentată în orice plan.

Intervalul (3 - B).

În secțiunea 3 a intervalului 3 - B există aceleaşi momente care au existat şi în secțiunea 3 a intervalului 2 - 3. Acestea sunt trecute în secțiunea 3 a intervalului 3 - B (Fig.3.4.4.2-3). Pentru a ajunge la secțiunea B, trebuie parcurse de la forța **F** (secțiunea 1) dimensiunile **a**, **b** şi **c**. Aşa cum s-a mai spus ceva mai devreme, dimensiunea **c** nu formează moment cu forța **F**. Rezultă că în secțiunea B nu apar momente suplimentare față de cele din secțiunea 3. În secțiunea B, există atunci numai momentele, $\mathbf{M_{1,B}} = \mathbf{Fa}$ şi $\mathbf{M_{2,B}} = \mathbf{Fb}$. Ele sunt trecute în secțiunea B în Fig.3.4.4.2-3. Atât $M_{1,B}$ cât şi $M_{2,B}$ sunt momente încovoietoare. Momentul încovoietor $\mathbf{M_{1,3}} = \mathbf{M_{1,B}} = \mathbf{Fa}$, din secțiunile 3 şi B, apleacă intervalul 3 - B dinspre noi înspre planul din spate, întinzând fibrele situate înspre noi. În Fig.3.4.4.2-2c punem valorile acestui moment la capetele intervalului de partea fibrei întinse şi unim aceste valori printr-o linie dreaptă, rezultând o variație liniară constantă (vezi Fig.3.4.4.2-2c).

Momentul încovoietor $\mathbf{M_{2,3}} = \mathbf{M_{2,B}} = \mathbf{Fb}$ din ambele secțiuni (3 şi B ale intervalului 3 - B), apleacă bara 3 - B spre stânga (în planul barelor 2 - 3 şi 3 - B) întinzând fibrele din partea dreaptă. În Fig.3.4.4.2-3 punem valorile acestui moment la capetele intervalului 3 - B de partea fibrei întinse (în partea dreaptă). Unim cu linie dreaptă valorile de la capătul intervalului 3 - B şi obținem diagrama din Fig.3.4.4.2-2c (variație liniară constantă).

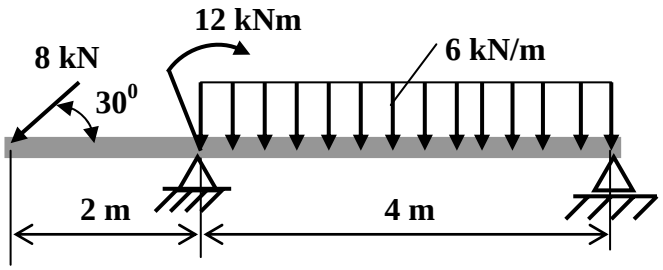
Am parcurs astfel întreaga bară cotită (din capătul liber până la înțepenire), rezultând diagramele de eforturi, prezentate în Fig.3.4.4.2-2.

După cele două exemple prezentate (3.4.4.1 şi 3.4.4.2), consider că puteți aborda cu curaj şi încredere orice sistem spațial în vederea trasării diagramelor de eforturi (vezi Cap.3E).

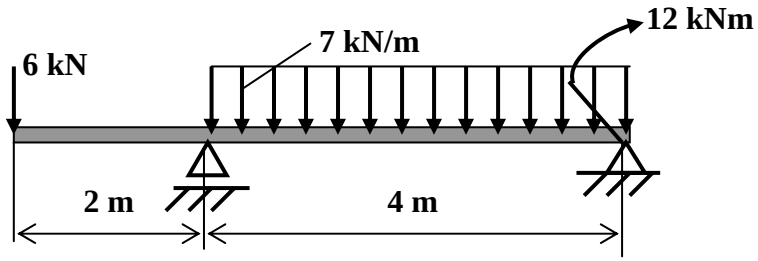
3E. Diagrame de eforturi (Probleme propuse)

Pentru sistemele următoare să se traseze diagramele de eforturi:

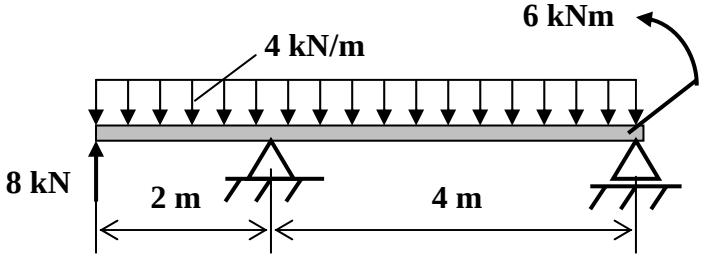
3E.1



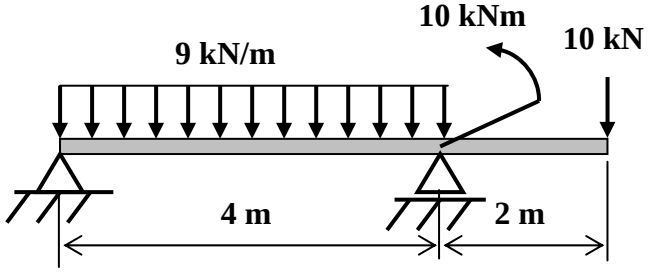
3E.2



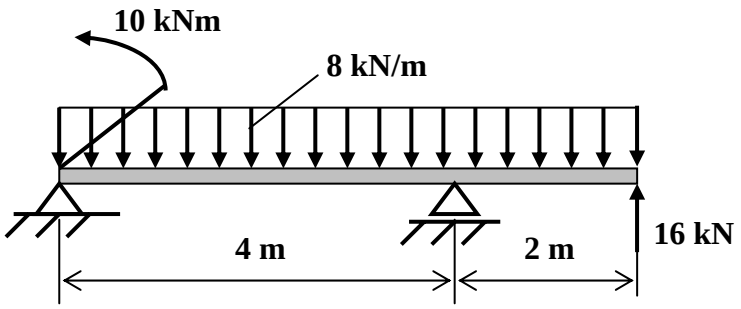
3E.3



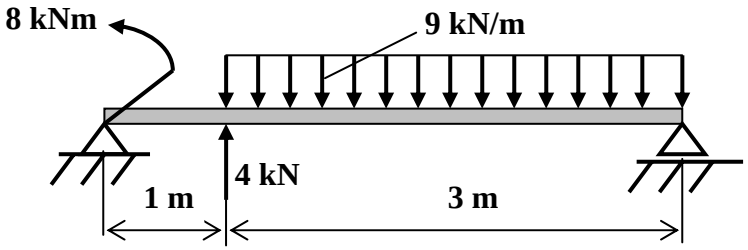
3E.4



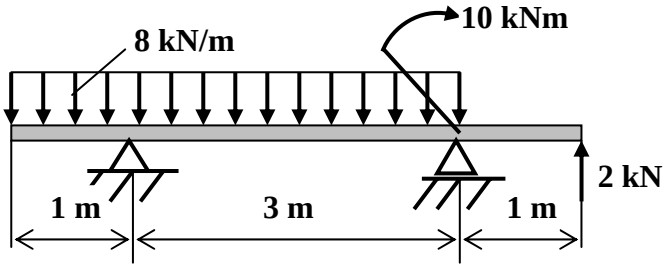
3E.5



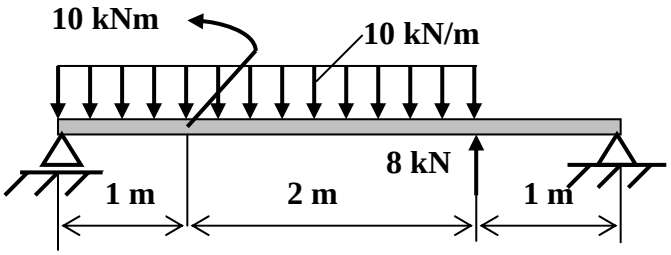
3E.6



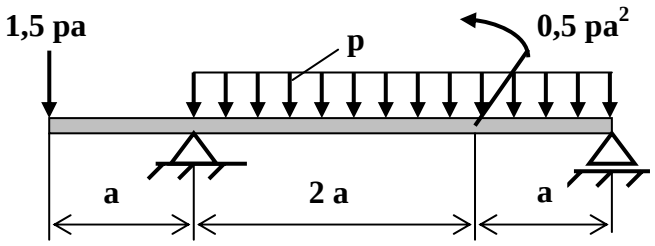
3E.7



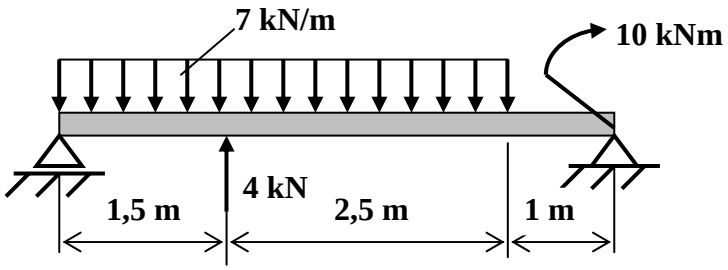
3E.8



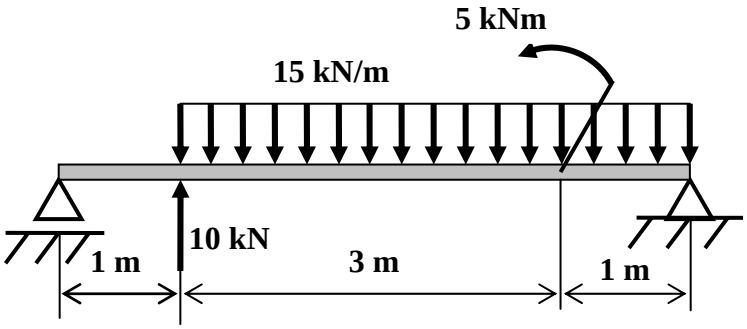
3E.9



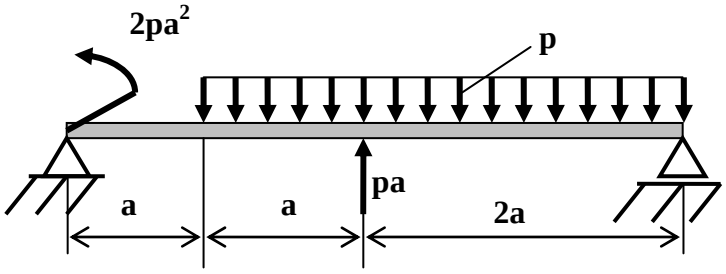
3E.10



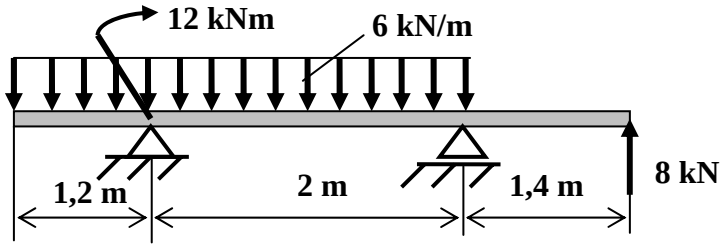
3E.11



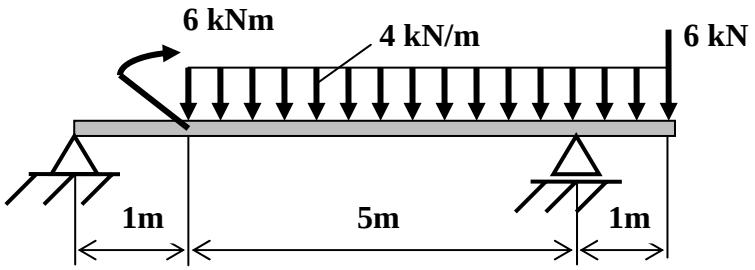
3E.12



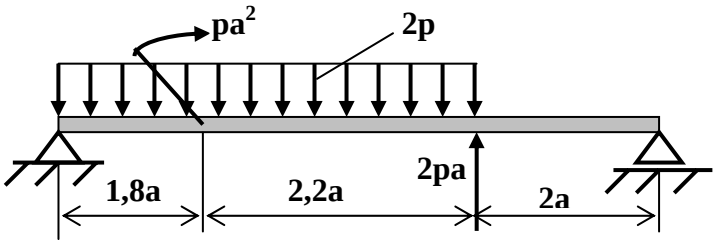
3E.13



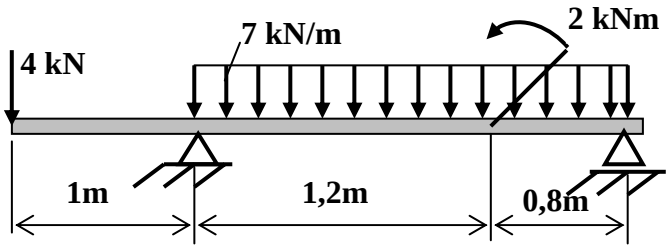
3E.14



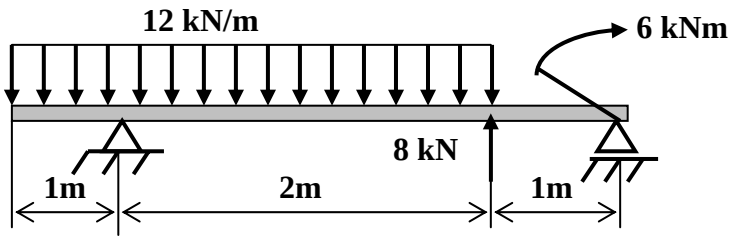
3E.15



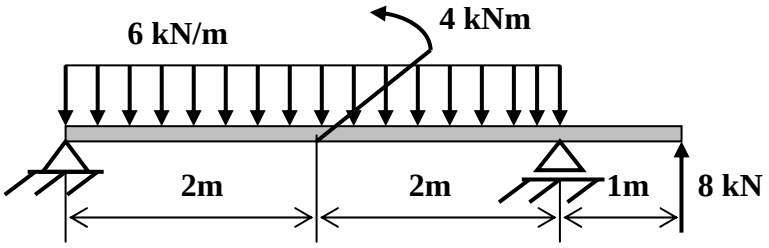
3E.16



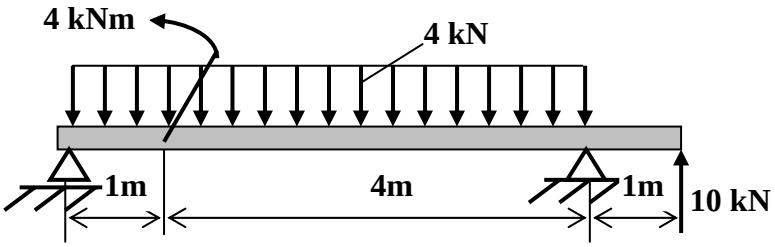
3E.17



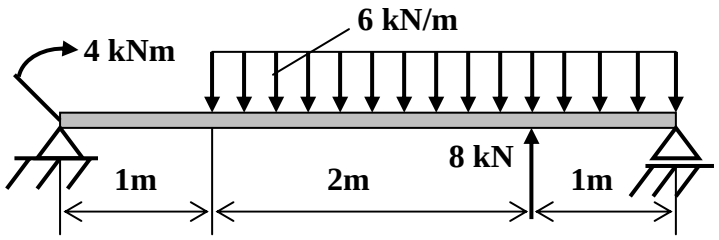
3E.18



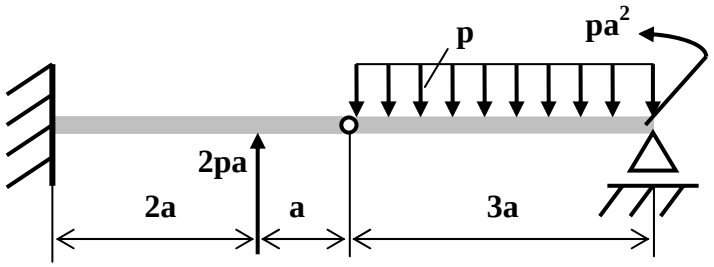
3E.19



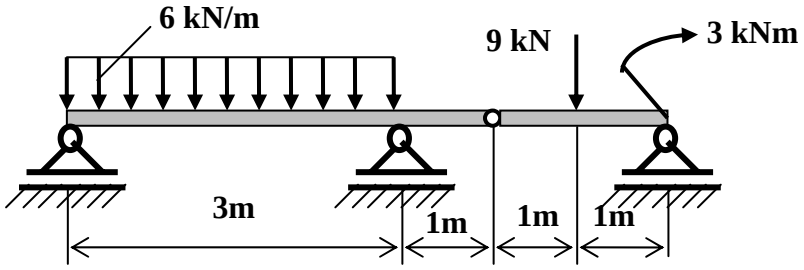
3E.20



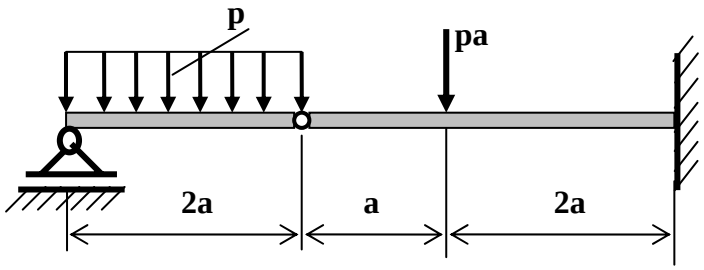
3E.21



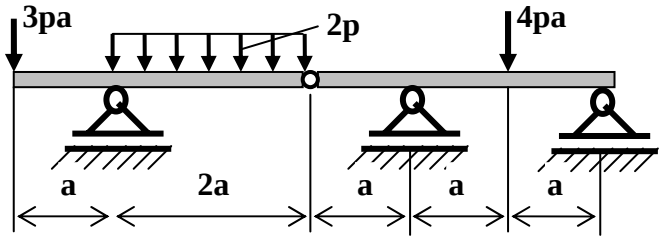
3E.22



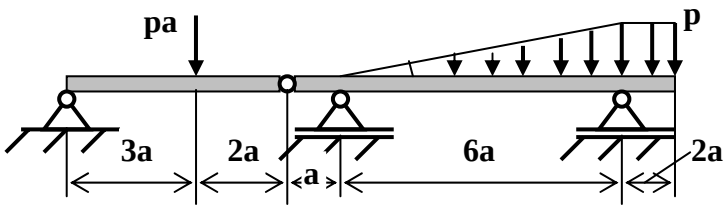
3E.23



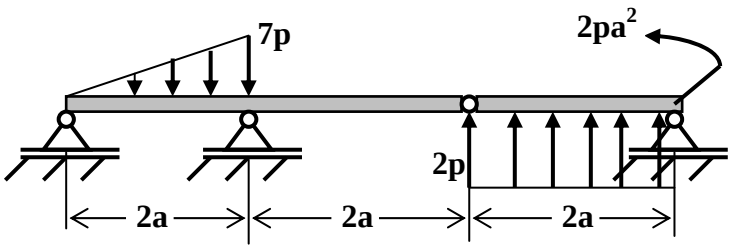
3E.24



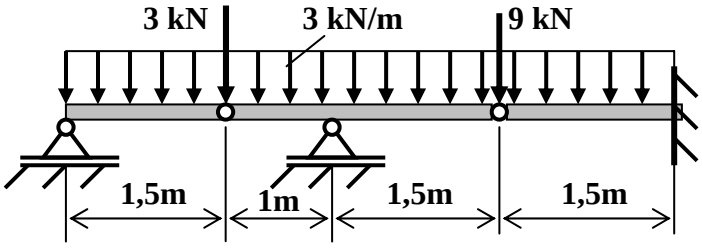
3E.25



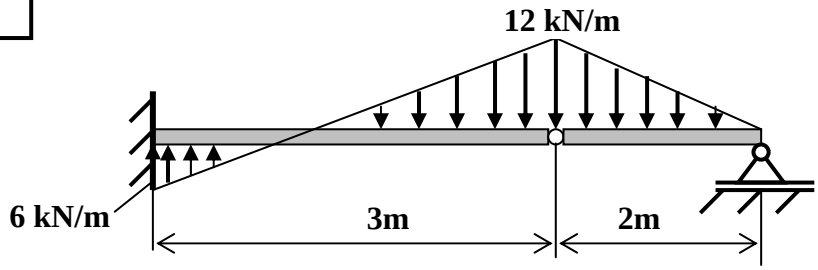
3E.26



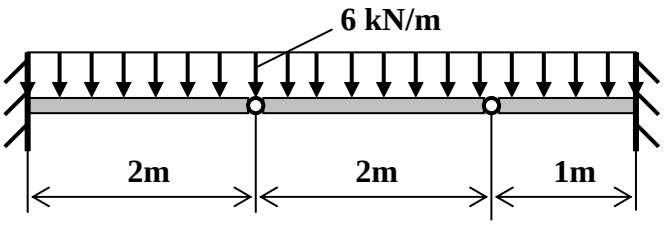
3E.27



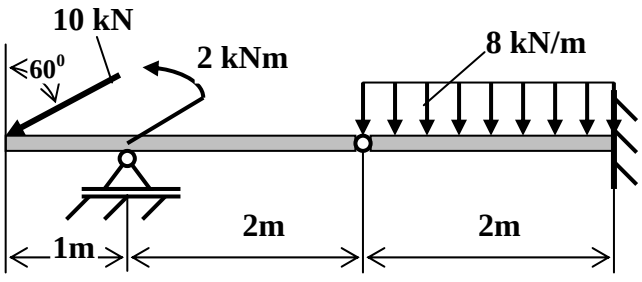
3E.28



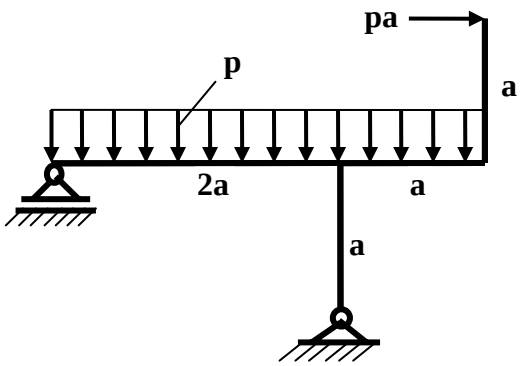
3E.29



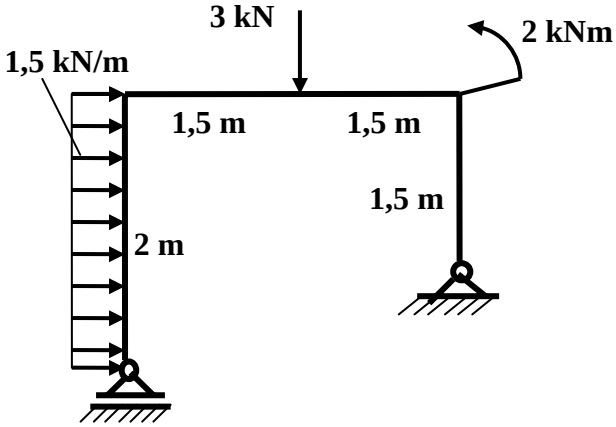
3E.30



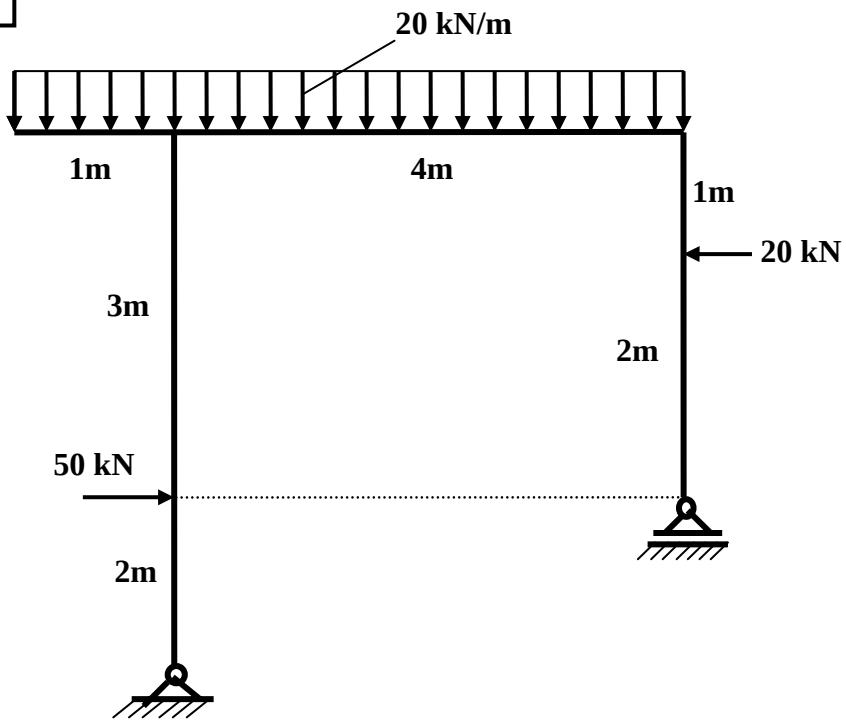
3E.31



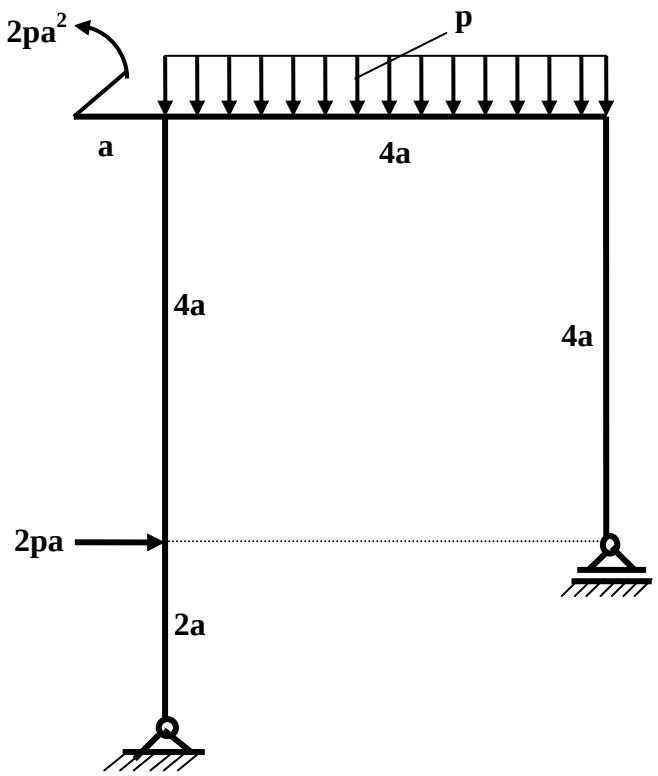
3E.32



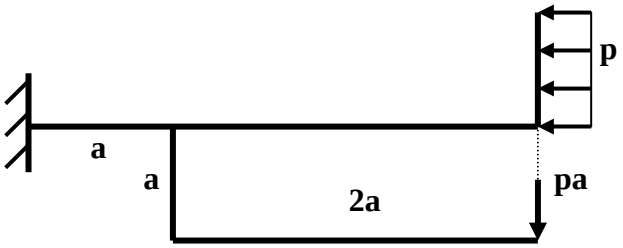
3E.33



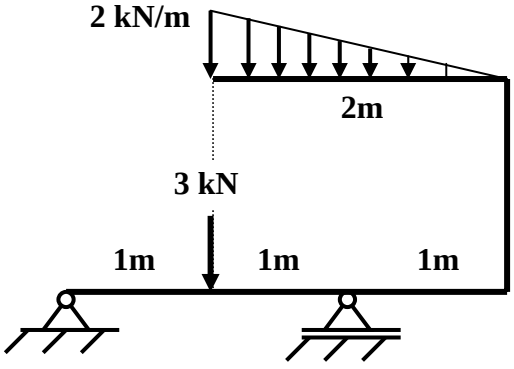
3E.34



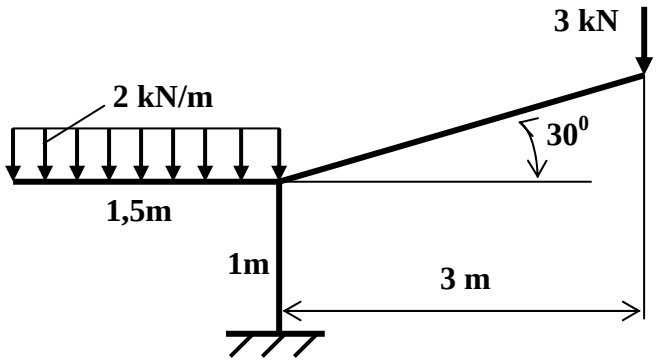
3E.35



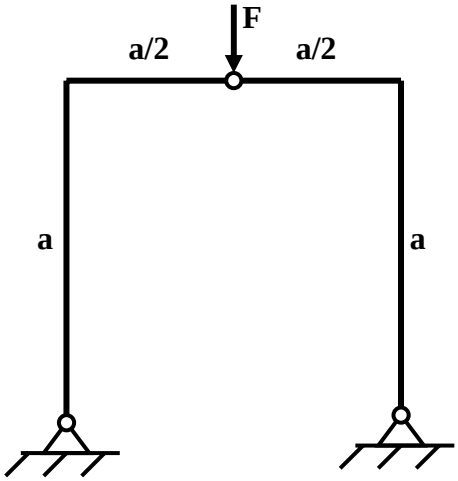
3E.36



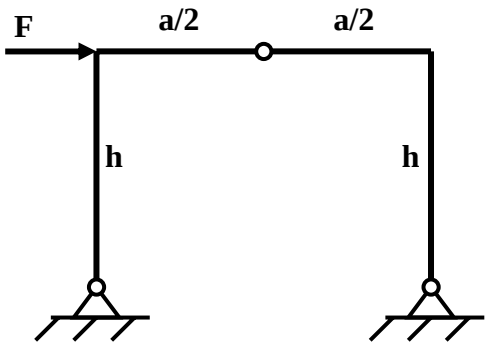
3E.37



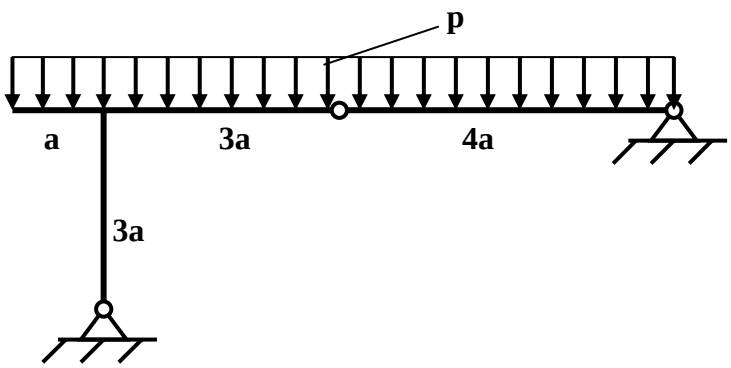
3E.38



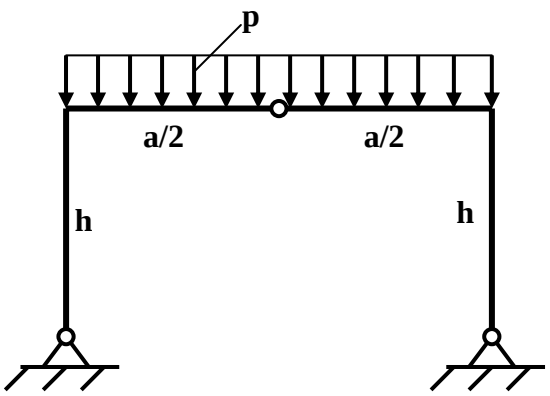
3E.39



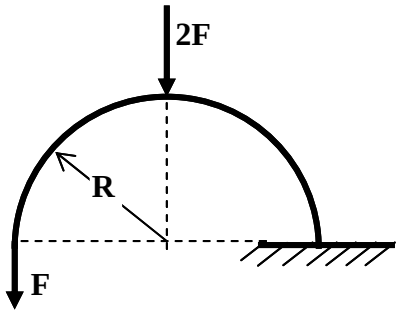
3E.40



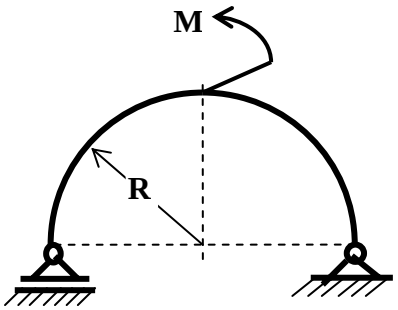
3E.41



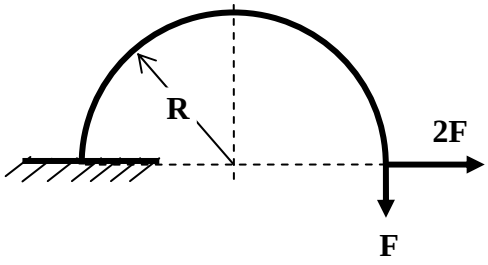
3E.42



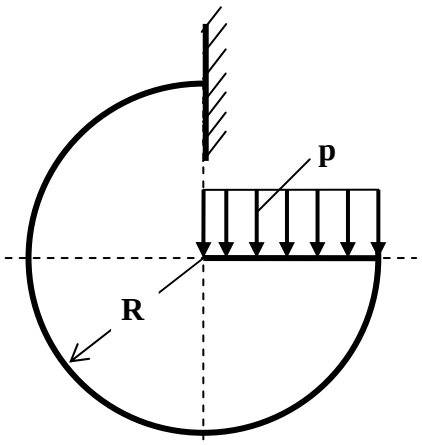
3E.43



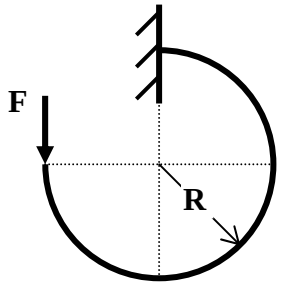
3E.44



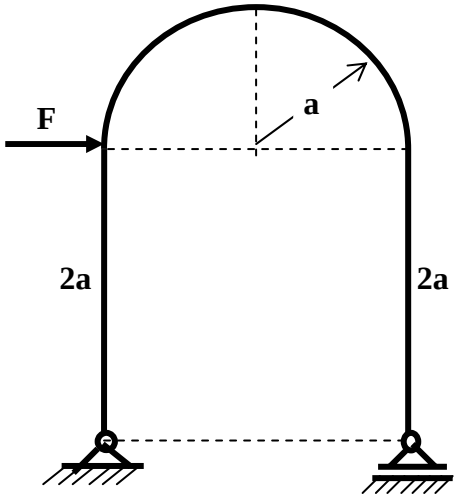
3E.45



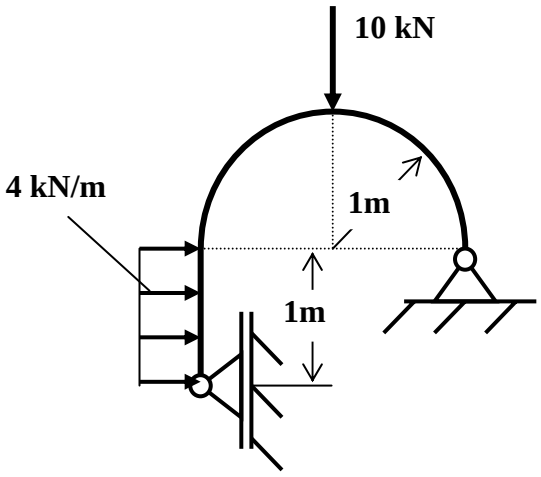
3E.46



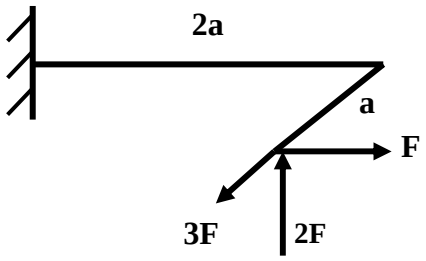
3E.47



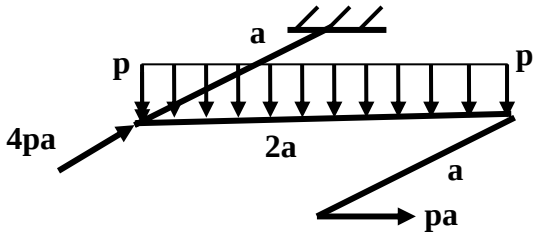
3E.48



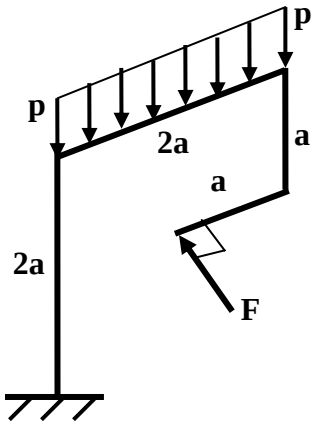
3E.49



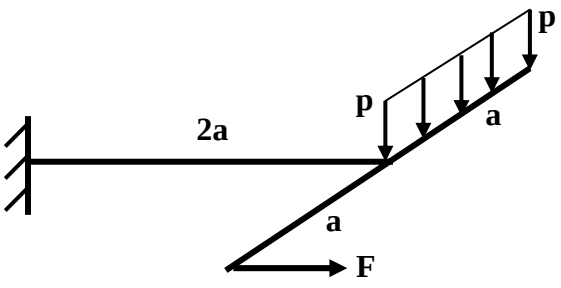
3E.50



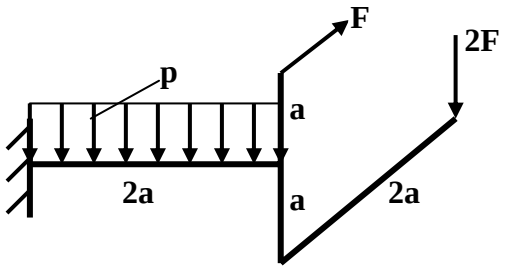
3E.51



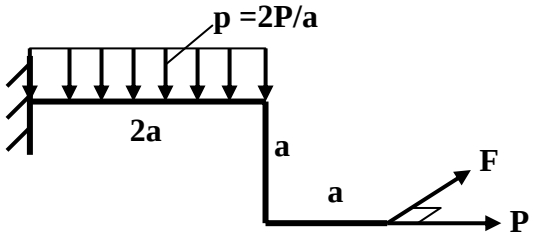
3E.52



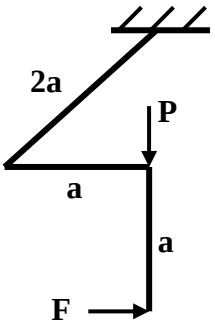
3E.53



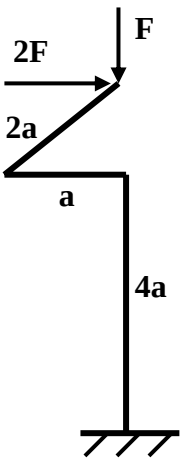
3E.54



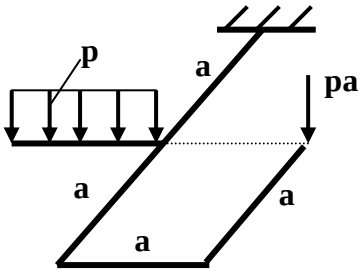
3E.55



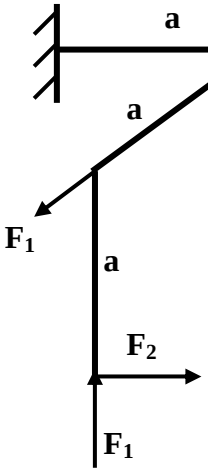
3E.56



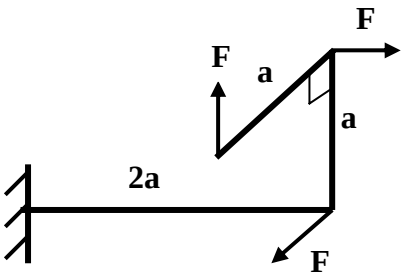
3E.57



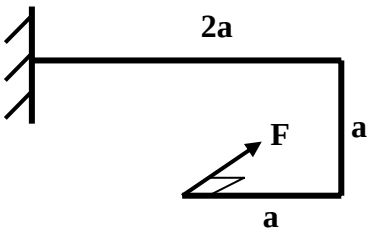
3E.58



3E.59

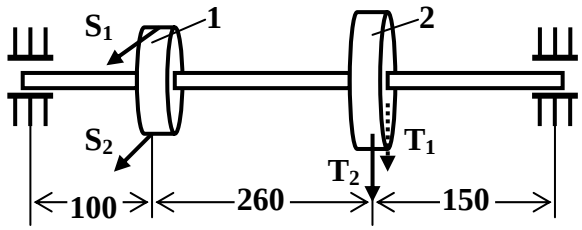


3E.60



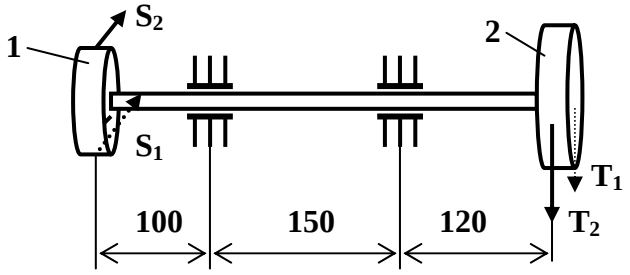
3E.61

P = 20 kW, n = 100 rot/min, $S_1 = 2S_2$, $T_1 = 2T_2$, D_1= 400 mm, D_2 = 600 mm.



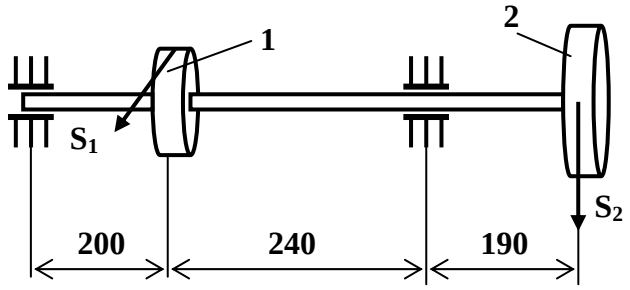
3E.62

P = 12 kW, n = 110 rot/min, $S_1 = 2S_2$, $T_1 = 2T_2$, D_1 = 500 mm, D_2 = 700 mm.



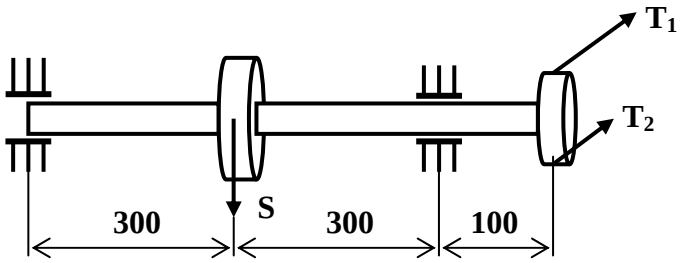
3E.63

P = 16 kW, n = 90 rot/min, D_1 = 600 mm, D_2 = 900 mm.



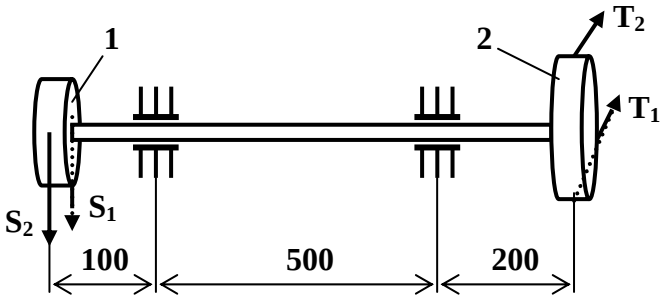
3E.64

P = 50 kW, n = 150 rot/min, D_1 = 600 mm, D_2 = 400 mm, $T_1 = 3T_2$



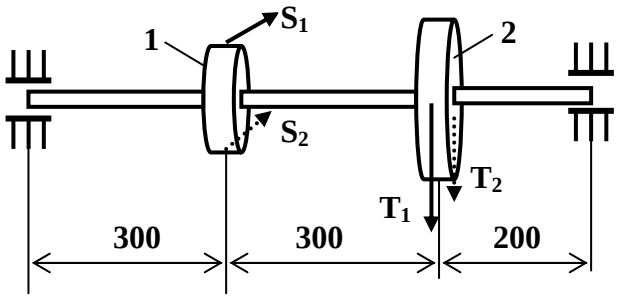
3E.65

P = 70 kW, n = 300 rot/min, D_1 = 400 mm, D_2 = 600 mm, $S_1 = 3S_2$, $T_1 = 2T_2$



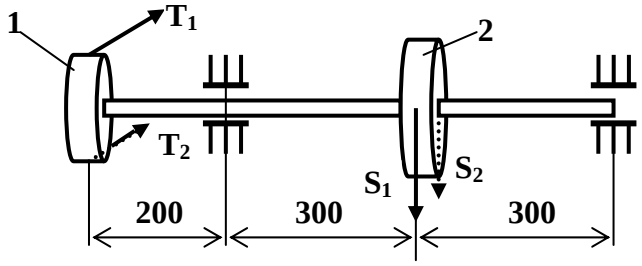
3E.66

P = 40 kW, n = 100 rot/min, D_1 = 400 mm, D_2 = 600 mm, $S_1 = 3S_2$, $T_1 = 2T_2$



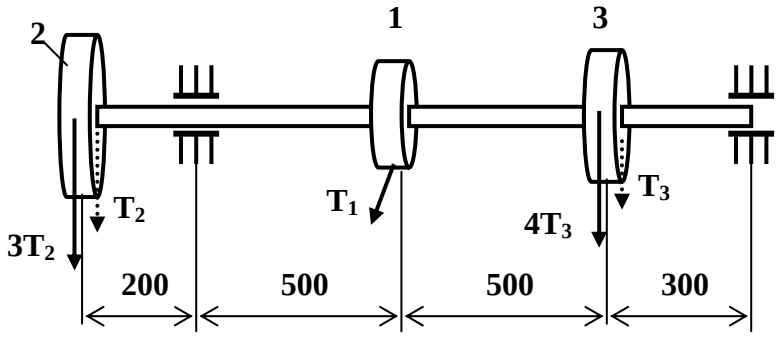
3E.67

P = 60 kW, n = 200 rot/min, D_1 = 400 mm, D_2 = 600 mm, $S_1 = 2S_2$, $T_1 = 3T_2$.



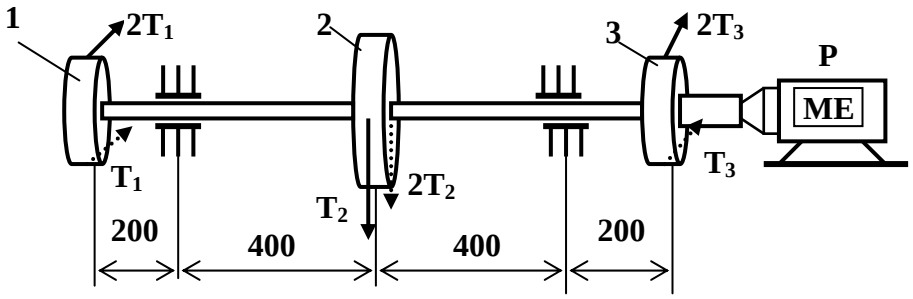
3E.68

P_1 = 80 kW, P_2 = 30 kW, P_3 = 50 kW, n = 400 rot/min, D_1 = 320 mm, D_2 = 480 mm, D_3 = 4000 mm.



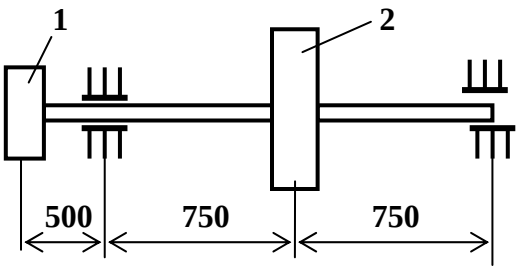
3E.69

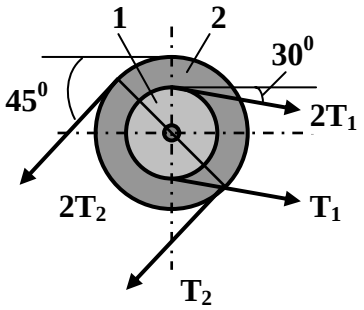
P = 40 CP, n = 750 rot/min, P_1 = 6 CP, P_2 = 18 CP, P_3 = 16 CP, D_1 = 400 mm, D_2 = 800 mm, D_3 = 400 mm, G_1 = 80 daN, G_2 = 200 daN, G_3 = 80 daN.



3E.70

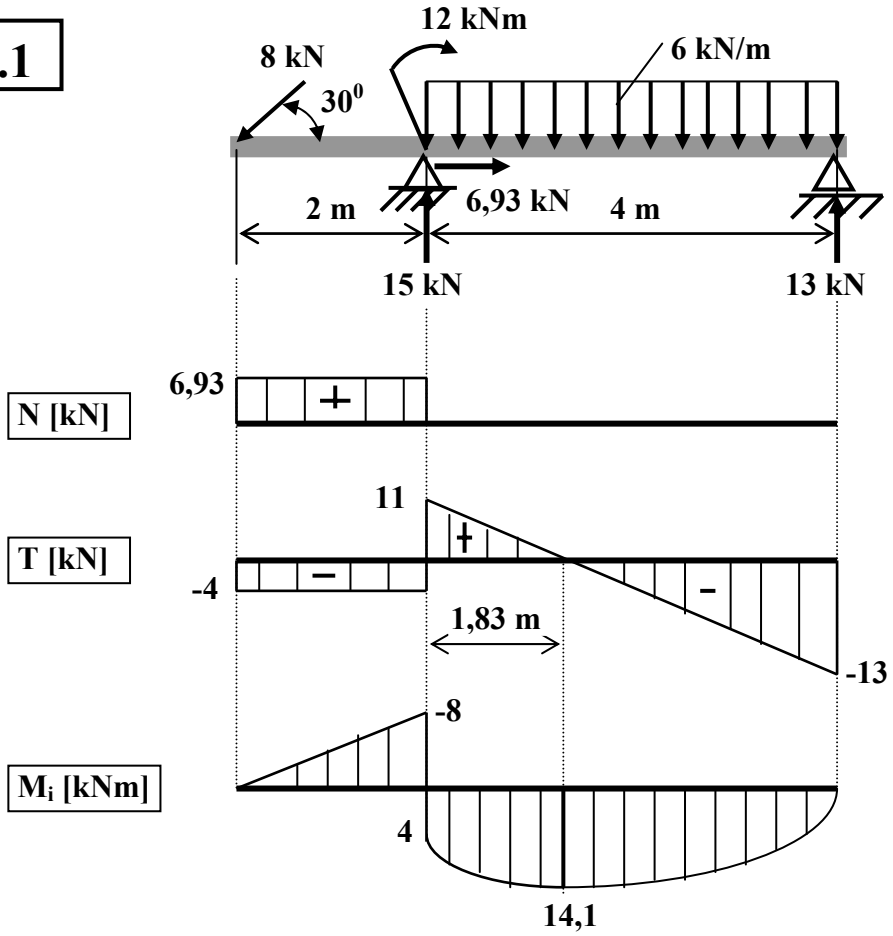
$P_1 = P_2 = 100$ CP, n = 200 rot/min, $D_1 = 800$ mm, $D_2 = 1.000$ mm, $G_1 = 60$ daN, $G_2 = 120$ daN.



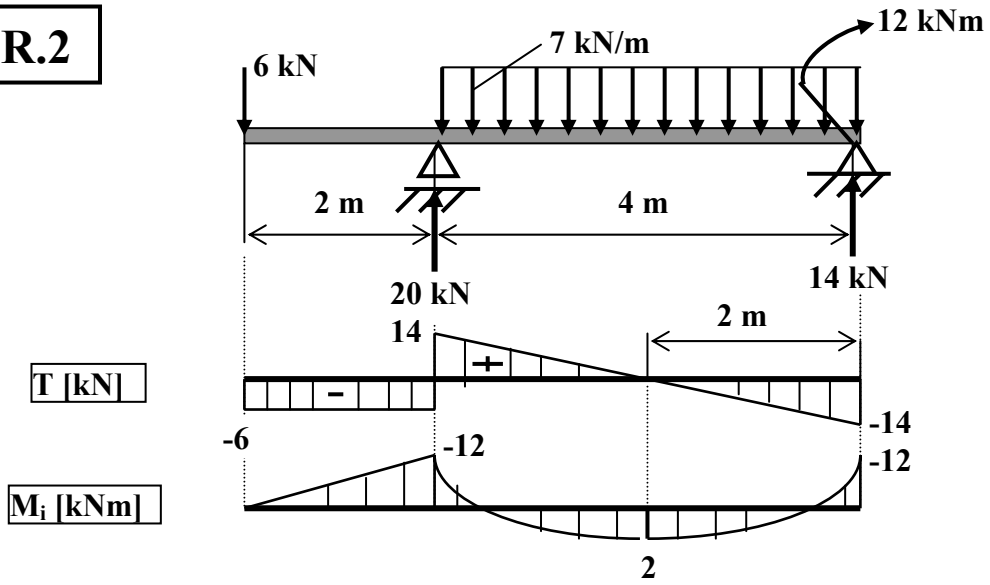


3R. Diagrame de eforturi (Răspunsuri)

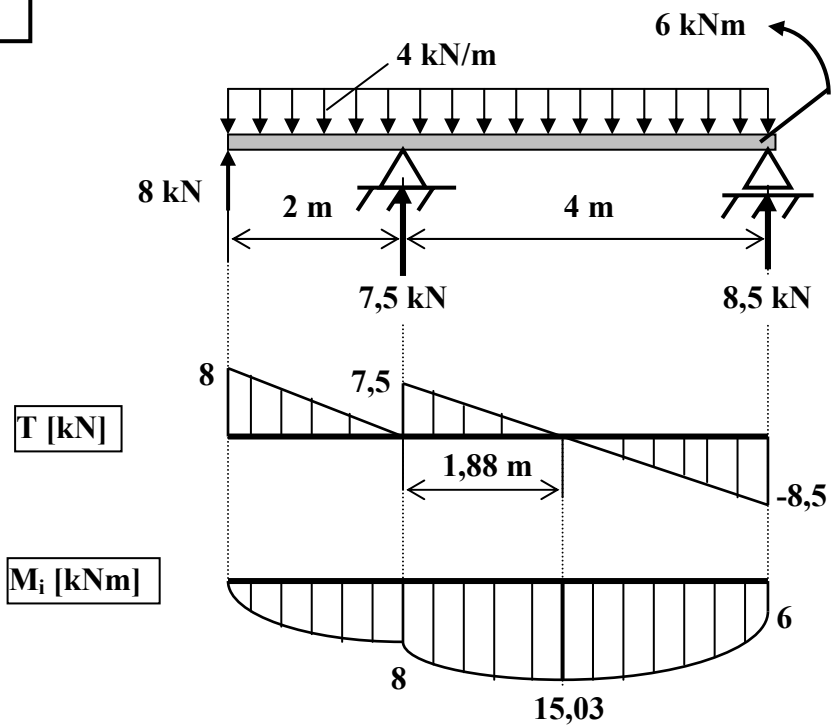
3R.1



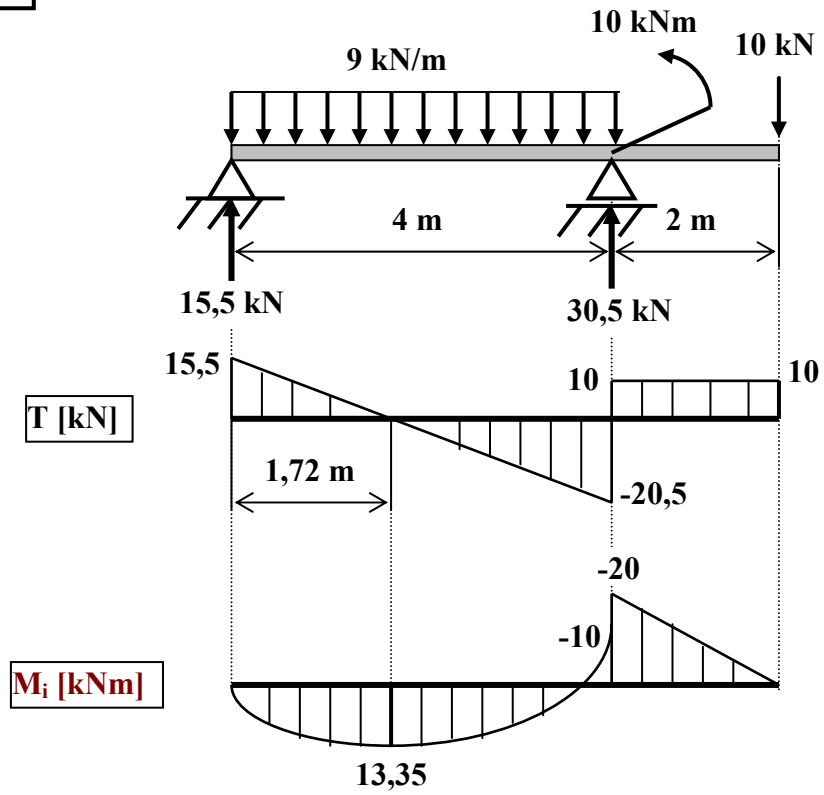
3R.2



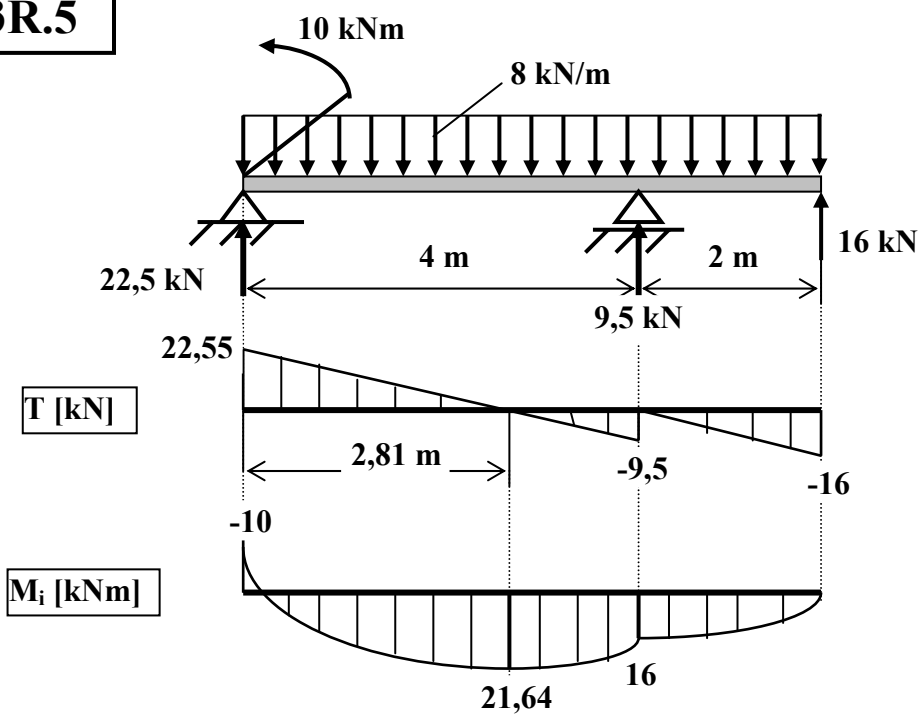
3R.3


6 kNm
4 kN/m
8 kN
2 m
4 m
7,5 kN
8,5 kN
8
7,5
T [kN]
1,88 m
-8,5
Mi [kNm]
6
8
15,03

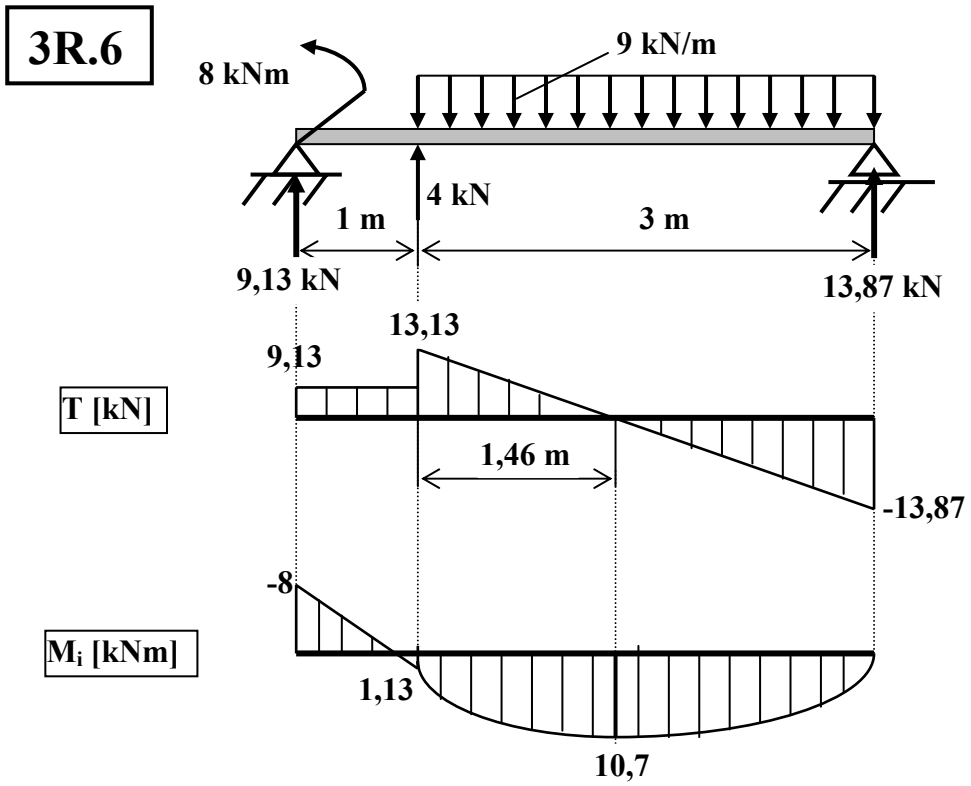
3R.4


10 kNm
10 kN
9 kN/m
4 m
2 m
15,5 kN
30,5 kN
15,5
10
10
T [kN]
1,72 m
-20,5
-20
-10
Mi [kNm]
13,35

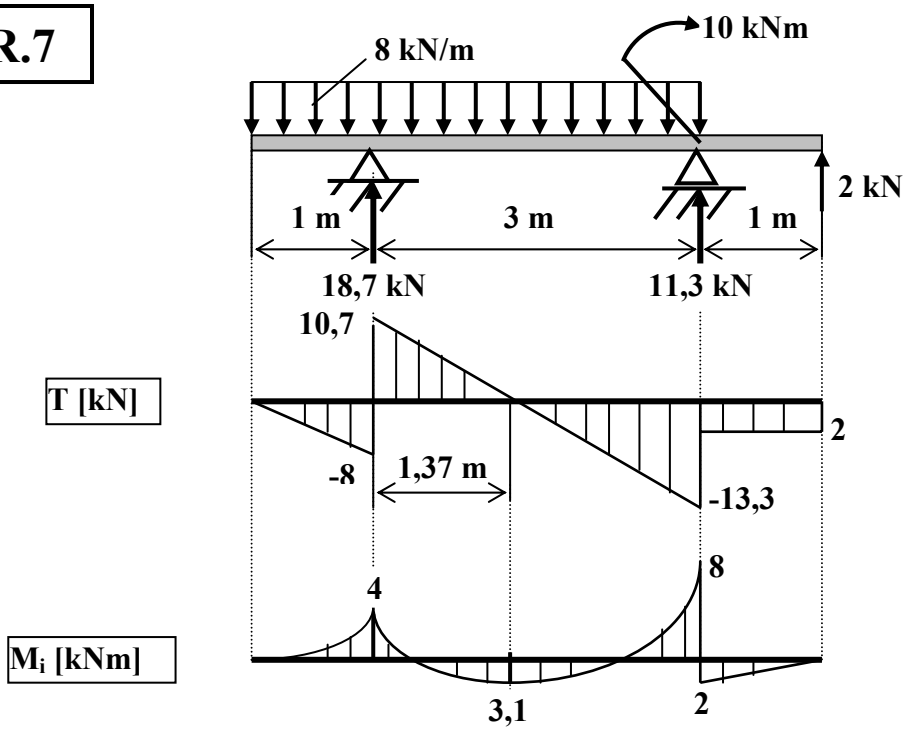
3R.5


10 kNm
8 kN/m
16 kN
22,5 kN
4 m
2 m
9,5 kN
22,55
T [kN]
2,81 m
-9,5
-16
-10
Mi [kNm]
16
21,64

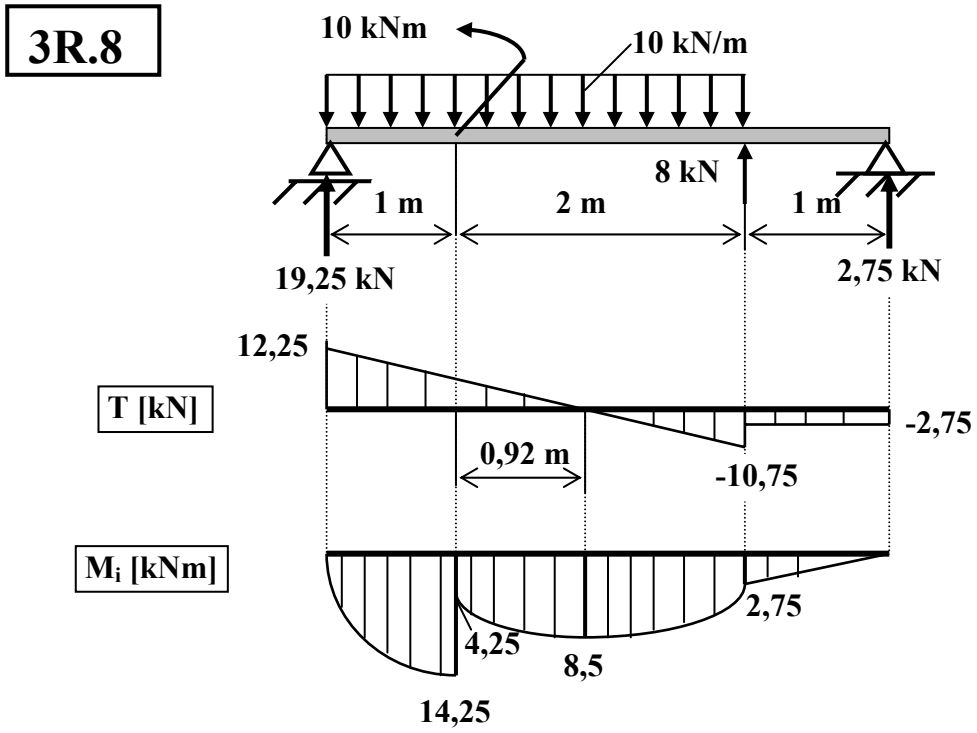
3R.6


9 kN/m
8 kNm
4 kN
1 m
3 m
9,13 kN
13,87 kN
13,13
9,13
T [kN]
1,46 m
-13,87
-8
Mi [kNm]
1,13
10,7

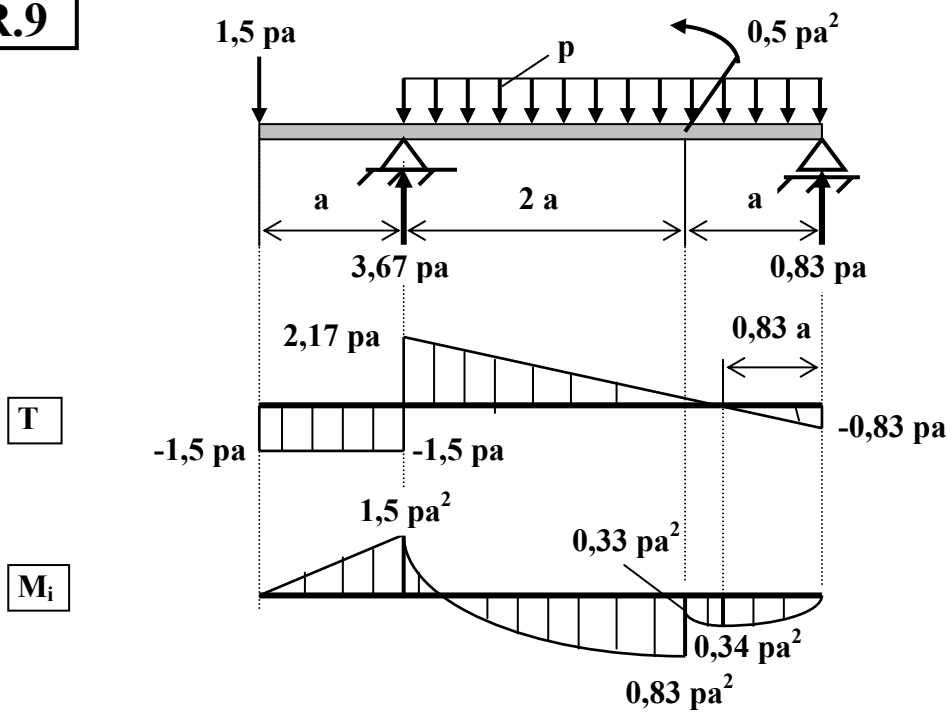
3R.7


8 kN/m
10 kNm
2 kN
1 m
3 m
1 m
18,7 kN
11,3 kN
10,7
T [kN]
2
-8
1,37 m
-13,3
8
4
Mi [kNm]
3,1
2

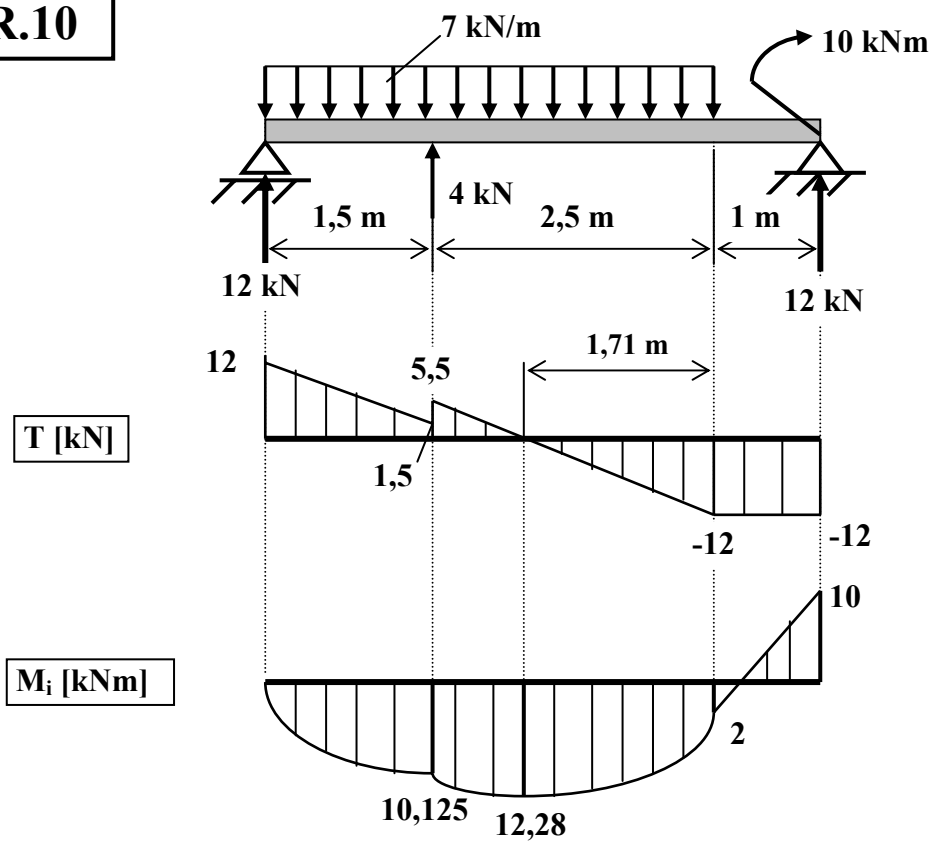
3R.8


10 kNm
10 kN/m
8 kN
1 m
2 m
1 m
19,25 kN
2,75 kN
12,25
T [kN]
-2,75
0,92 m
-10,75
Mi [kNm]
2,75
4,25
8,5
14,25

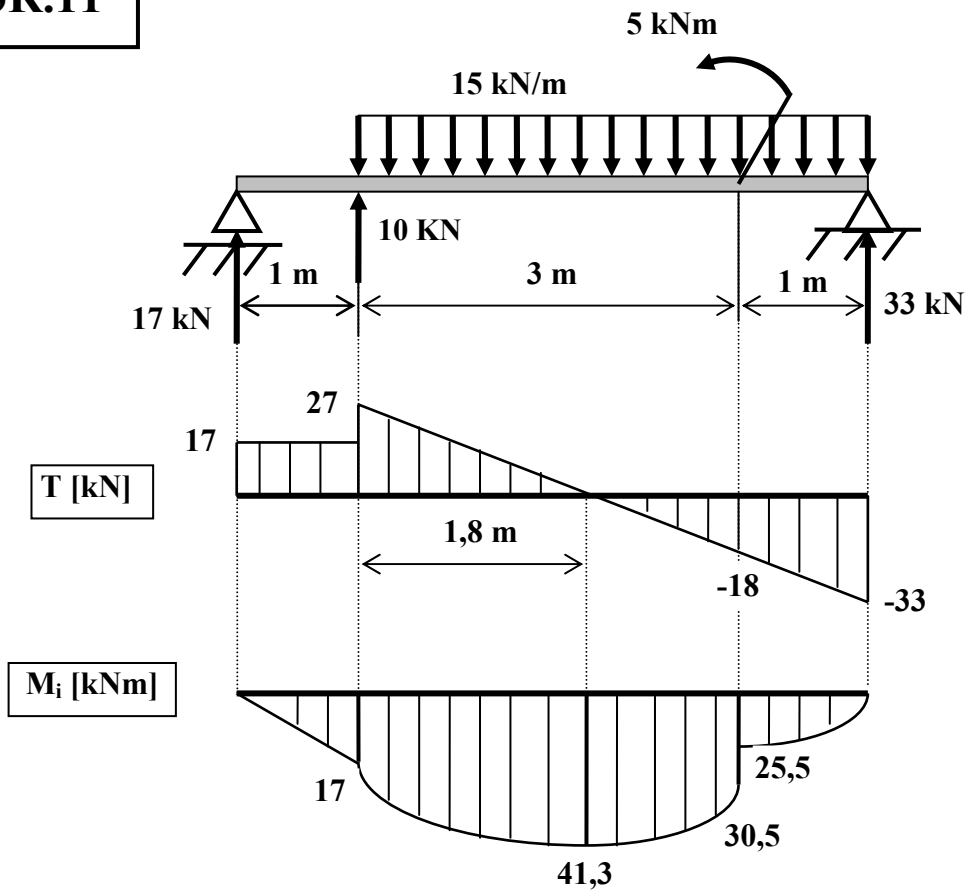
3R.9


1,5 pa
p
0,5 pa²
a
2 a
a
3,67 pa
0,83 pa
2,17 pa
0,83 a
T
-1,5 pa
-1,5 pa
-0,83 pa
1,5 pa²
0,33 pa²
Mi
0,34 pa²
0,83 pa²

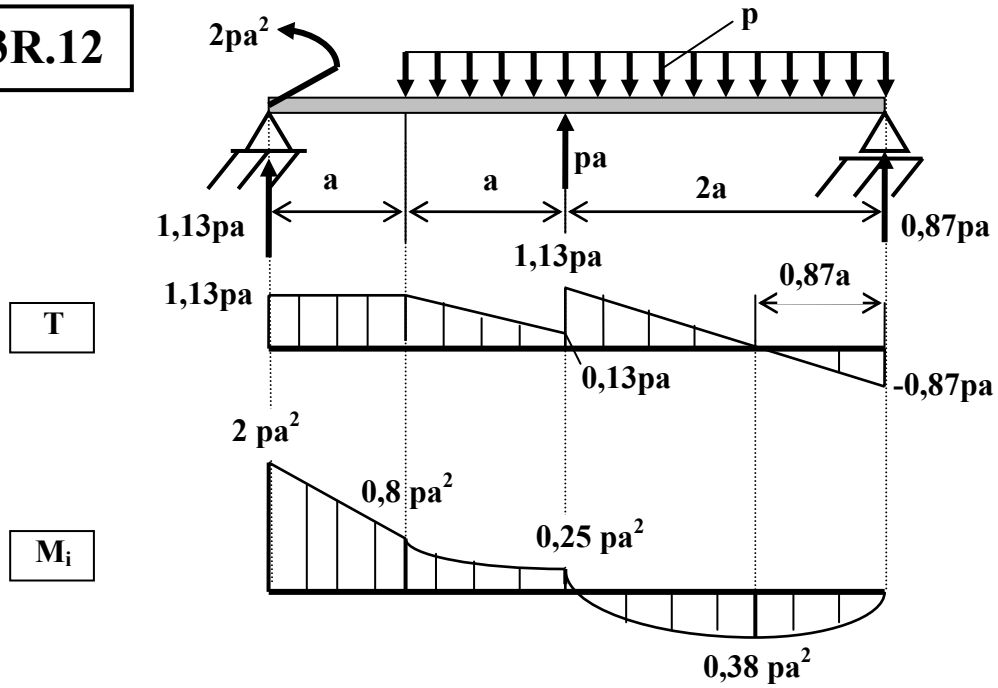
3R.10


7 kN/m
10 kNm
4 kN
1,5 m
2,5 m
1 m
12 kN
12 kN
12
5,5
1,71 m
T [kN]
1,5
-12
-12
10
Mi [kNm]
2
10,125
12,28

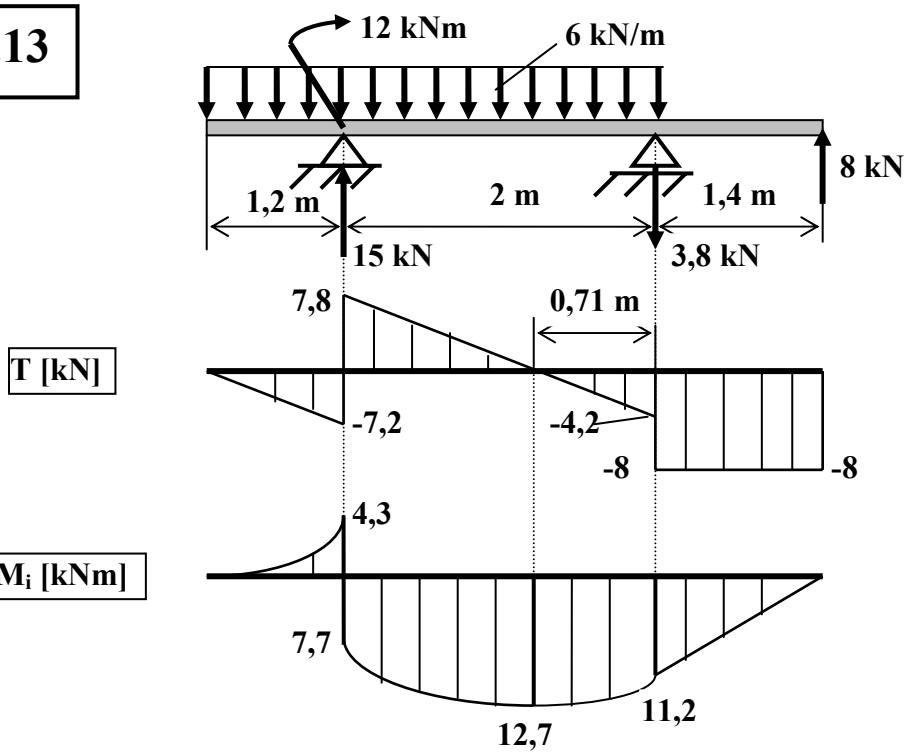
3R.11


5 kNm
15 kN/m
10 KN
1 m
3 m
1 m
17 kN
33 kN
27
17
T [kN]
1,8 m
-18
-33
Mi [kNm]
17
25,5
30,5
41,3

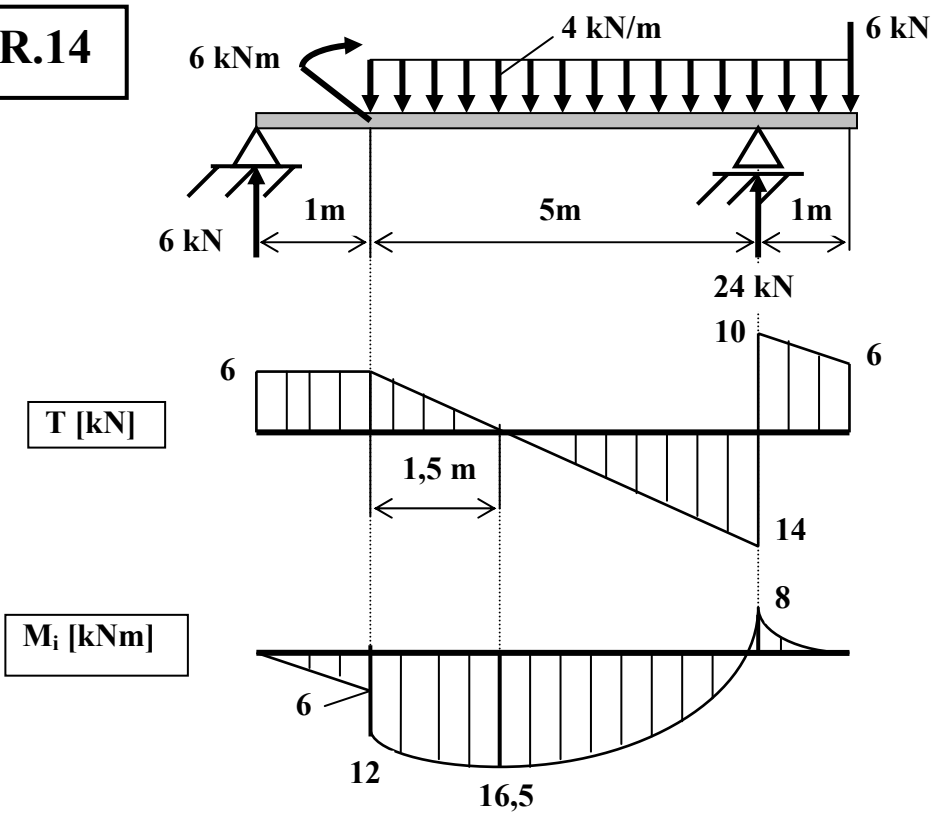
3R.12


2pa2
p
pa
a
a
2a
1,13pa
0,87pa
1,13pa
1,13pa
0,87a
T
0,13pa
-0,87pa
2 pa2
0,8 pa2
0,25 pa2
Mi
0,38 pa2

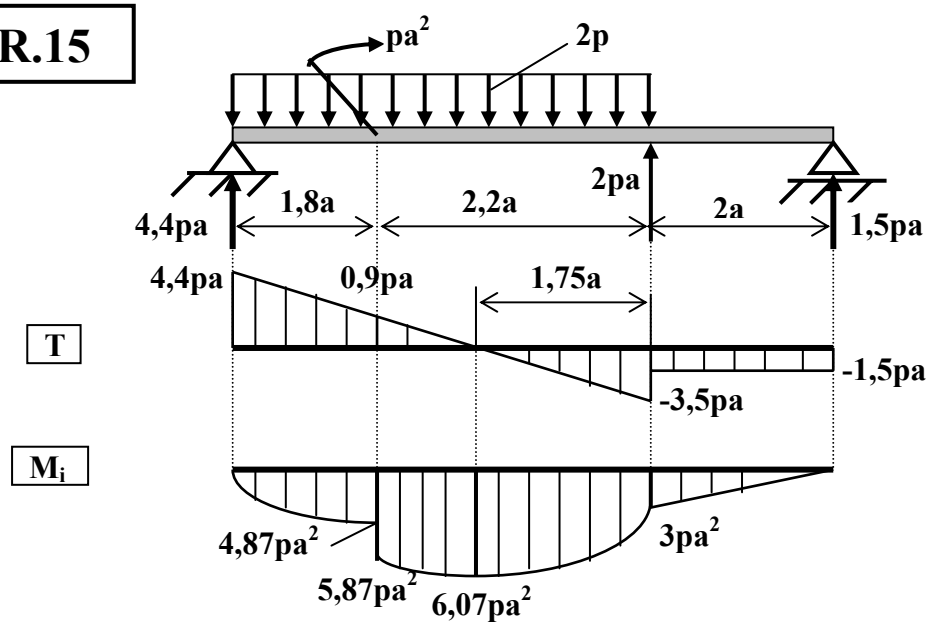
3R.13


12 kNm
6 kN/m
8 kN
1,2 m
2 m
1,4 m
15 kN
3,8 kN
7,8
0,71 m
T [kN]
-7,2
-4,2
-8
-8
4,3
Mi [kNm]
7,7
11,2
12,7

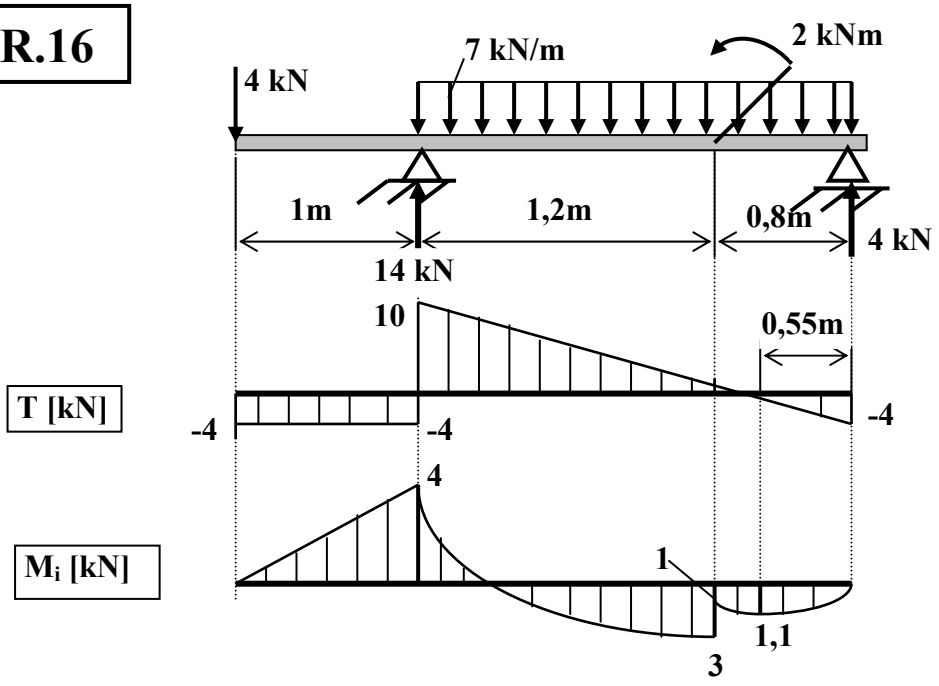
3R.14


4 kN/m
6 kN
6 kNm
1m
5m
1m
6 kN
24 kN
10
6
6
T [kN]
1,5 m
14
8
Mi [kNm]
6
12
16,5

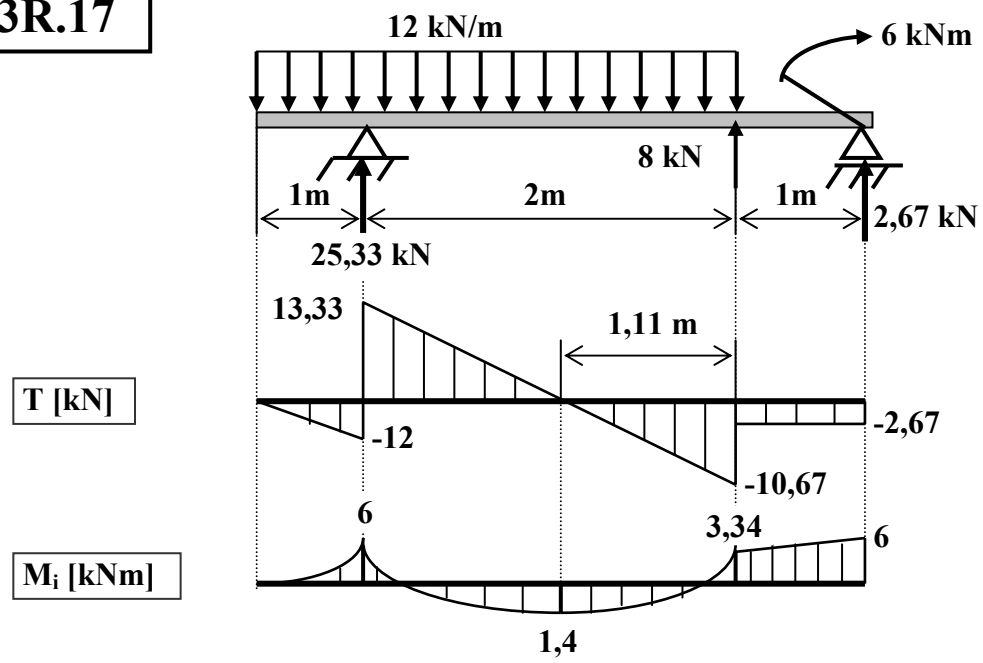
3R.15


pa²
2p
2pa
4,4pa
1,8a
2,2a
2a
1,5pa
4,4pa
0,9pa
1,75a
T
-1,5pa
-3,5pa
Mi
4,87pa²
3pa²
5,87pa²
6,07pa²

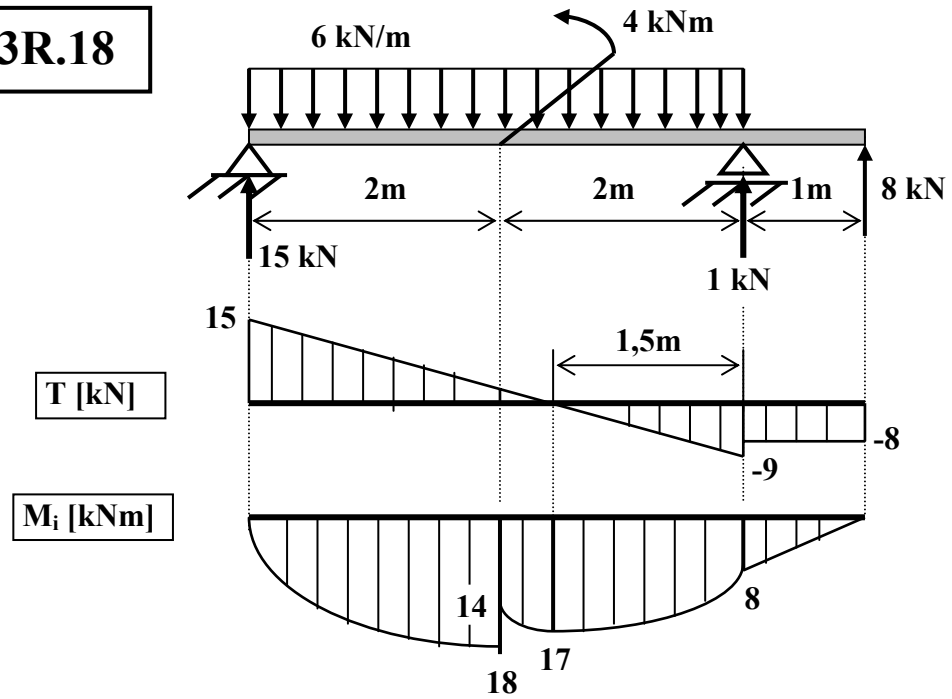
3R.16


7 kN/m
2 kNm
4 kN
1m
1,2m
0,8m
4 kN
14 kN
10
0,55m
T [kN]
-4
-4
-4
4
Mi [kN]
1
1,1
3

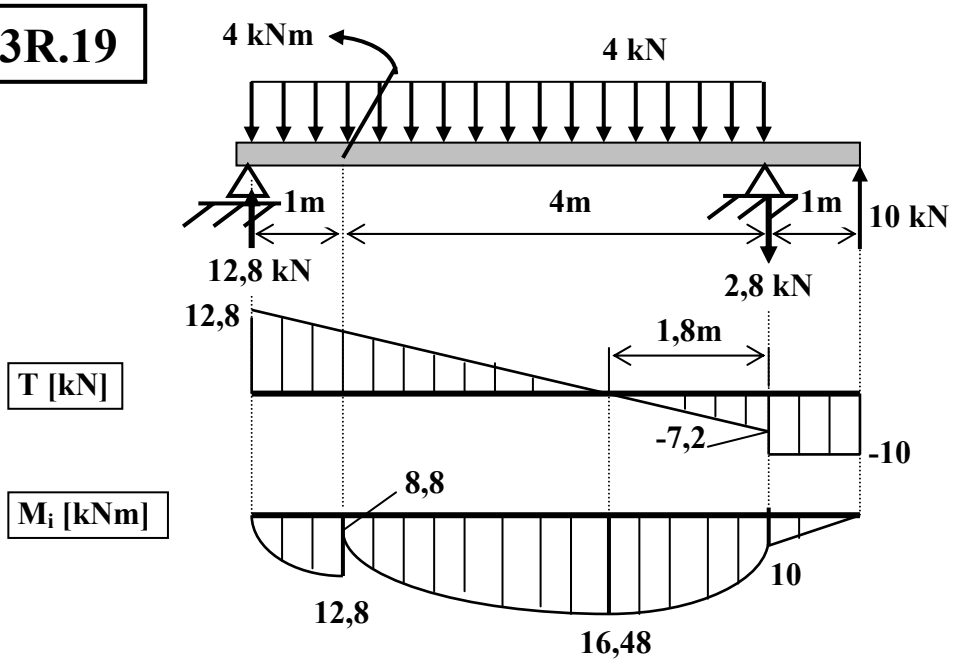
3R.17


12 kN/m
6 kNm
8 kN
1m
2m
1m
2,67 kN
25,33 kN
13,33
1,11 m
T [kN]
-12
-2,67
-10,67
6
3,34
6
Mi [kNm]
1,4

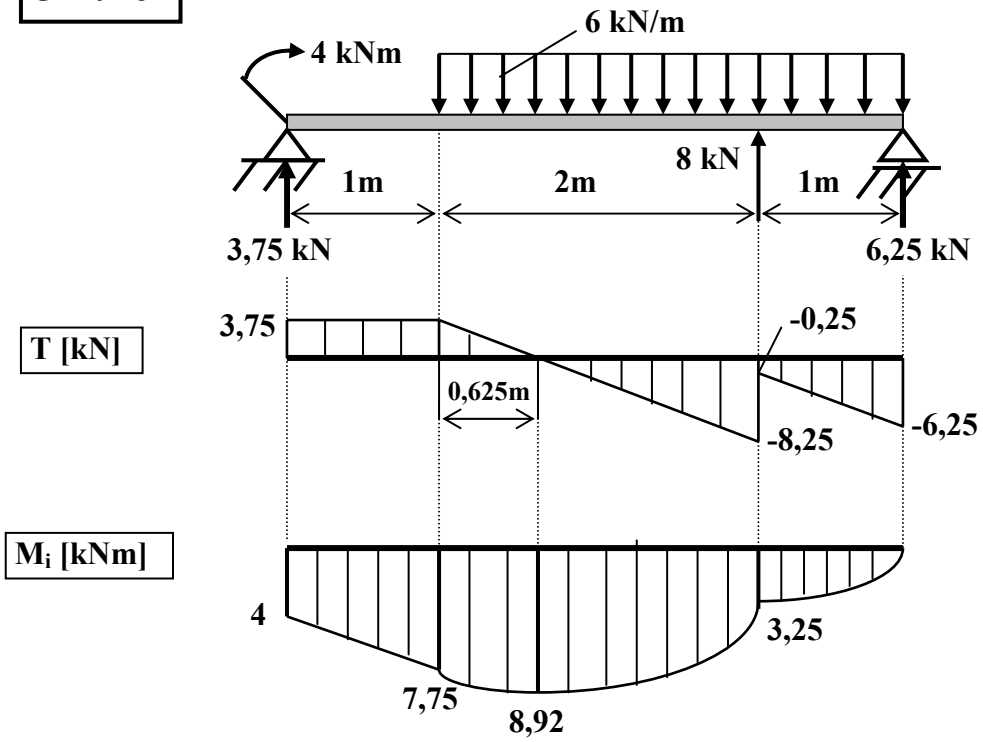
3R.18


6 kN/m
4 kNm
2m
2m
1m
8 kN
15 kN
1 kN
15
1,5m
T [kN]
-8
-9
Mi [kNm]
14
8
18
17

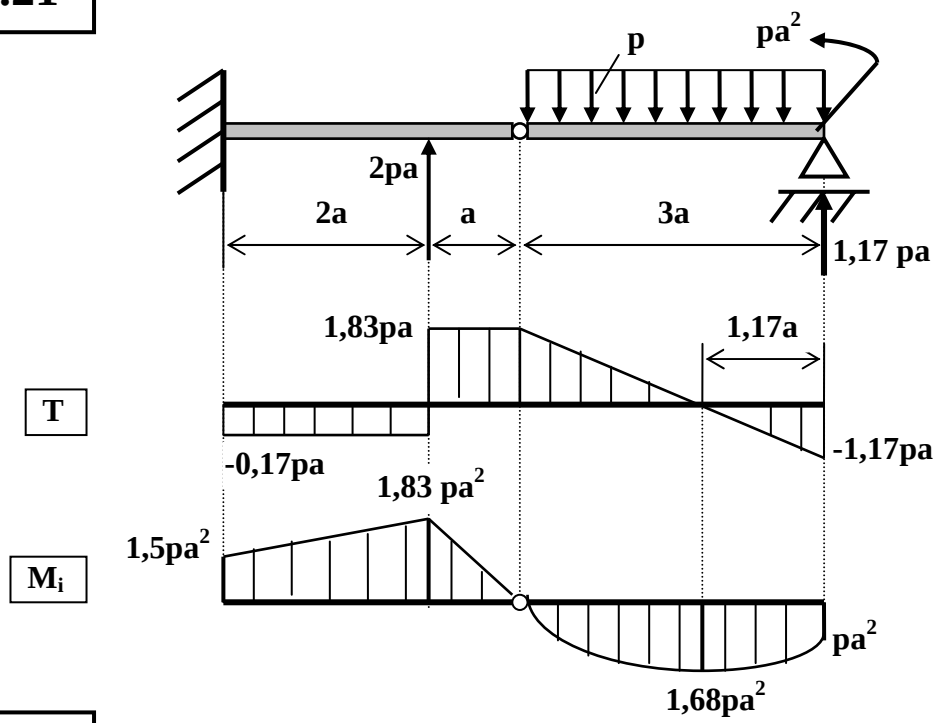
3R.19


4 kNm
4 kN
1m
4m
1m
10 kN
12,8 kN
2,8 kN
12,8
1,8m
T [kN]
-7,2
-10
8,8
Mi [kNm]
10
12,8
16,48

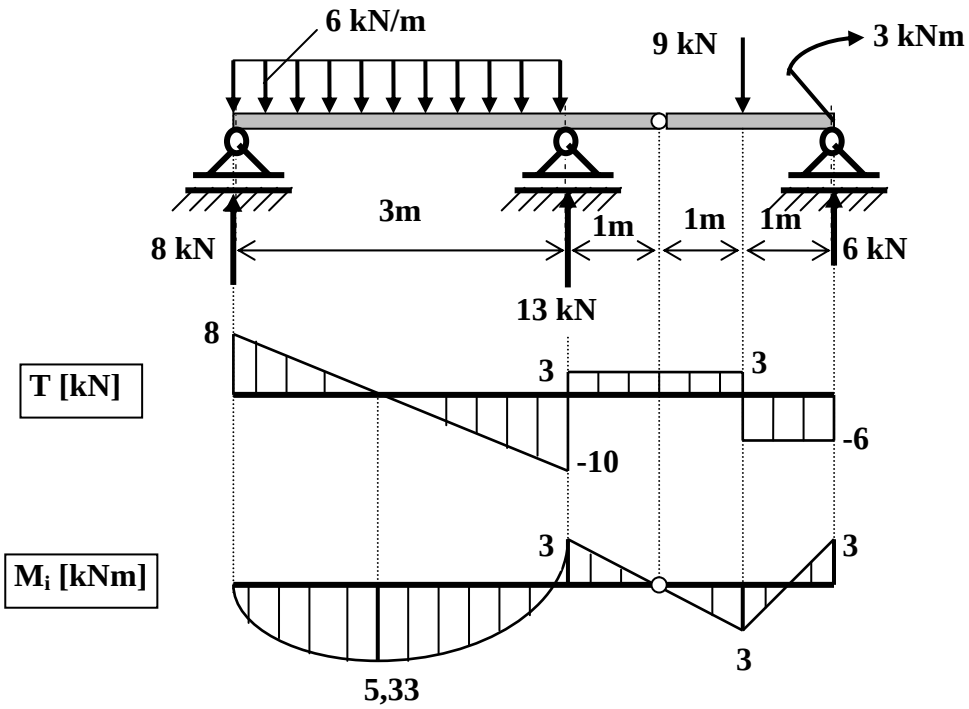
3R.20


6 kN/m
4 kNm
8 kN
1m
2m
1m
3,75 kN
6,25 kN
3,75
-0,25
T [kN]
0,625m
-8,25
-6,25
Mi [kNm]
4
3,25
7,75
8,92

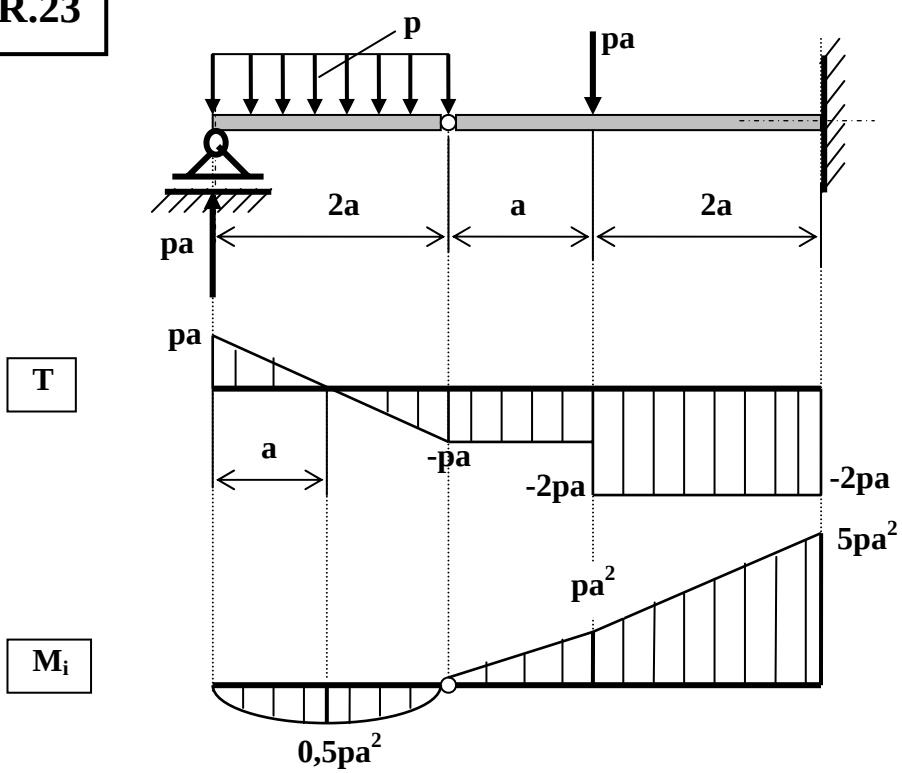
3R.21


p
pa²
2pa
2a
a
3a
1,17 pa
1,83pa
1,17a
T
-0,17pa
-1,17pa
1,83 pa²
1,5pa²
Mi
pa²
1,68pa²

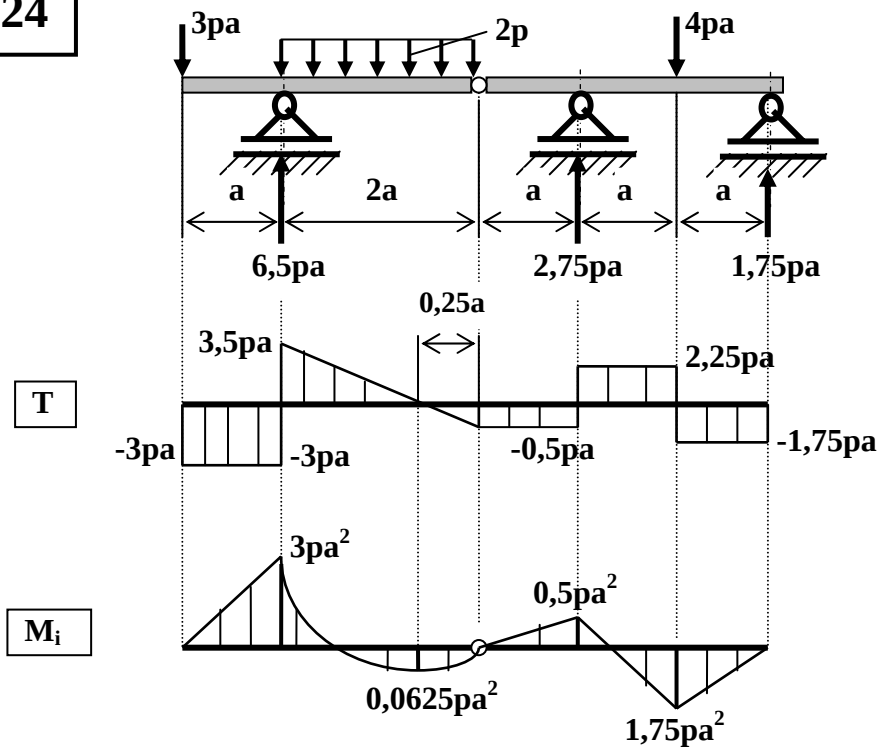
3R.22


6 kN/m
9 kN
3 kNm
3m
1m
1m
1m
8 kN
6 kN
13 kN
8
3
3
T [kN]
-10
-6
3
3
Mi [kNm]
3
5,33

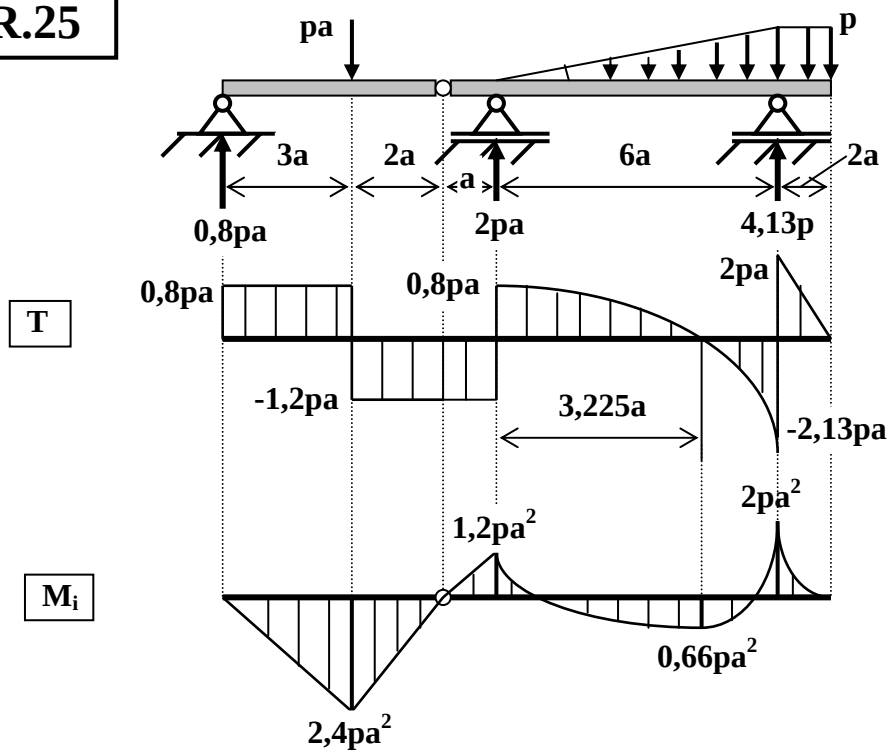
3R.23


p
pa
2a
a
2a
pa
T
pa
a
-pa
-2pa
-2pa
5pa²
pa²
Mi
0,5pa²

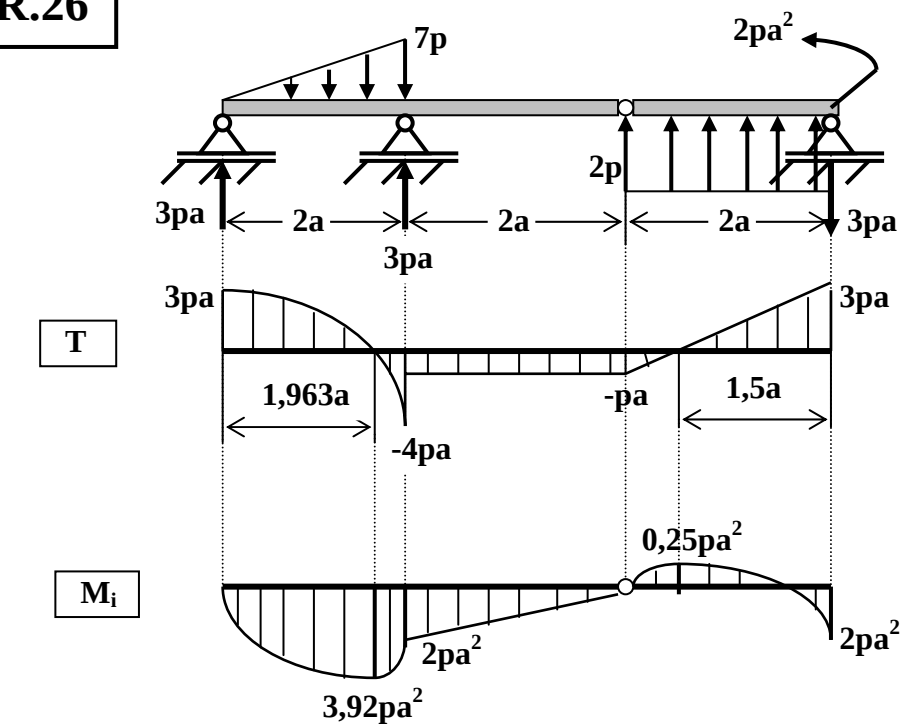
3R.24


3pa
2p
4pa
a
2a
a
a
a
6,5pa
2,75pa
1,75pa
0,25a
3,5pa
2,25pa
T
-3pa
-3pa
-0,5pa
-1,75pa
3pa²
0,5pa²
Mi
0,0625pa²
1,75pa²

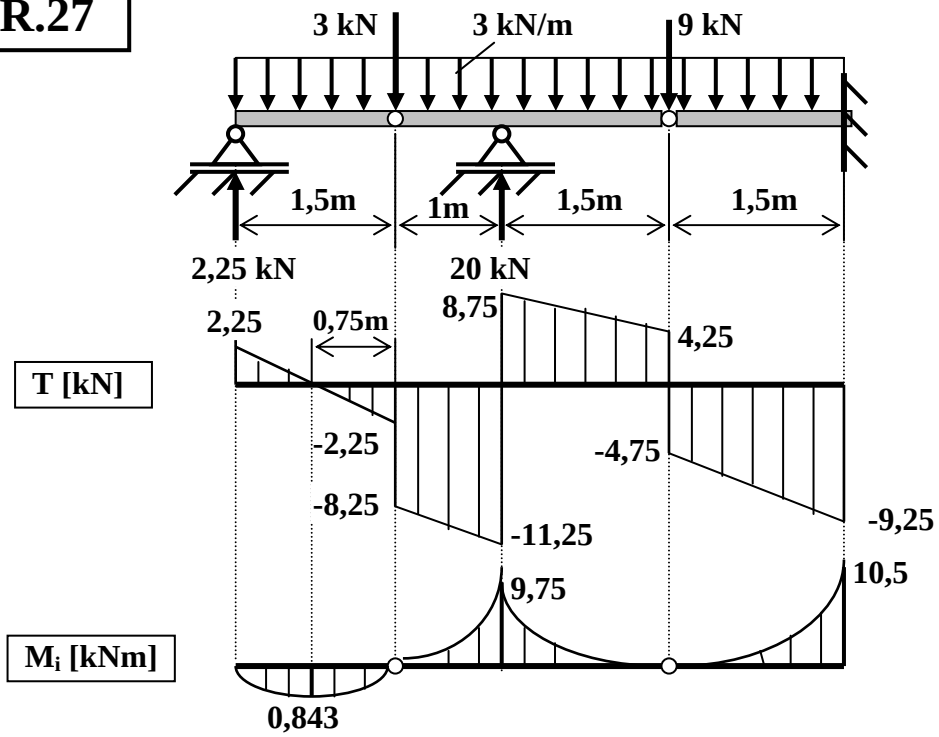
3R.25


pa
p
3a
2a
a
6a
2a
0,8pa
2pa
4,13p
T
0,8pa
0,8pa
2pa
-1,2pa
3,225a
-2,13pa
Mi
2pa²
1,2pa²
0,66pa²
2,4pa²

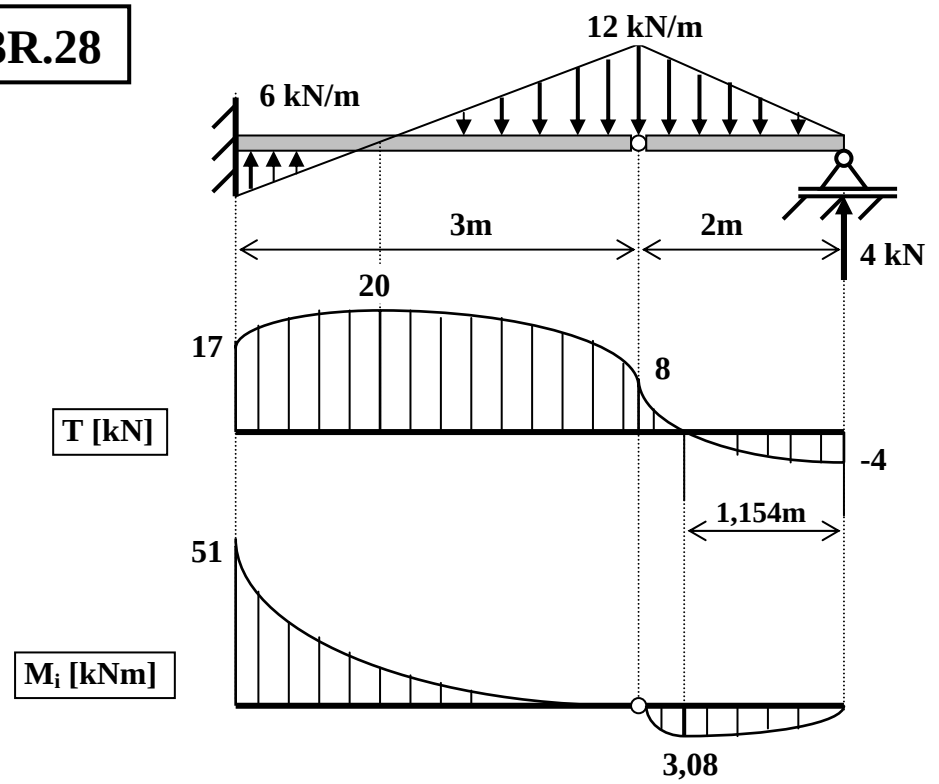
3R.26


7p
2pa²
2p
3pa
2a
2a
2a
3pa
3pa
T
3pa
3pa
1,963a
-pa
1,5a
-4pa
Mi
0,25pa²
2pa²
2pa²
3,92pa²

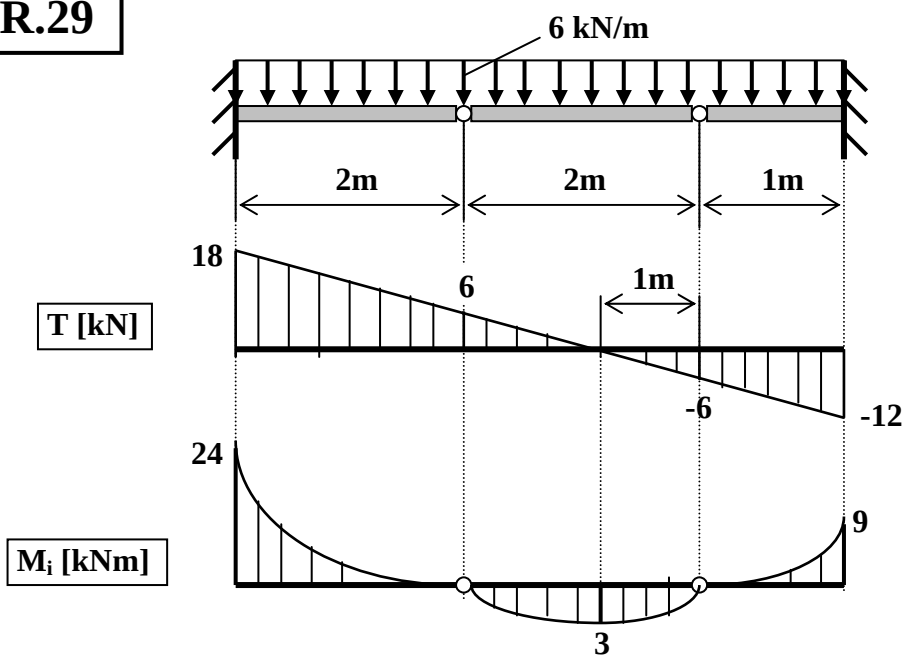
3R.27


3 kN
3 kN/m
9 kN
1,5m
1m
1,5m
1,5m
2,25 kN
20 kN
2,25
0,75m
8,75
4,25
T [kN]
-2,25
-8,25
-11,25
-4,75
-9,25
9,75
10,5
Mi [kNm]
0,843

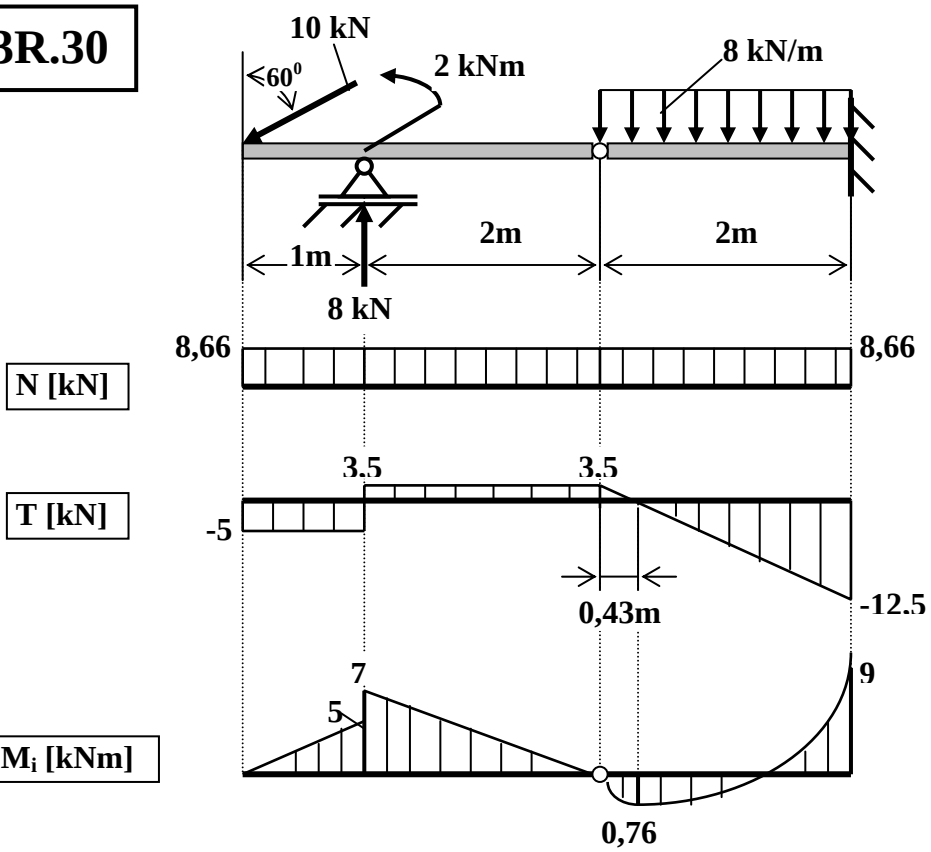
3R.28


12 kN/m
6 kN/m
3m
2m
4 kN
20
17
8
T [kN]
-4
1,154m
51
Mi [kNm]
3,08

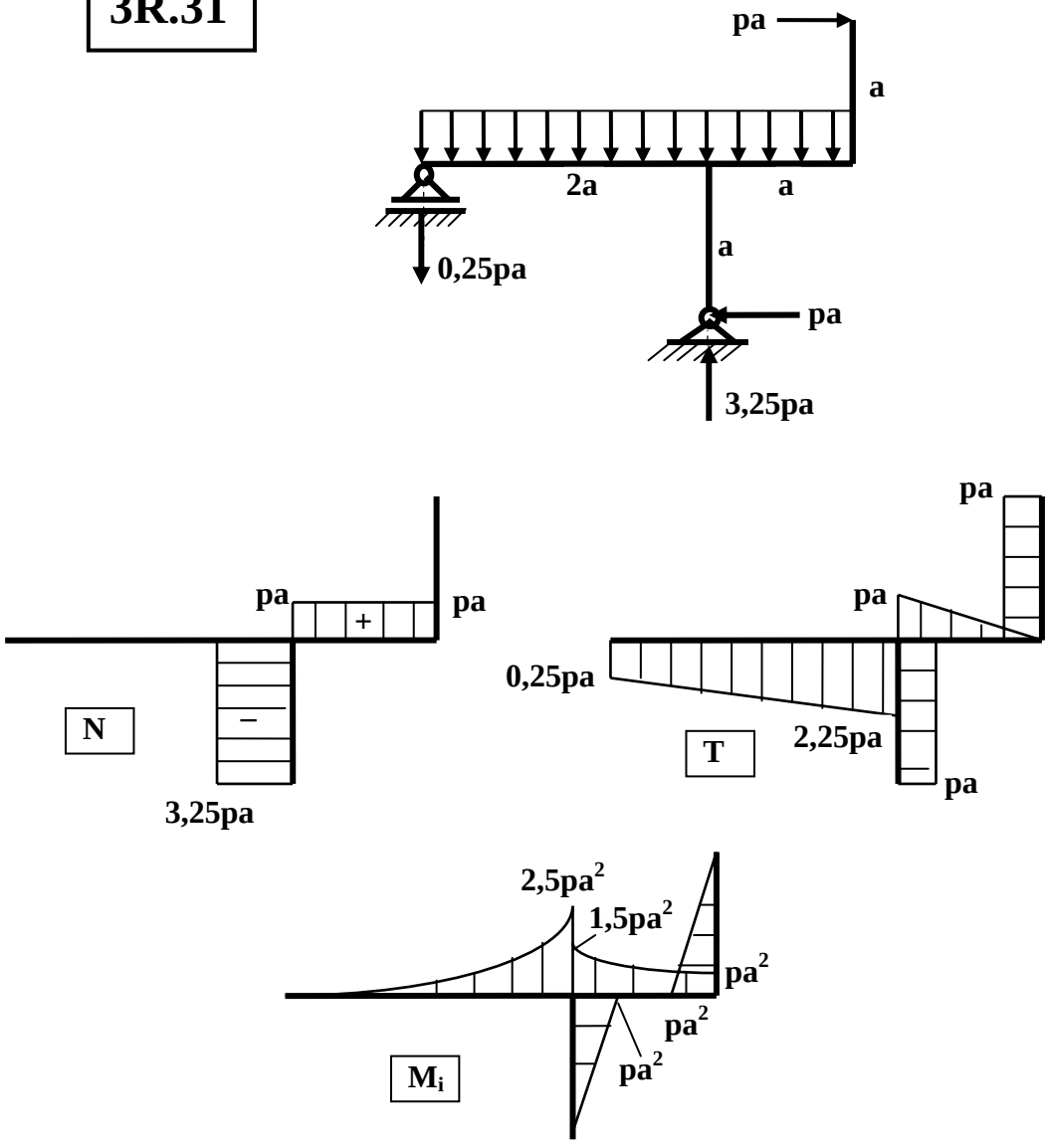
3R.29


6 kN/m
2m
2m
1m
18
6
1m
T [kN]
-6
-12
24
9
Mi [kNm]
3

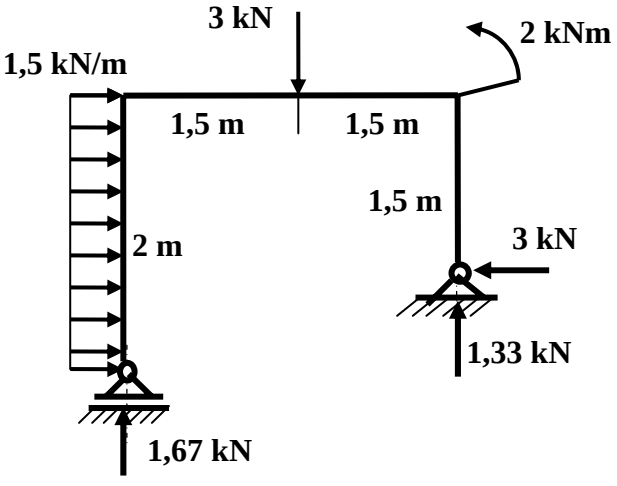
3R.30

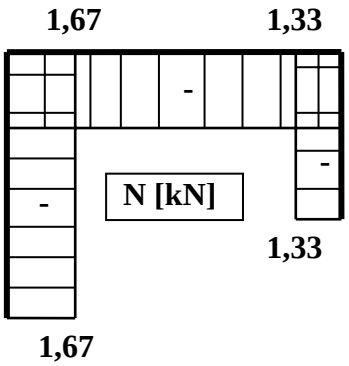

10 kN
60⁰
2 kNm
8 kN/m
1m
2m
2m
8 kN
8,66
8,66
N [kN]
3,5
3,5
T [kN]
-5
0,43m
-12,5
7
5
9
Mi [kNm]
0,76

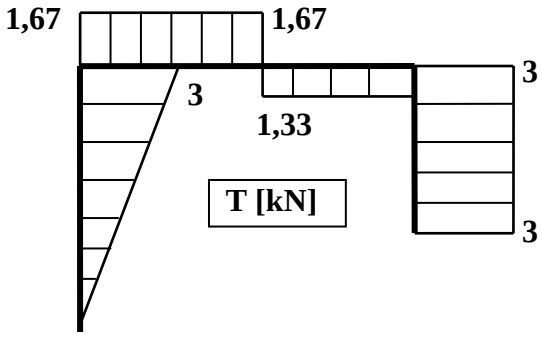
3R.31

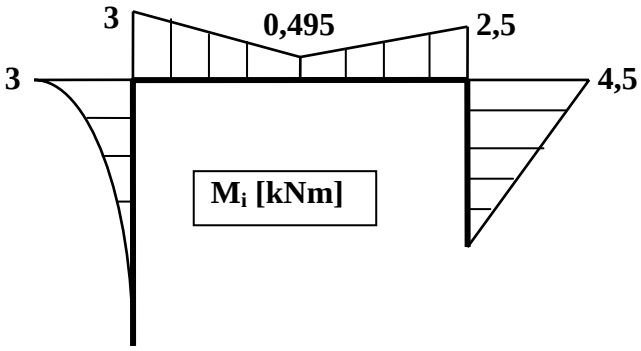

pa
a
2a
a
0,25pa
a
pa
3,25pa
pa
pa
+
pa
N
−
3,25pa
pa
pa
0,25pa
T
2,25pa
pa
2,5pa²
1,5pa²
pa²
pa²
pa²
Mi

3R.32

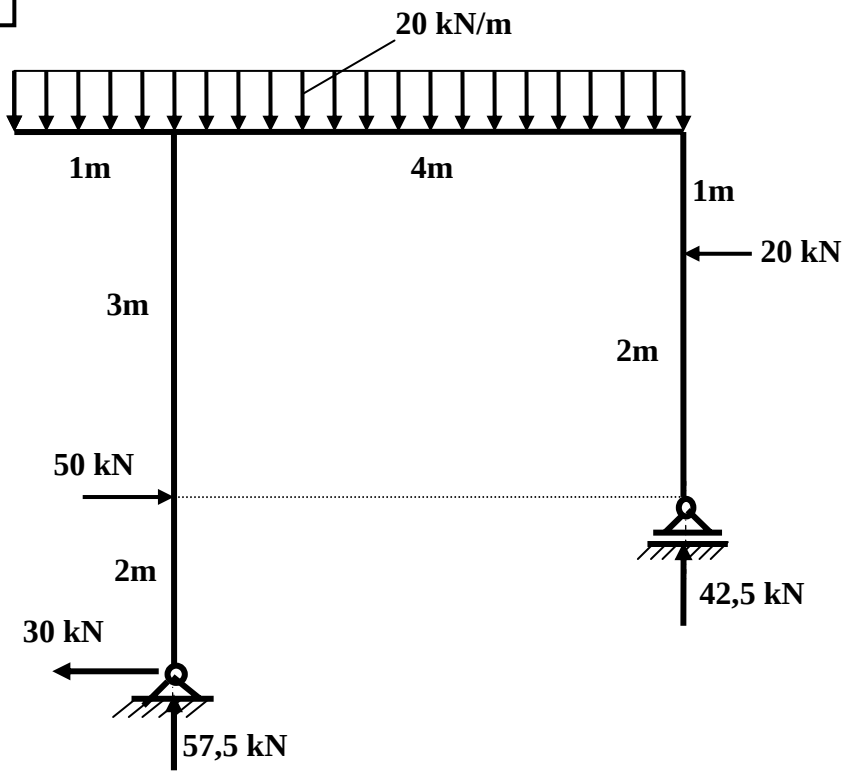

3 kN
2 kNm
1,5 kN/m
1,5 m
1,5 m
1,5 m
2 m
3 kN
1,33 kN
1,67 kN

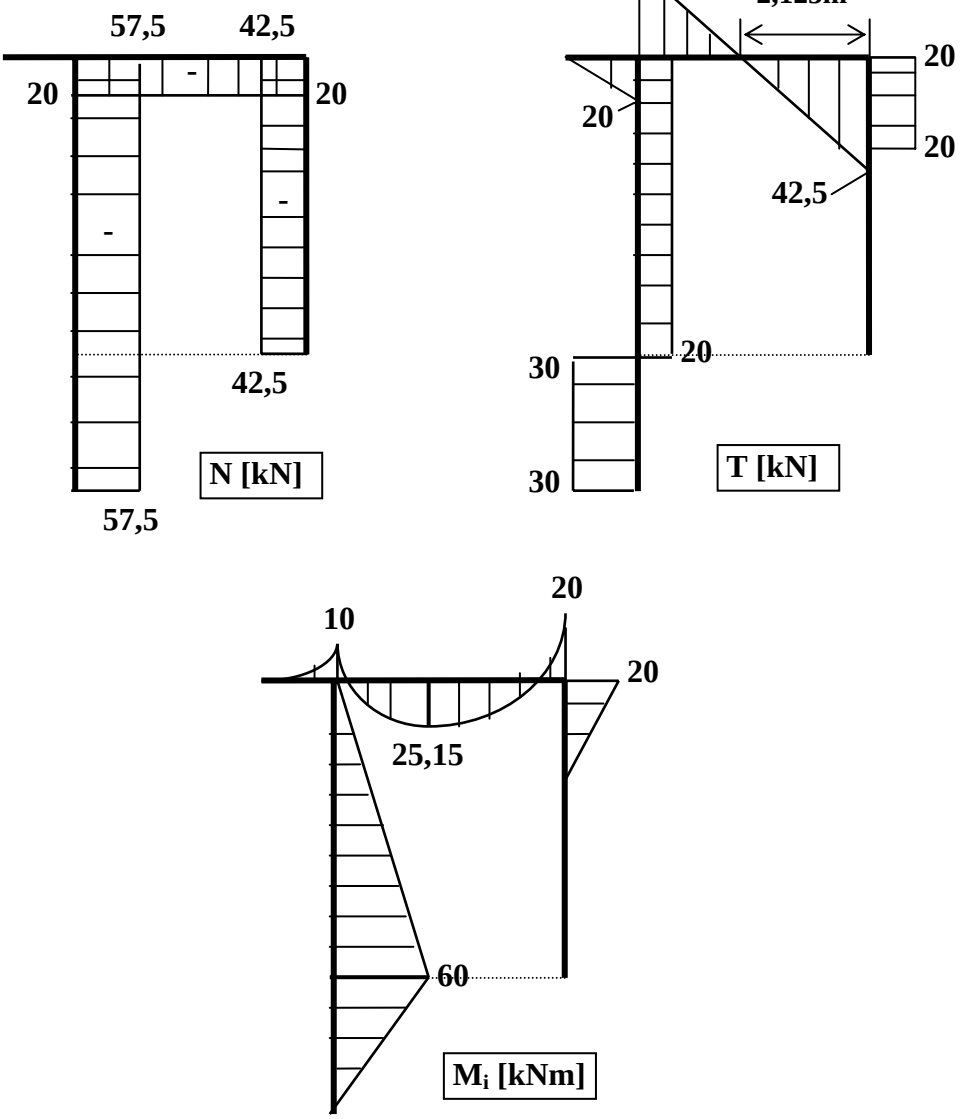

1,67
1,33
-
-
-
N [kN]
1,33
1,67


1,67
1,67
3
3
1,33
T [kN]
3

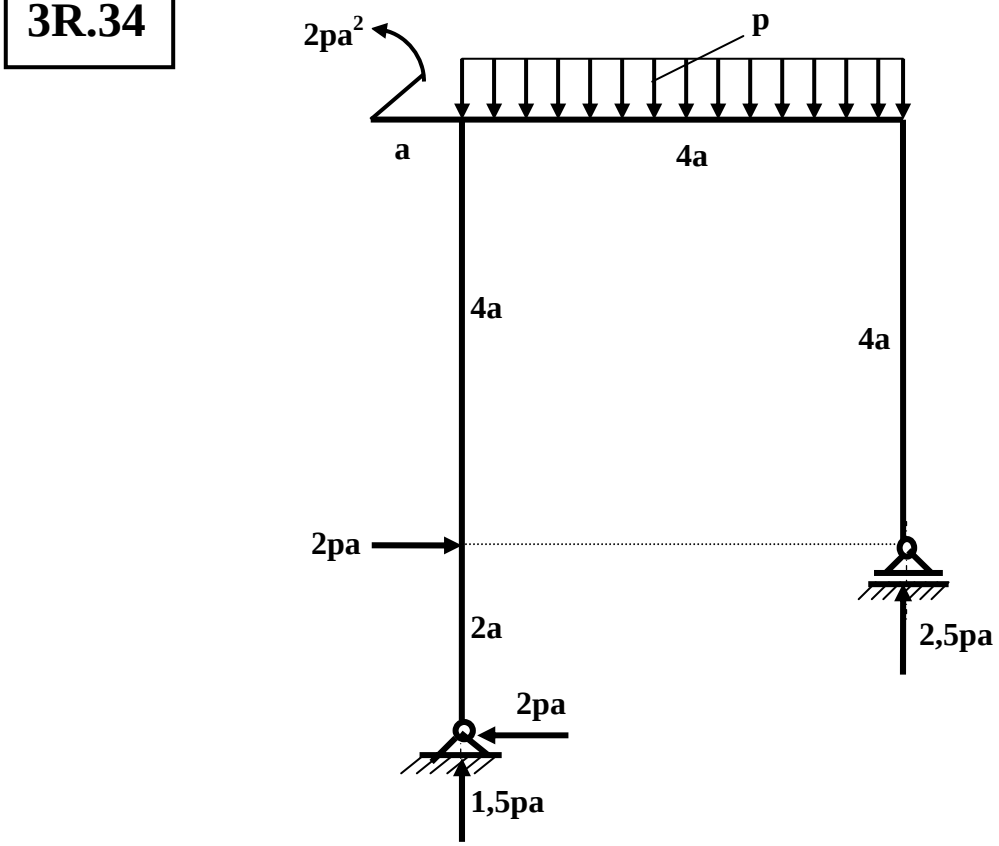

3
0,495
2,5
3
4,5
Mi [kNm]

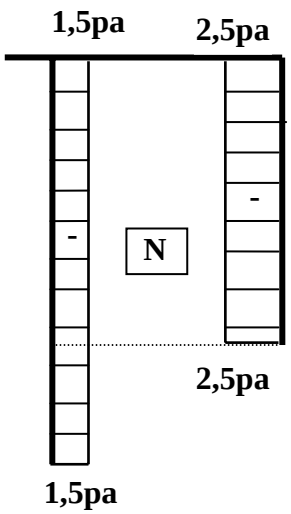
3R.33

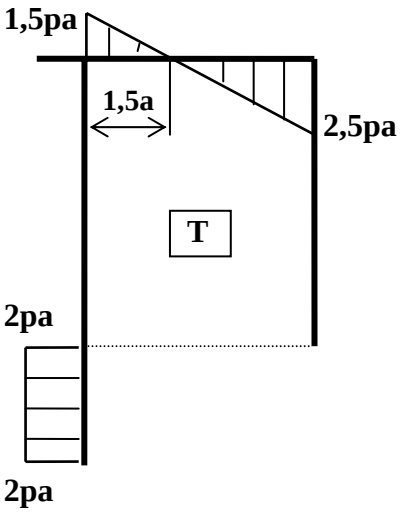

20 kN/m
1m
4m
1m
20 kN
3m
2m
50 kN
2m
42,5 kN
30 kN
57,5 kN

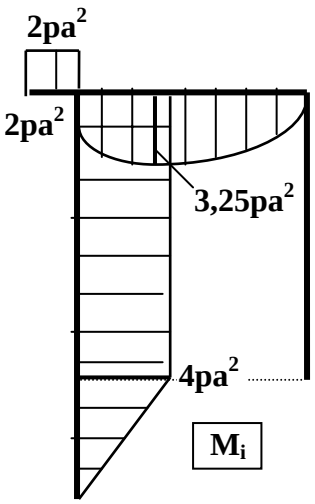

57,5
42,5
20
20
-
-
42,5
57,5
N [kN]
37,5
2,125m
20
20
20
42,5
20
30
30
T [kN]
20
10
20
25,15
60
M_i [kNm]

3R.34

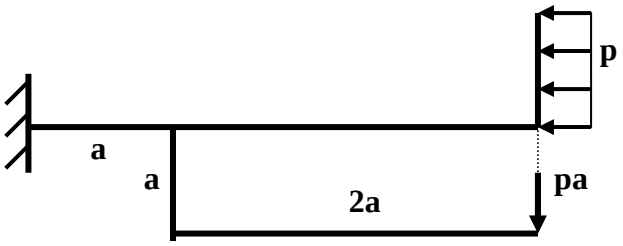

2pa²
p
a
4a
4a
4a
2pa
2a
2,5pa
2pa
1,5pa

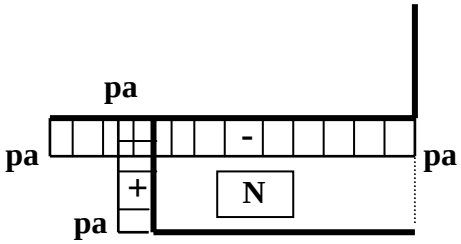

1,5pa
2,5pa
-
-
N
2,5pa
1,5pa

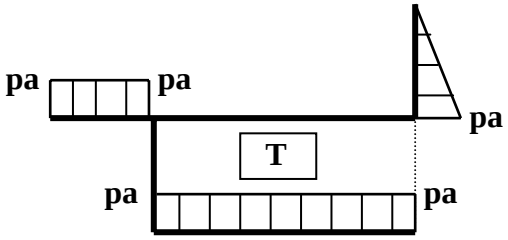

1,5pa
1,5a
2,5pa
T
2pa
2pa

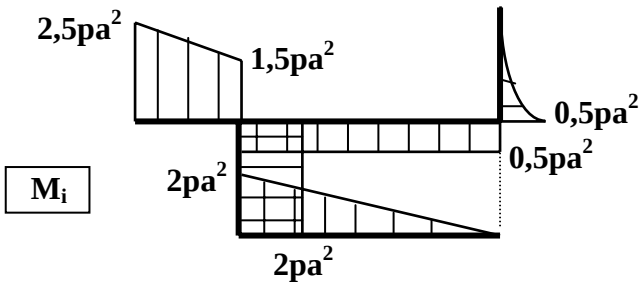

2pa²
2pa²
3,25pa²
4pa²
Mi

3R.35

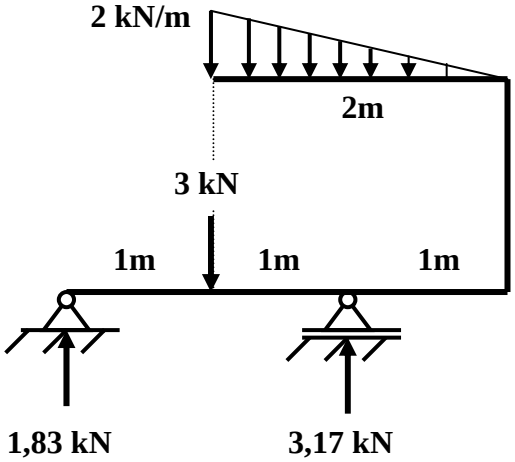

p
a
a
2a
pa

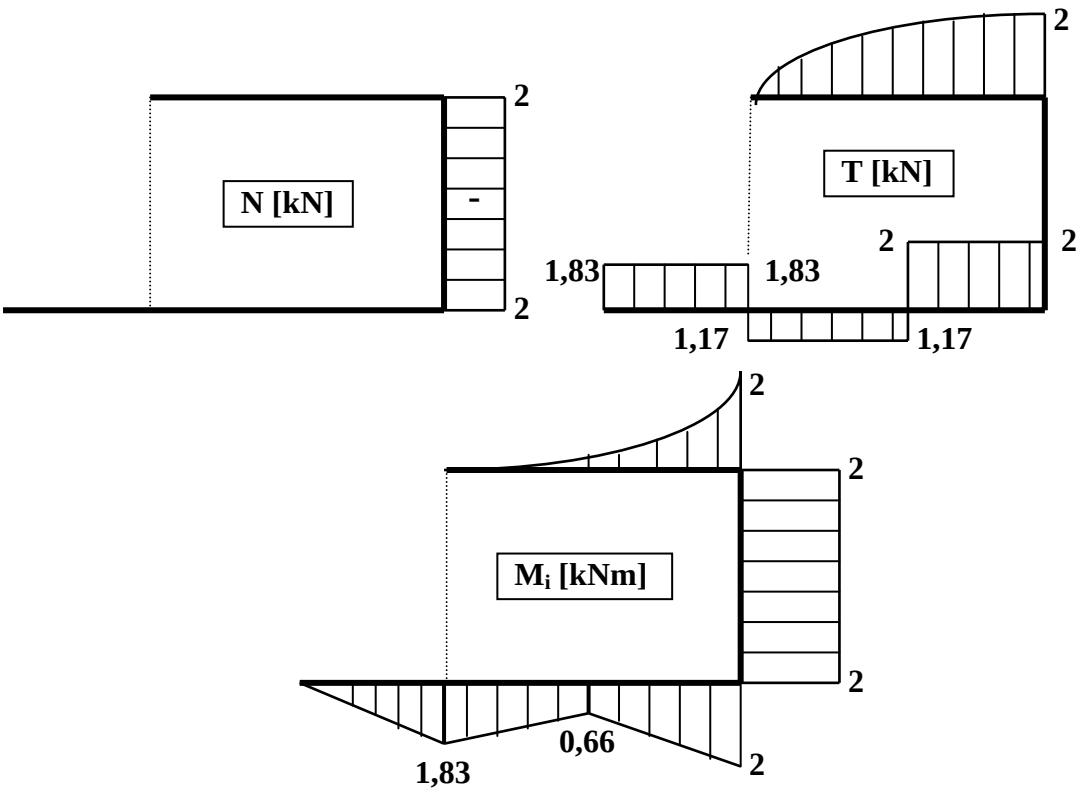

pa
pa
-
+
N
pa
pa


pa
pa
pa
T
pa
pa

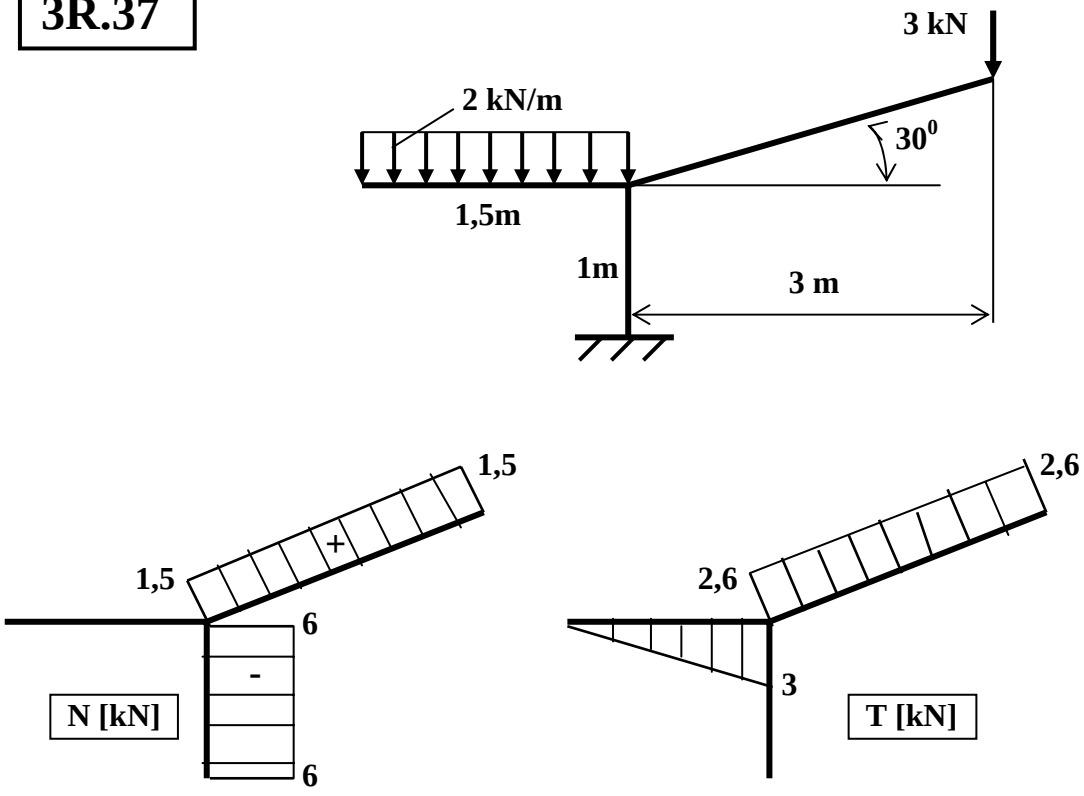

2,5pa²
1,5pa²
0,5pa²
0,5pa²
Mi
2pa²
2pa²

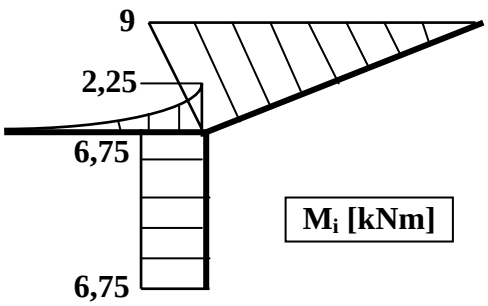
3R.36


2 kN/m
2m
3 kN
1m
1m
1m
1,83 kN
3,17 kN

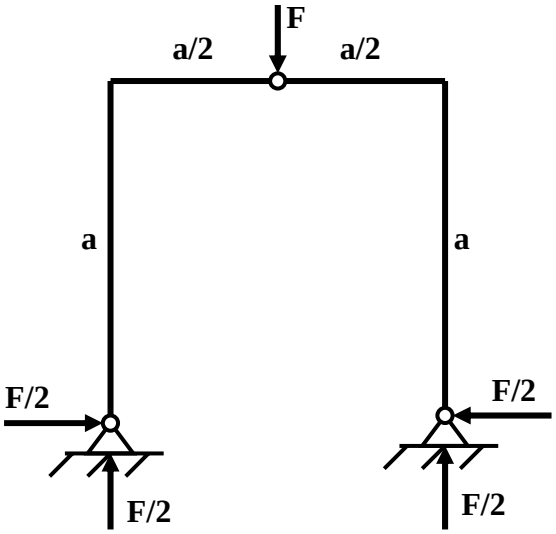

N [kN]
-
2
2
T [kN]
2
2
2
1,83
1,83
1,17
1,17
M_i [kNm]
2
2
2
2
1,83
0,66
2

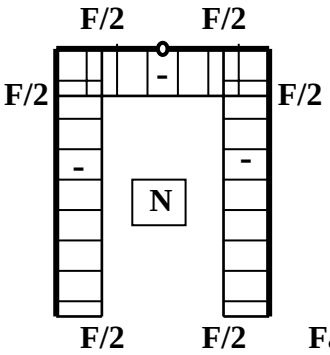
3R.37

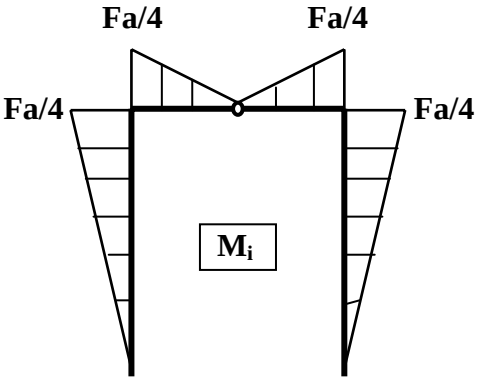

3 kN
2 kN/m
30^0
1,5m
1m
3 m
N [kN]
-
1,5
1,5
6
6
T [kN]
2,6
2,6
3

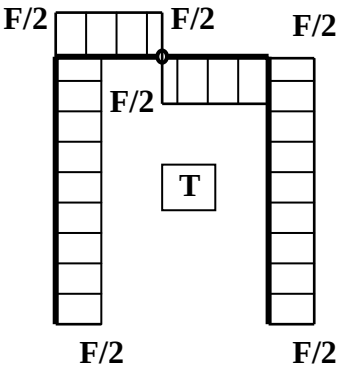

9
2,25
6,75
6,75
Mi [kNm]

3R.38

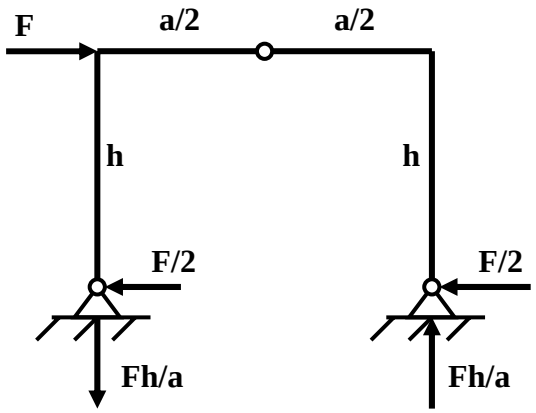

F
a/2
a/2
a
a
F/2
F/2
F/2
F/2

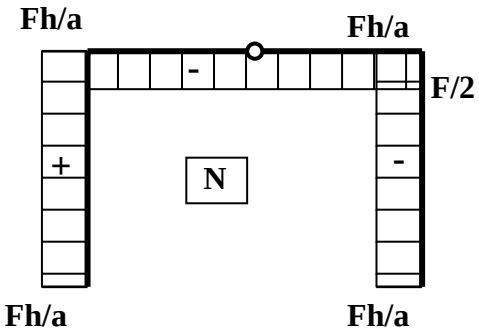

F/2
F/2
F/2
F/2
-
-
-
N
F/2
F/2

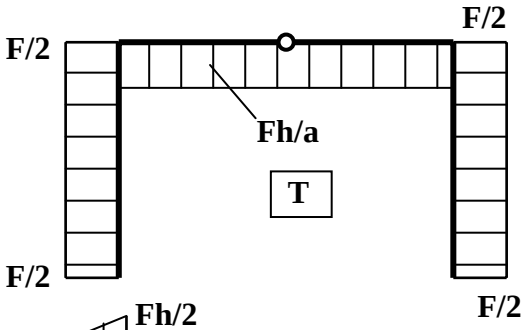

Fa/4
Fa/4
Fa/4
Fa/4
Mi

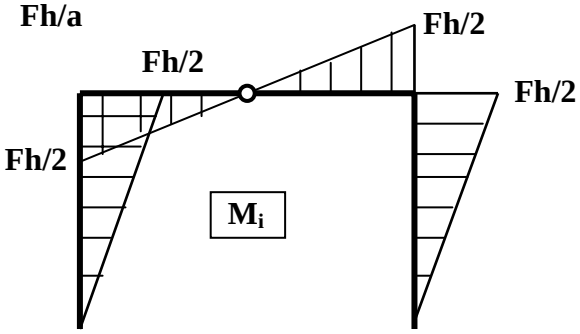

F/2
F/2
F/2
F/2
T
F/2
F/2

3R.39

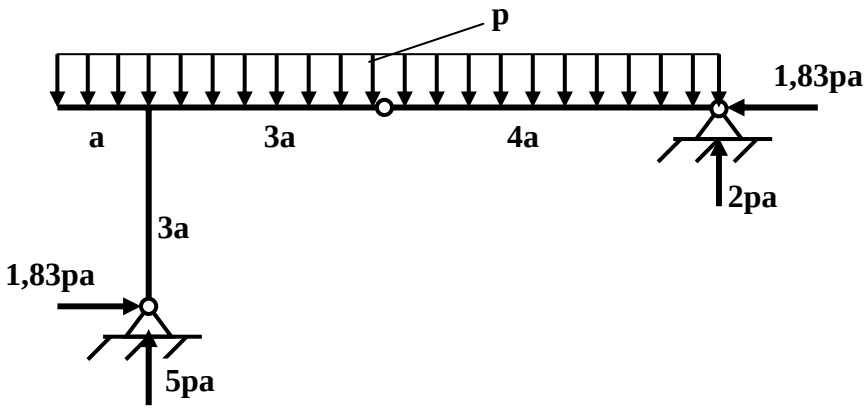

F
a/2
a/2
h
h
F/2
F/2
Fh/a
Fh/a

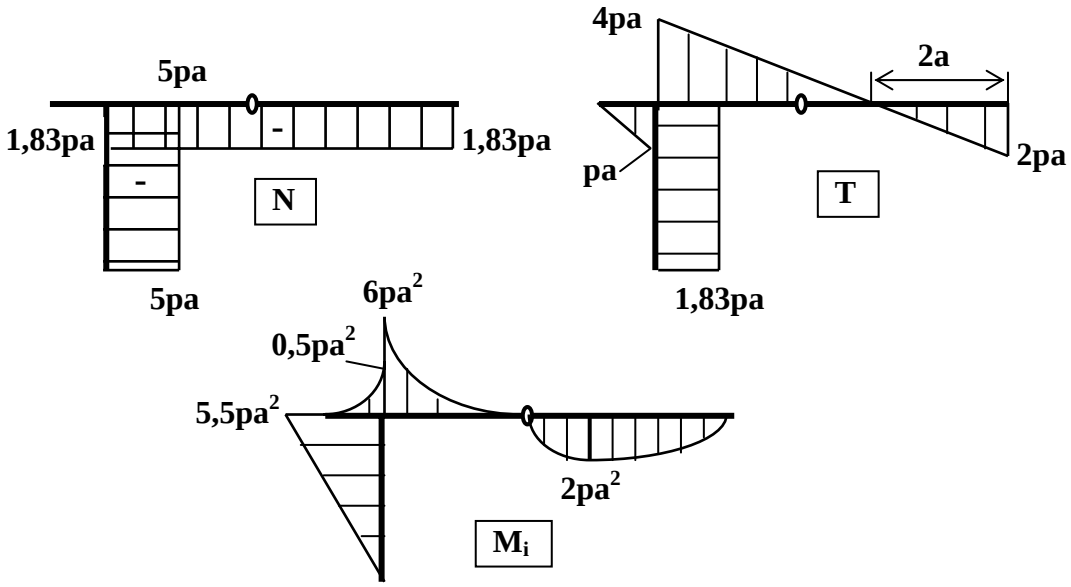

Fh/a
Fh/a
-
F/2
+
N
-
Fh/a
Fh/a


F/2
F/2
Fh/a
T
F/2
F/2

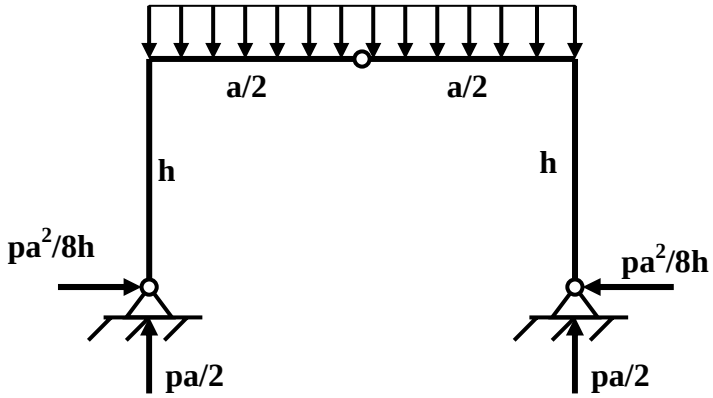

Fh/2
Fh/2
Fh/2
Fh/2
Mi

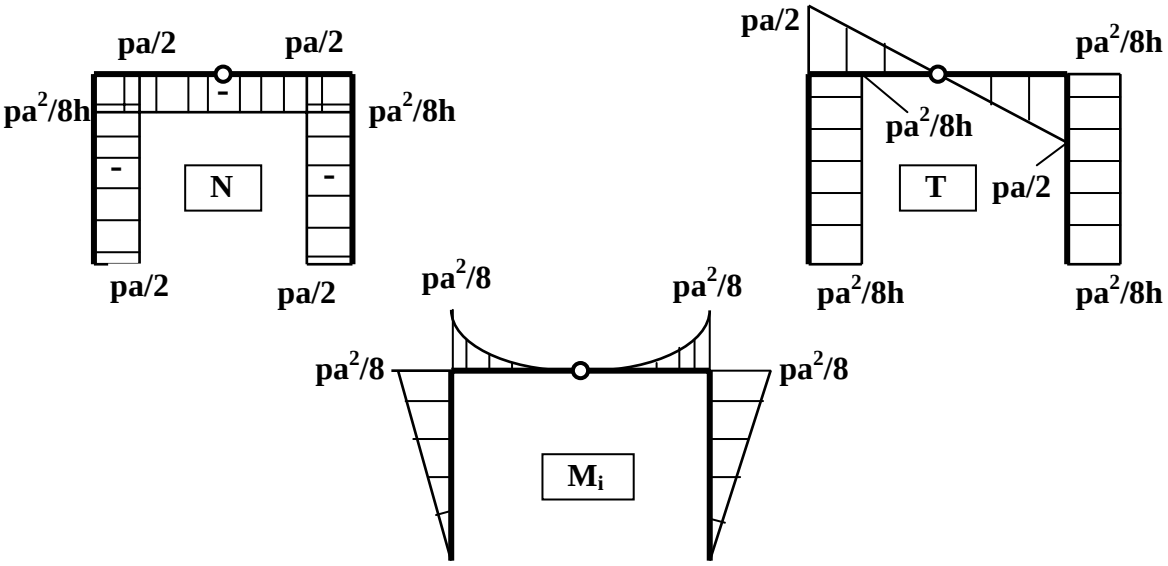
3R.40


p
1,83pa
a
3a
4a
2pa
3a
1,83pa
5pa

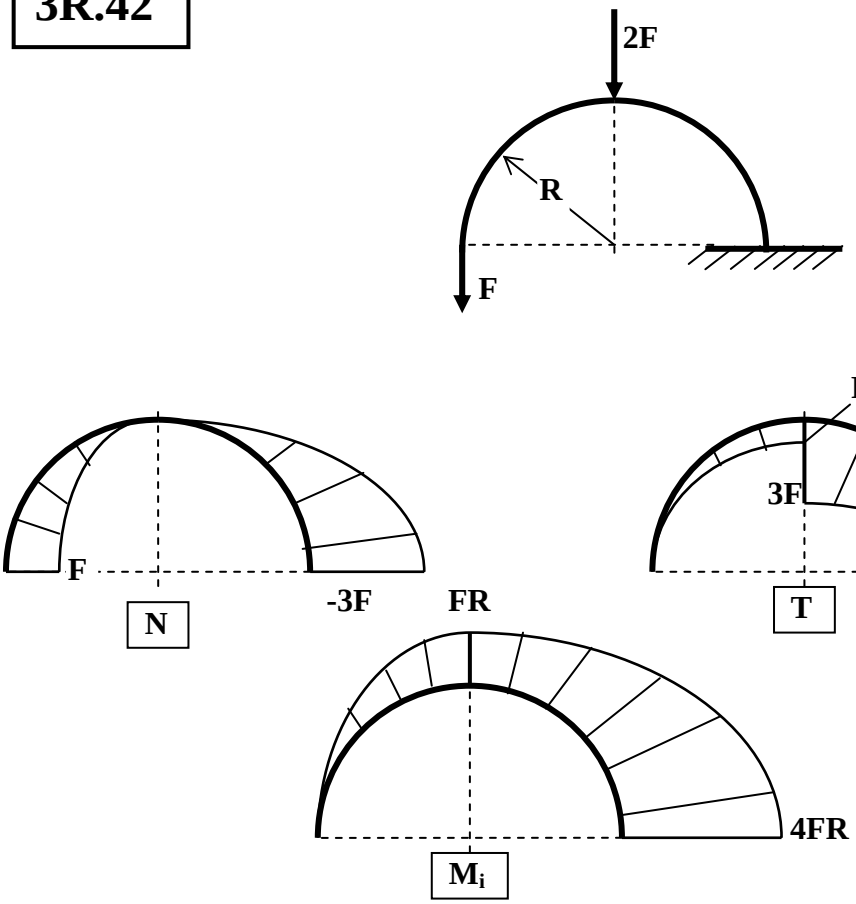

5pa
1,83pa
1,83pa
-
-
N
5pa
4pa
2a
pa
2pa
T
1,83pa
6pa²
0,5pa²
5,5pa²
2pa²
Mi

3R.41

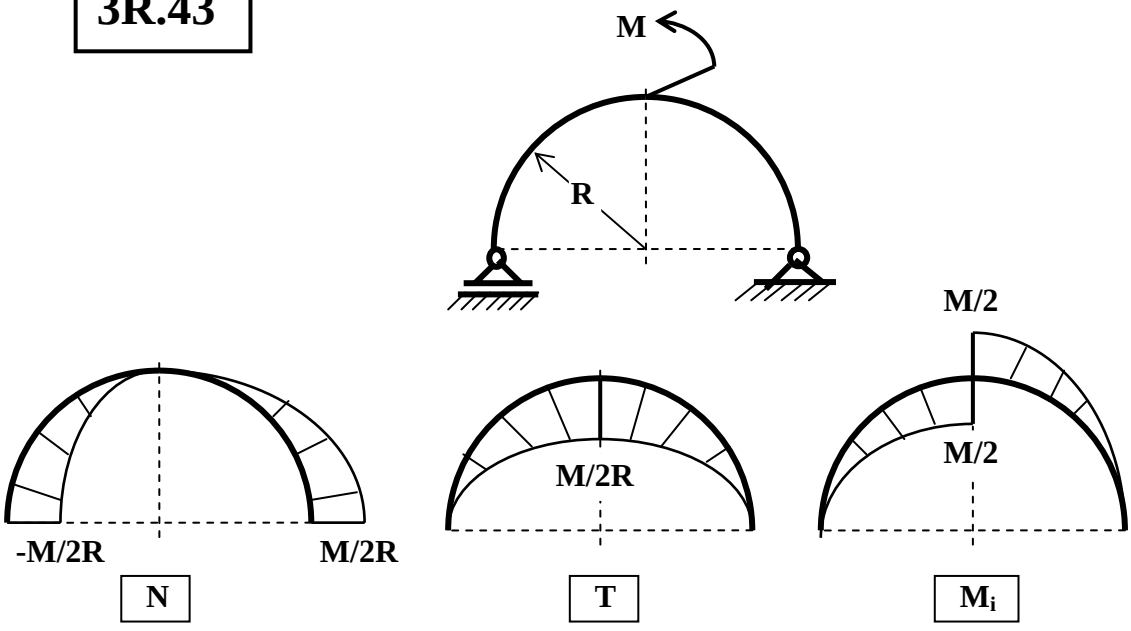

a/2
a/2
h
h
pa²/8h
pa²/8h
pa/2
pa/2


pa/2
pa/2
pa²/8h
pa²/8h
-
-
N
-
pa/2
pa/2
pa/2
pa²/8h
pa²/8h
T
pa/2
pa²/8h
pa²/8h
pa²/8
pa²/8
pa²/8
pa²/8
Mi

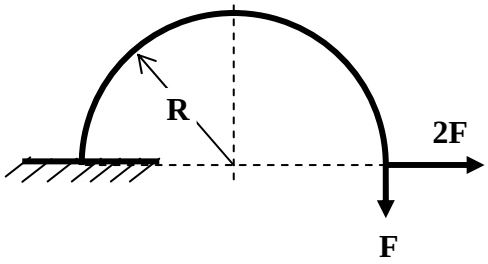
3R.42

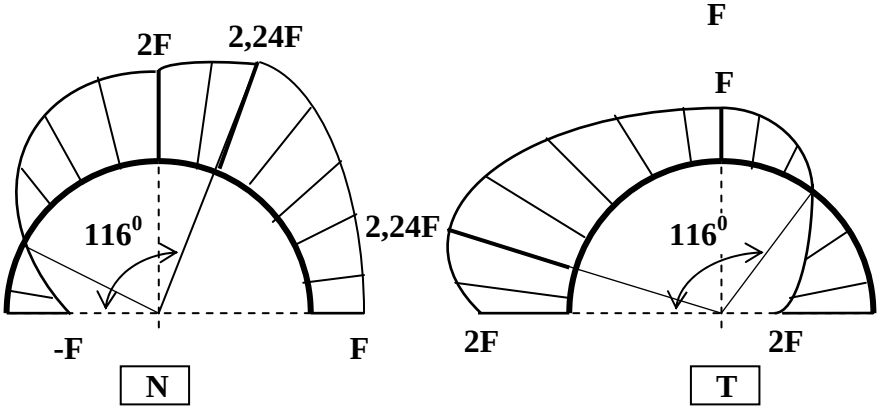


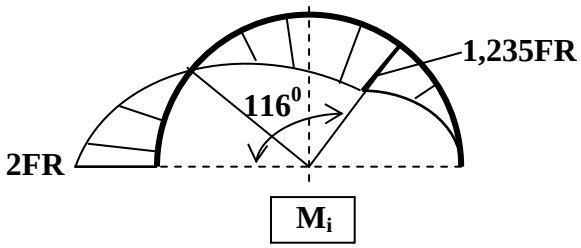
3R.43



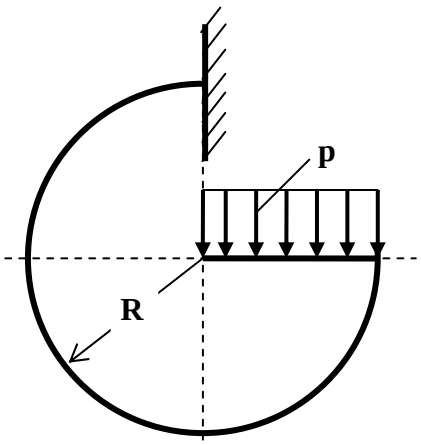
3R.44

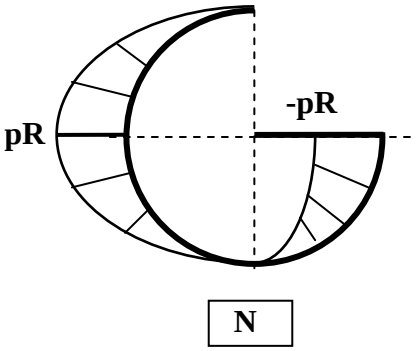


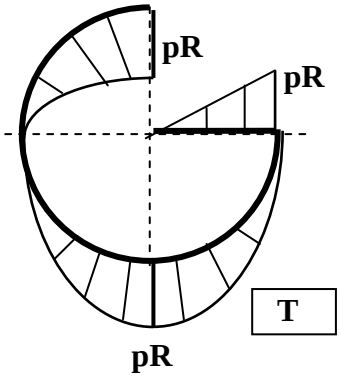


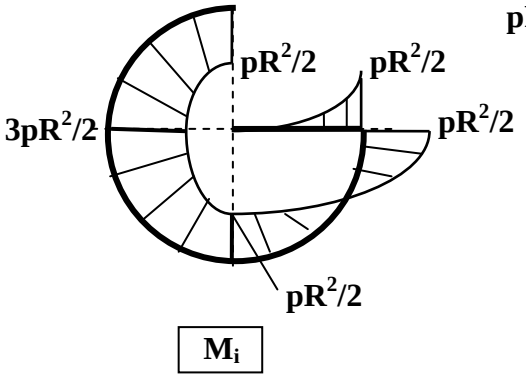


3R.45

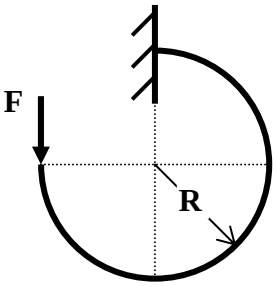


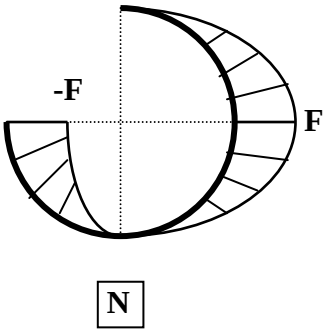

pR
-pR
N

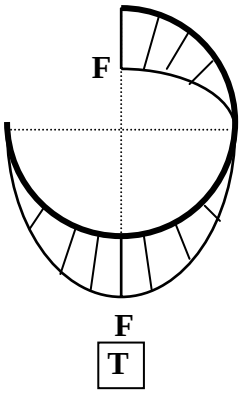

pR
pR
pR
T

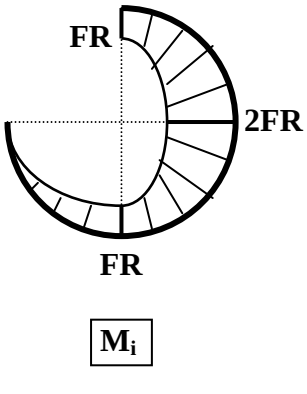

pR²/2
pR²/2
3pR²/2
pR²/2
pR²/2
Mi

3R.46

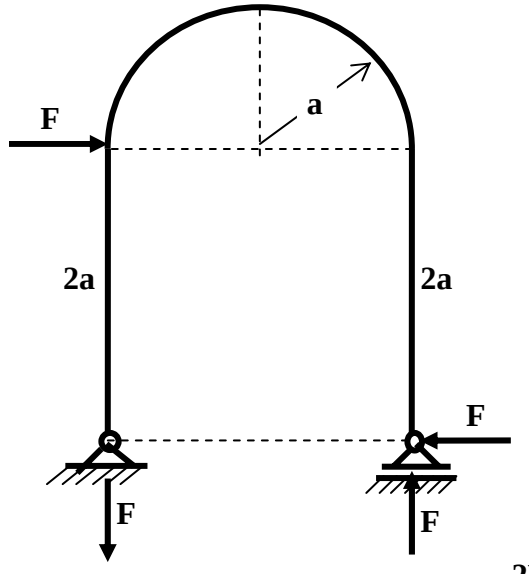

F
R

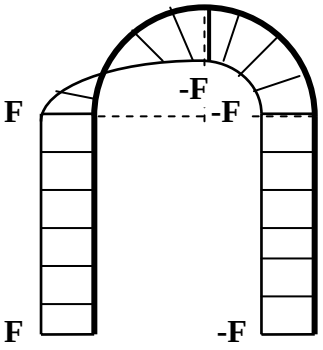

-F
F
N


F
F
T

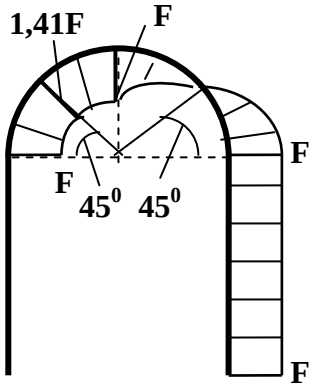

FR
2FR
FR
Mi

3R.47

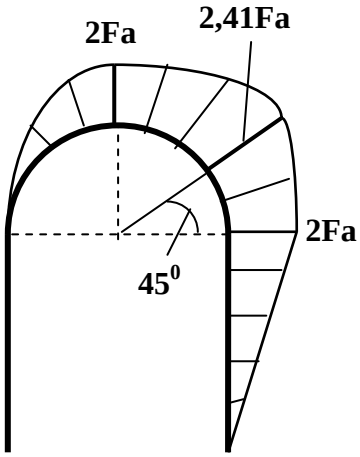




N

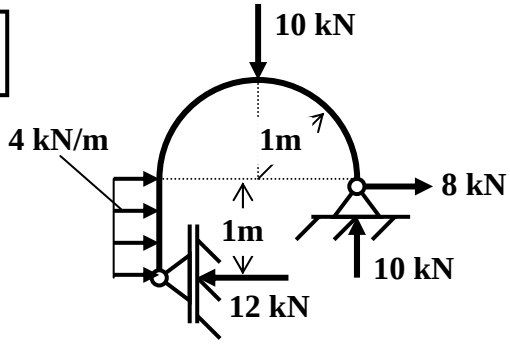


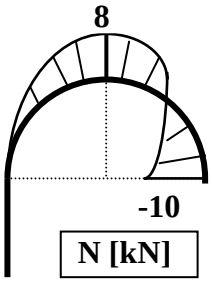
T



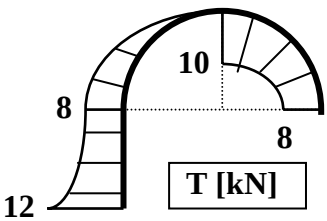
M_i

3R.48

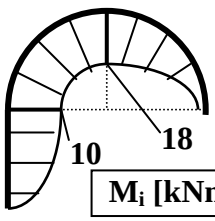




N [kN]

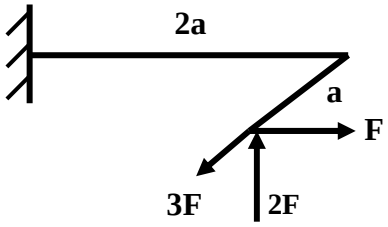


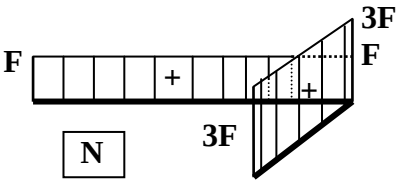
T [kN]

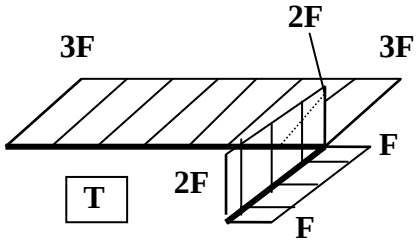


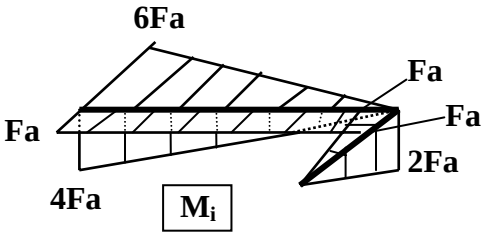
M_i [kNm]

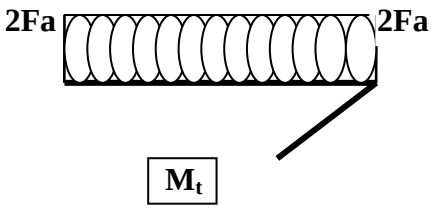
3R.49


2a
a
F
3F
2F

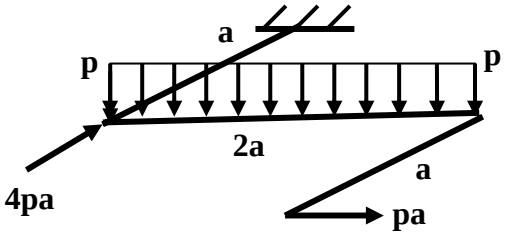

F
3F
F
+
+
3F
N

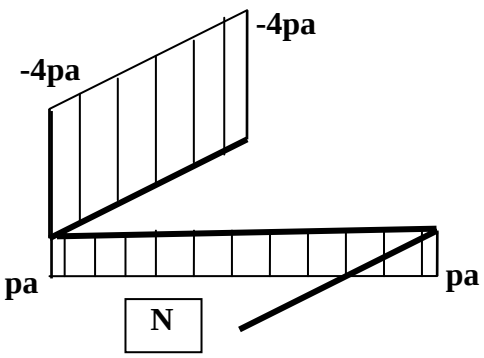

2F
3F
3F
F
T
2F
F

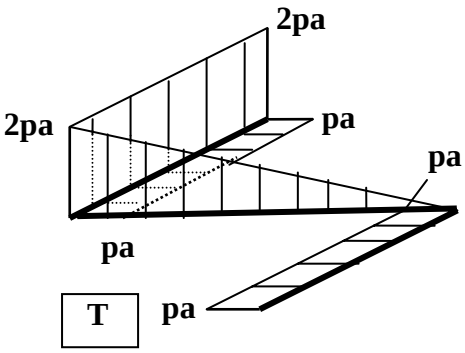

6Fa
Fa
Fa
Fa
2Fa
4Fa
Mi

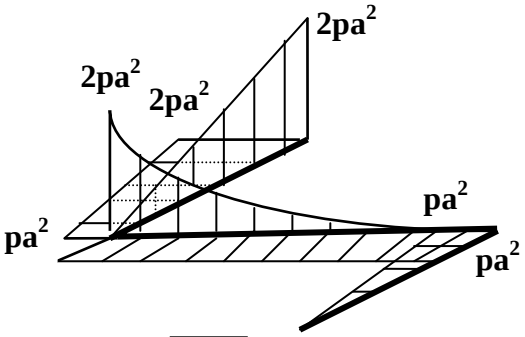

2Fa
2Fa
Mt

3R.50

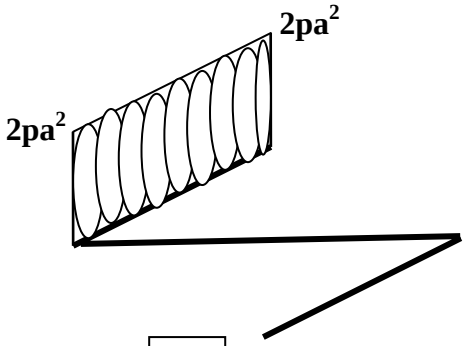

a
p
p
2a
a
4pa
pa


-4pa
-4pa
pa
pa
N


2pa
2pa
pa
pa
pa
pa
T

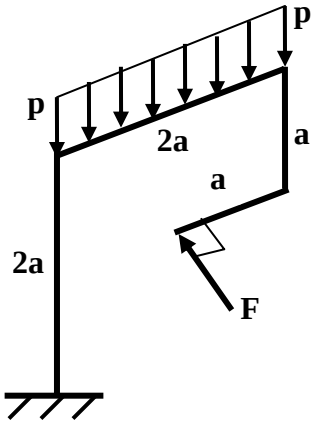


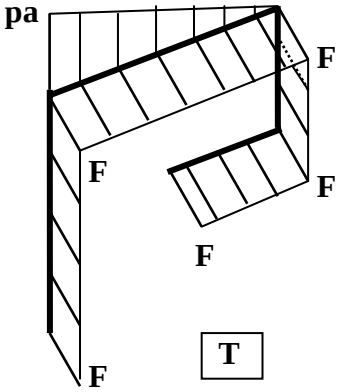
M_i



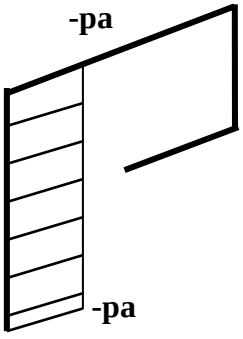
M_t

3R.51

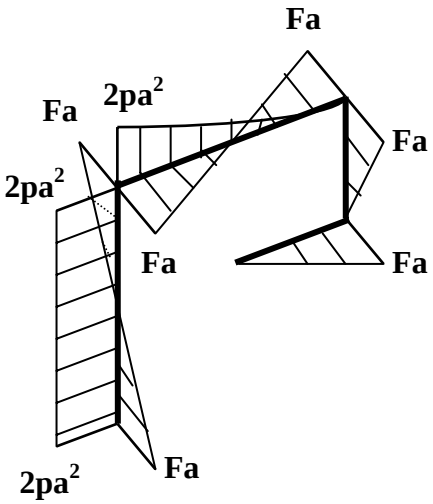




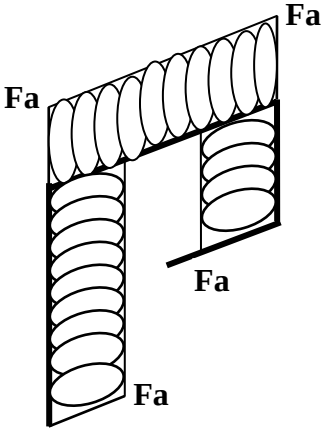
T



N

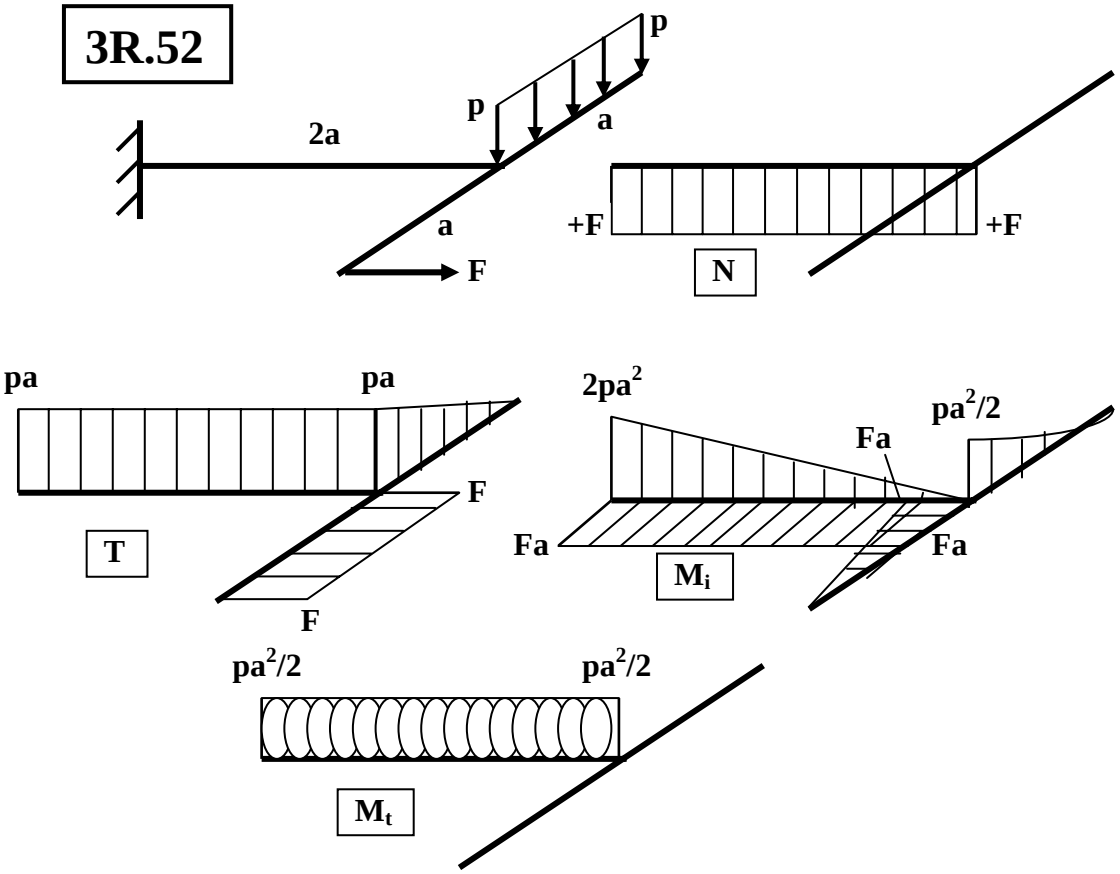


M_i

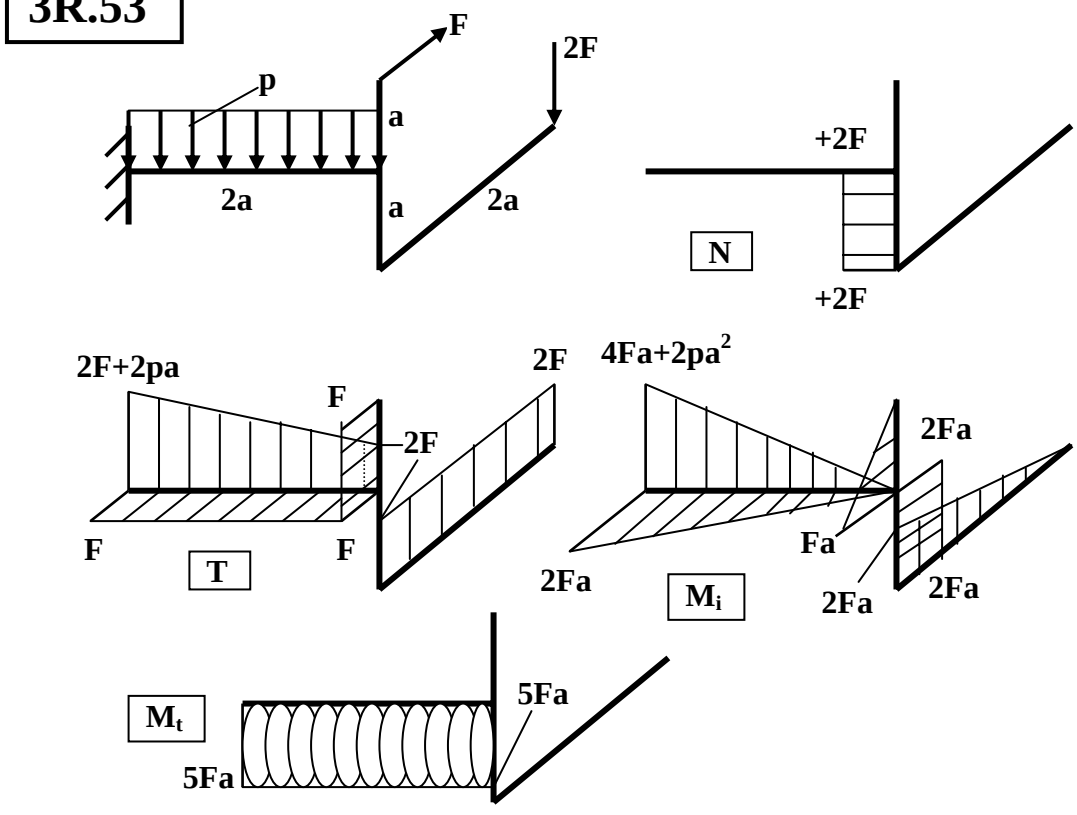


M_t

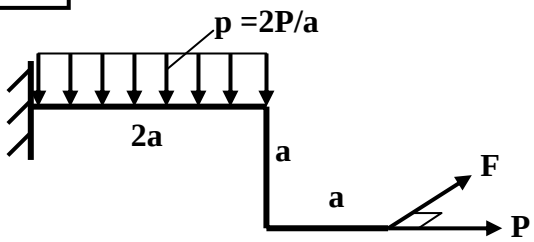
3R.52

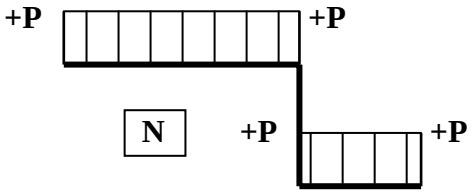

p
p
a
2a
a
F
+F
+F
N
pa
pa
F
T
F
2pa²
pa²/2
Fa
Fa
Fa
Mi
pa²/2
pa²/2
Mt

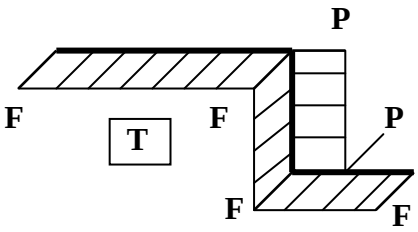
3R.53

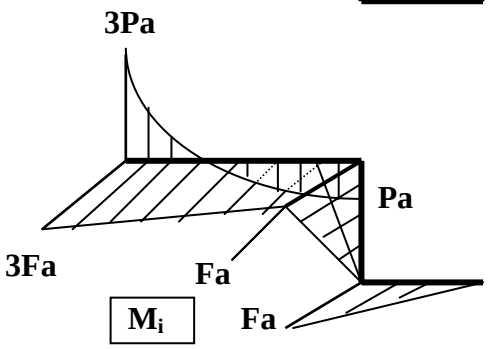

F
2F
p
a
2a
a
2a
+2F
N
+2F
2F+2pa
F
2F
F
F
T
2F
4Fa+2pa²
2Fa
Fa
2Fa
Mi
2Fa
2Fa
Mt
5Fa
5Fa

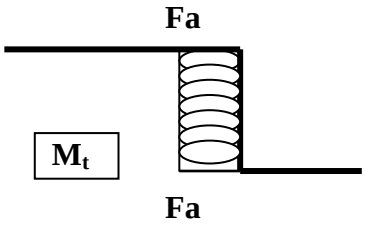
3R.54


p =2P/a
2a
a
a
F
P

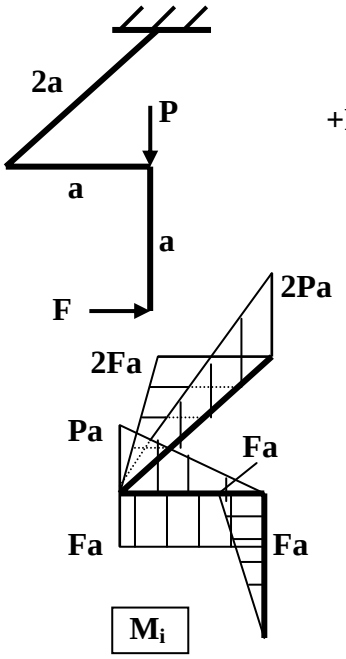

+P
+P
N
+P
+P

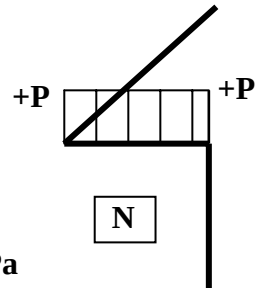

P
F
F
T
P
F
F

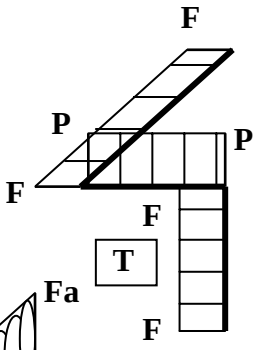

3Pa
Pa
3Fa
Fa
Mi
Fa

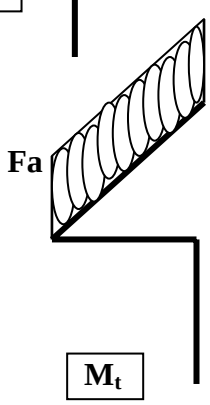

Fa
Mt
Fa

3R.55

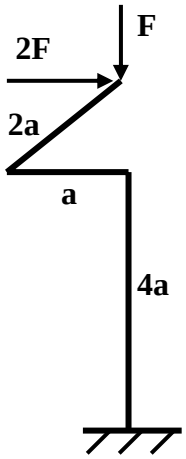

2a
P
a
a
F
2Pa
2Fa
Pa
Fa
Fa
Fa
Mi

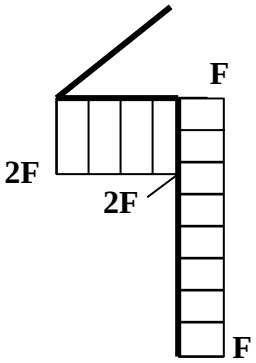

+P
+P
N


F
P
P
F
F
T
F

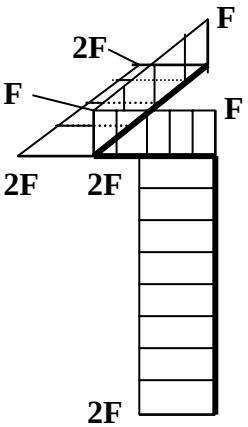

Fa
Fa
Mt

3R.56

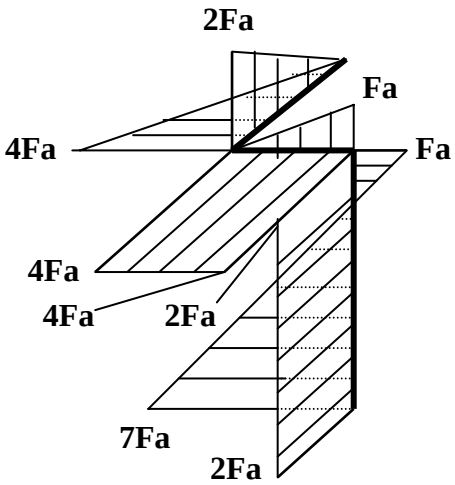




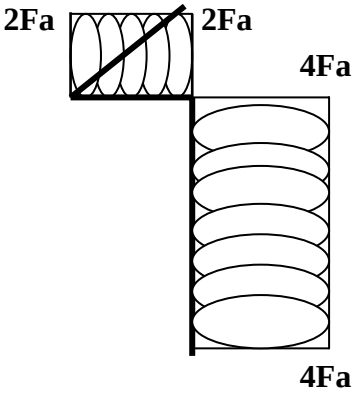
N



T

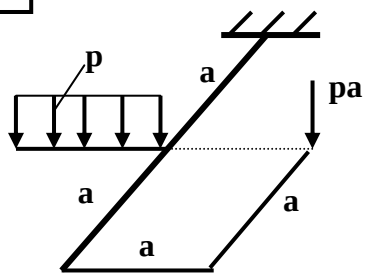


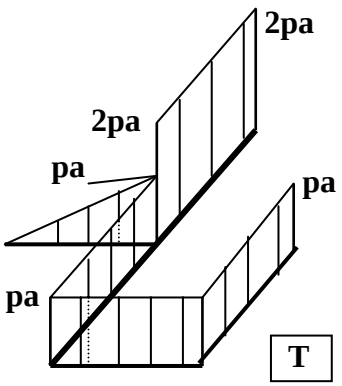
M_i



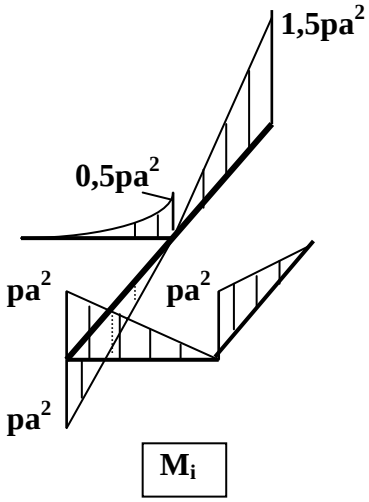
M_t

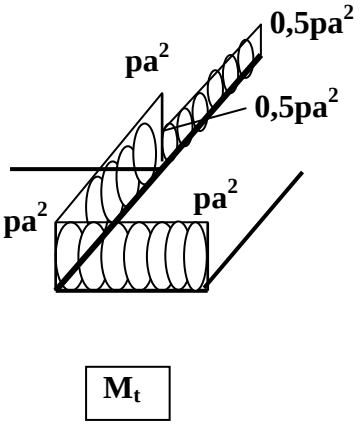
3R.57



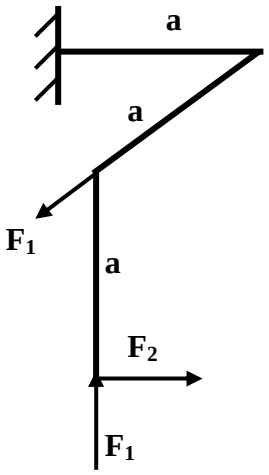


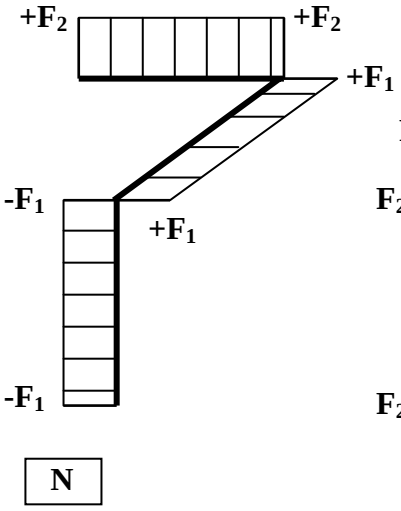
T

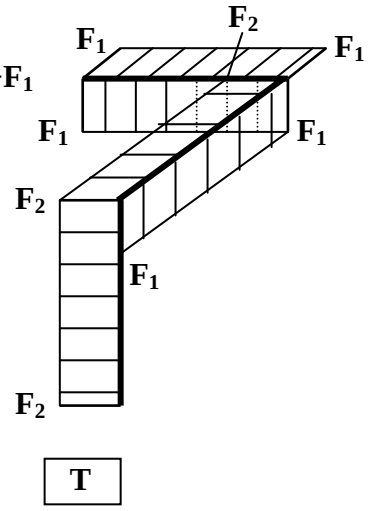

1,5pa²
0,5pa²
pa²
pa²
pa²
Mi

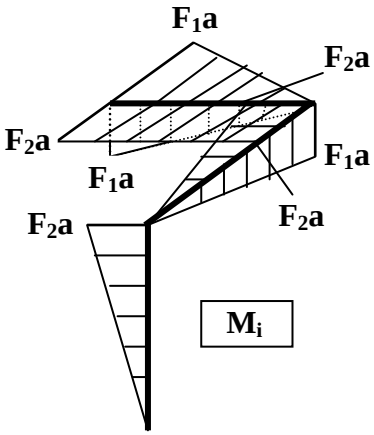

0,5pa²
pa²
0,5pa²
pa²
pa²
Mt

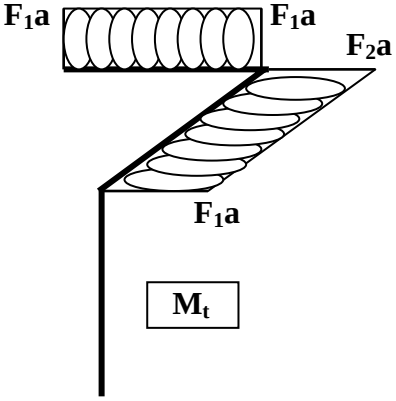
3R.58


a
a
F1
a
F2
F1

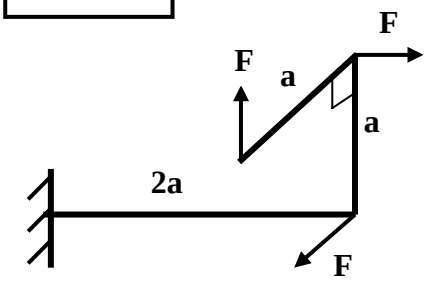

+F2
+F2
+F1
-F1
+F1
-F1
N

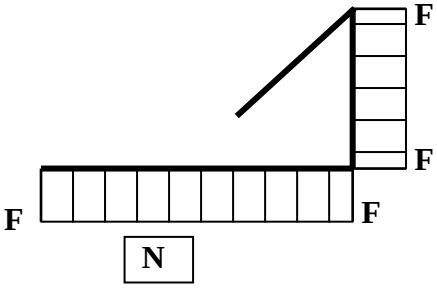

F1
F2
F1
F1
F1
F2
F1
F2
T


F1a
F2a
F2a
F1a
F1a
F2a
F2a
Mi

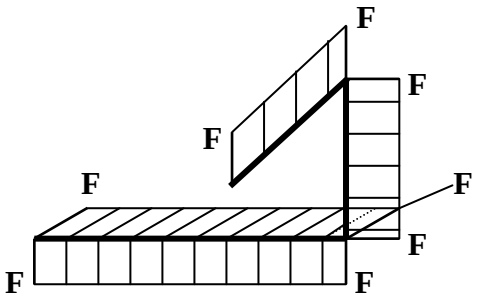

F1a
F1a
F2a
F1a
Mt

3R.59

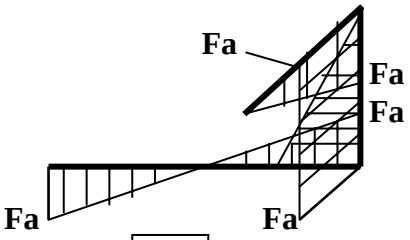




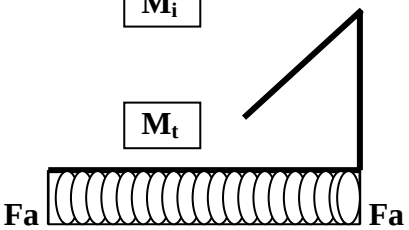
N



T

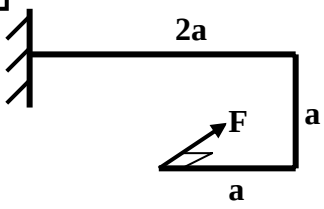


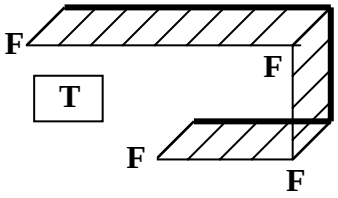
M_i



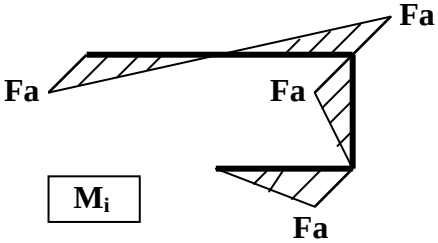
M_t

3R.60

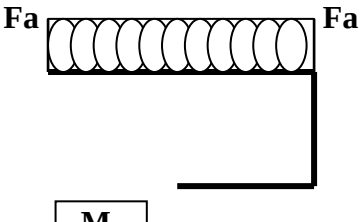




T

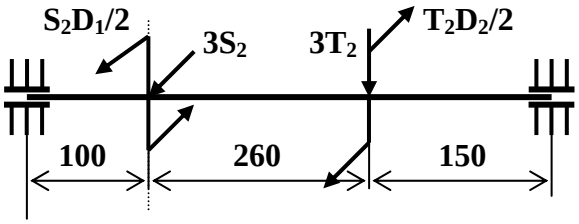


M_i

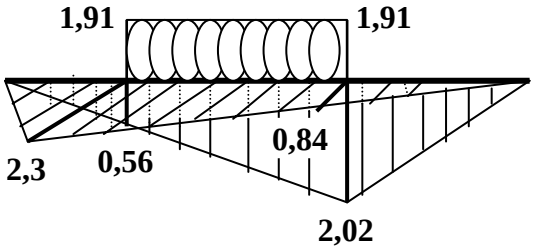


M_t

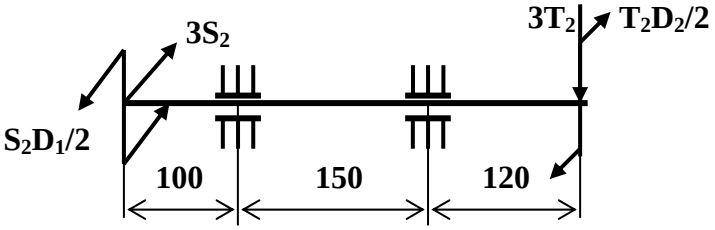
3R.61



M [kNm]

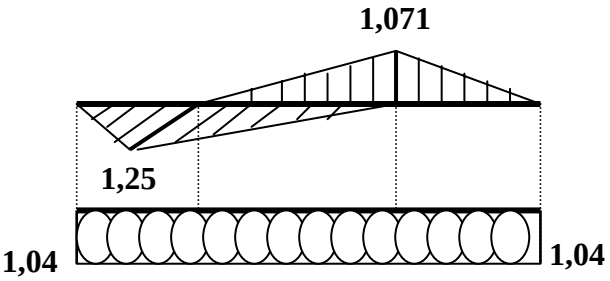


3R.62

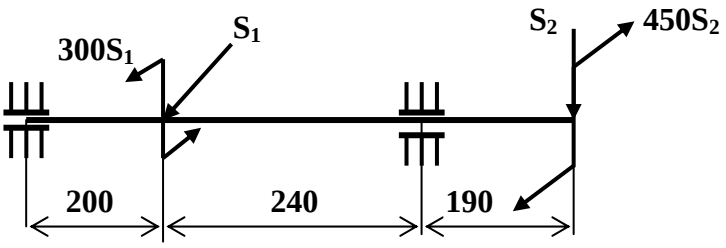


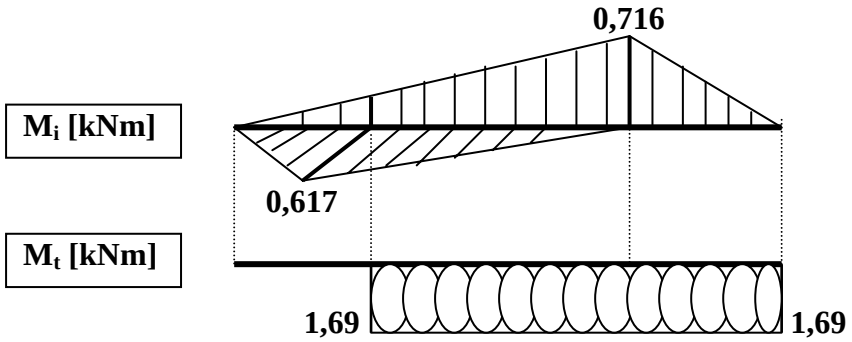
Mi [kNm]

Mt [kNm]

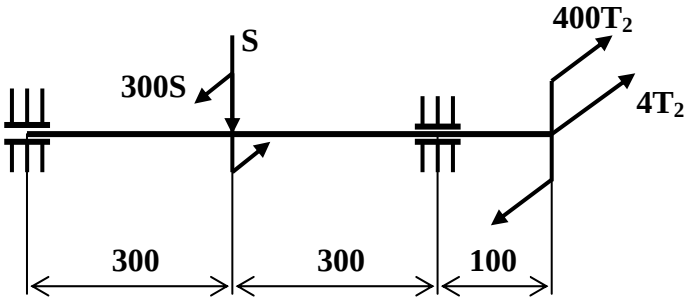


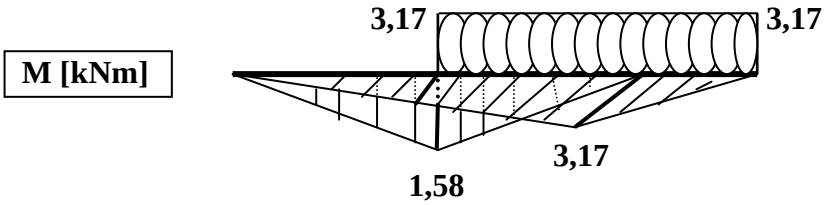
3R.63


300S1
S1
S2
450S2
200
240
190

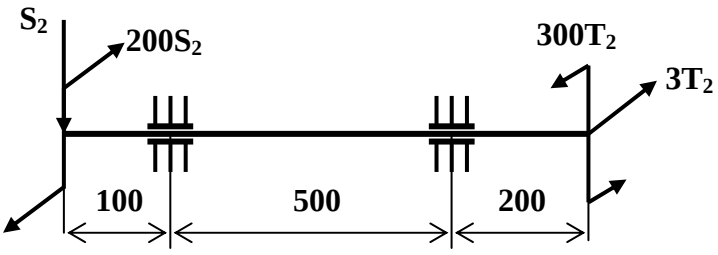

Mi [kNm]
Mt [kNm]
0,716
0,617
1,69
1,69

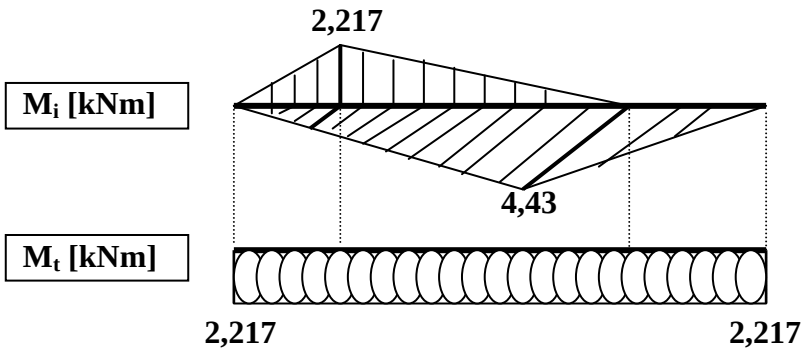
3R.64


300S
S
400T2
4T2
300
300
100

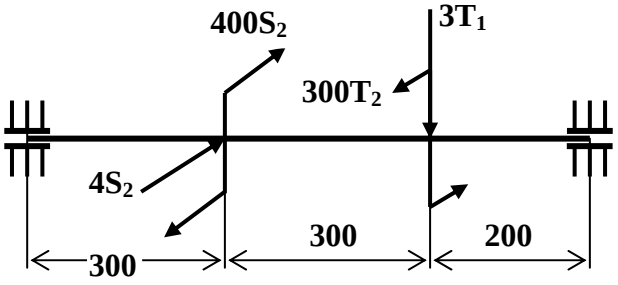

M [kNm]
3,17
3,17
3,17
1,58

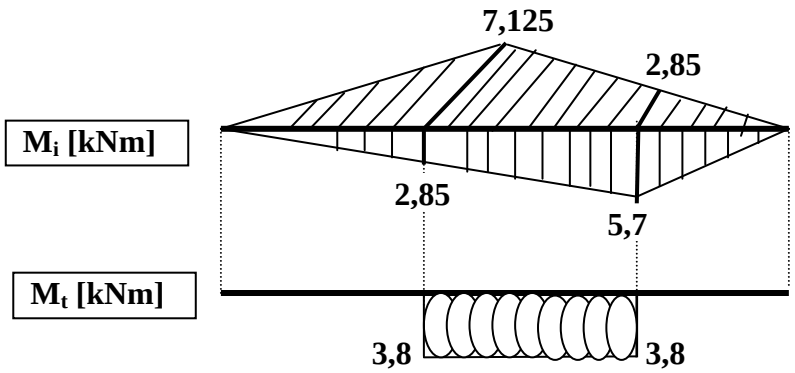
3R.65


S2
200S2
300T2
3T2
100
500
200

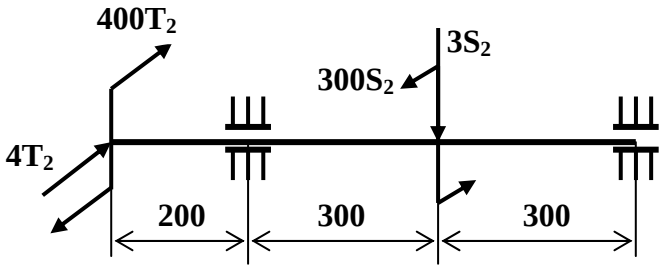

2,217
Mi [kNm]
4,43
Mt [kNm]
2,217
2,217

3R.66

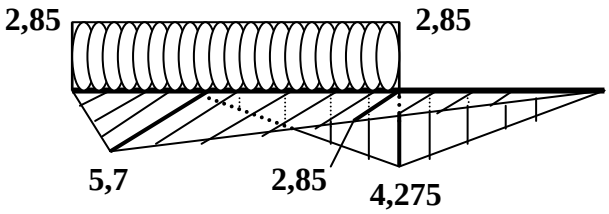

400S2
3T1
300T2
4S2
300
300
200


7,125
2,85
Mi [kNm]
2,85
5,7
Mt [kNm]
3,8
3,8

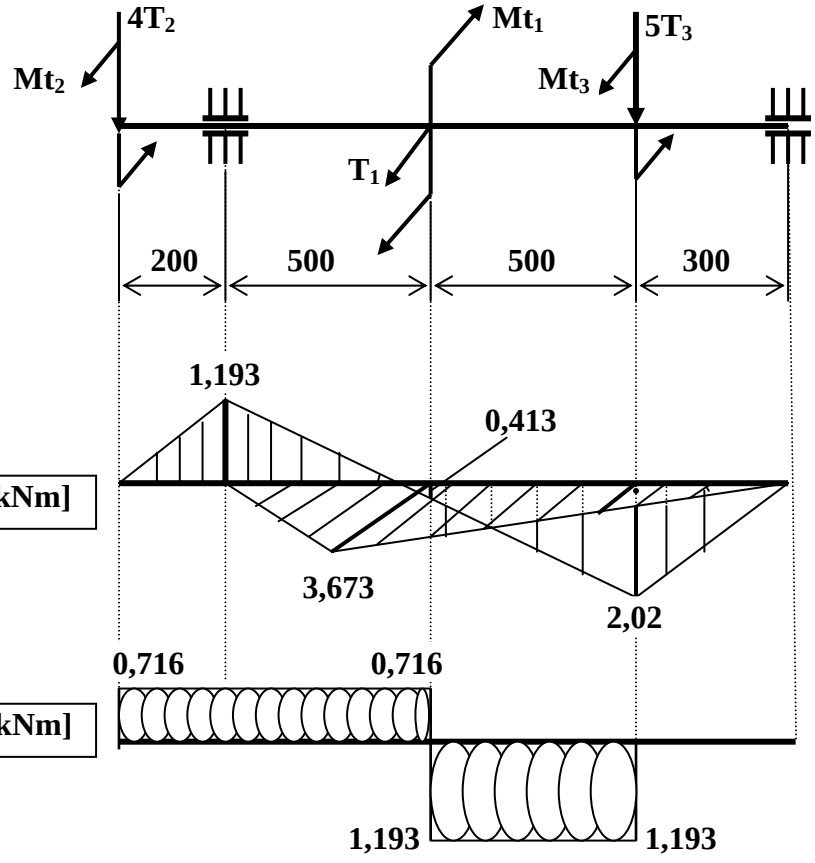
3R.67



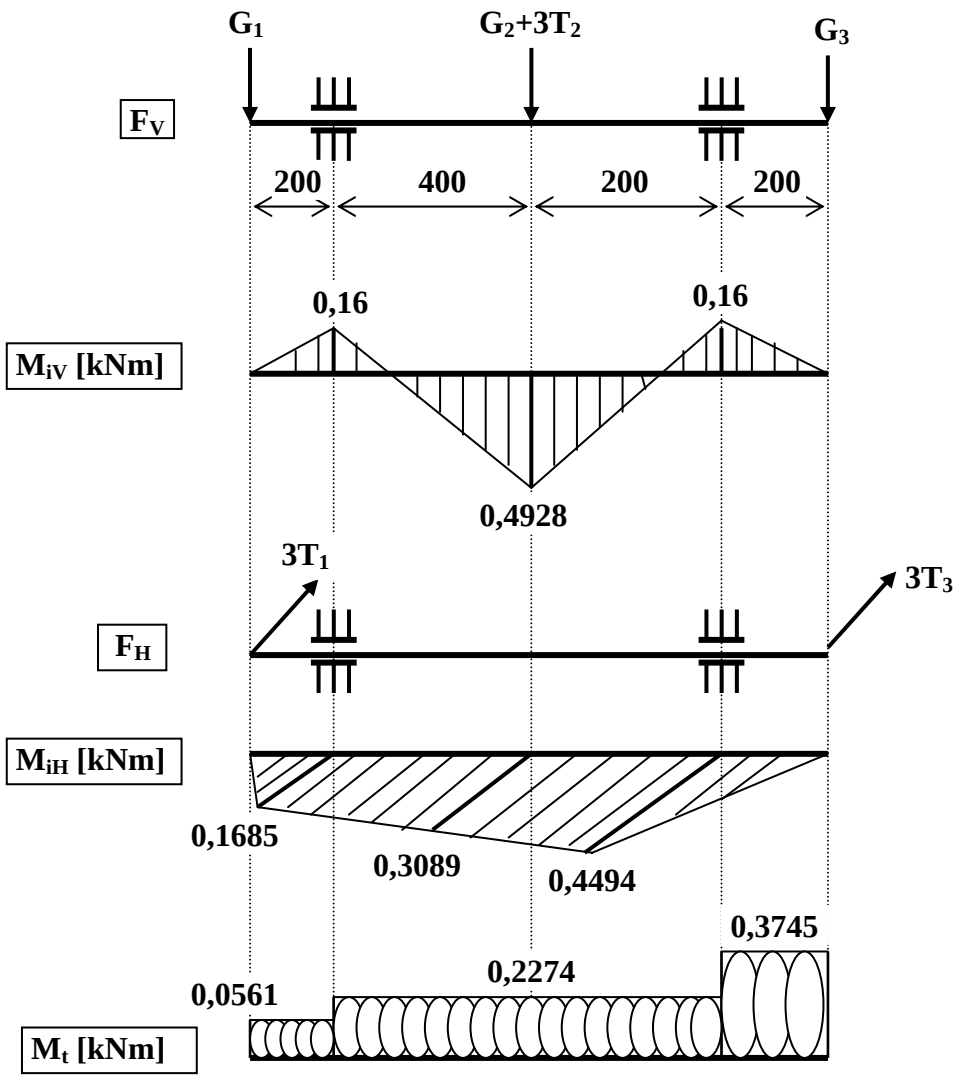
M [kNm]



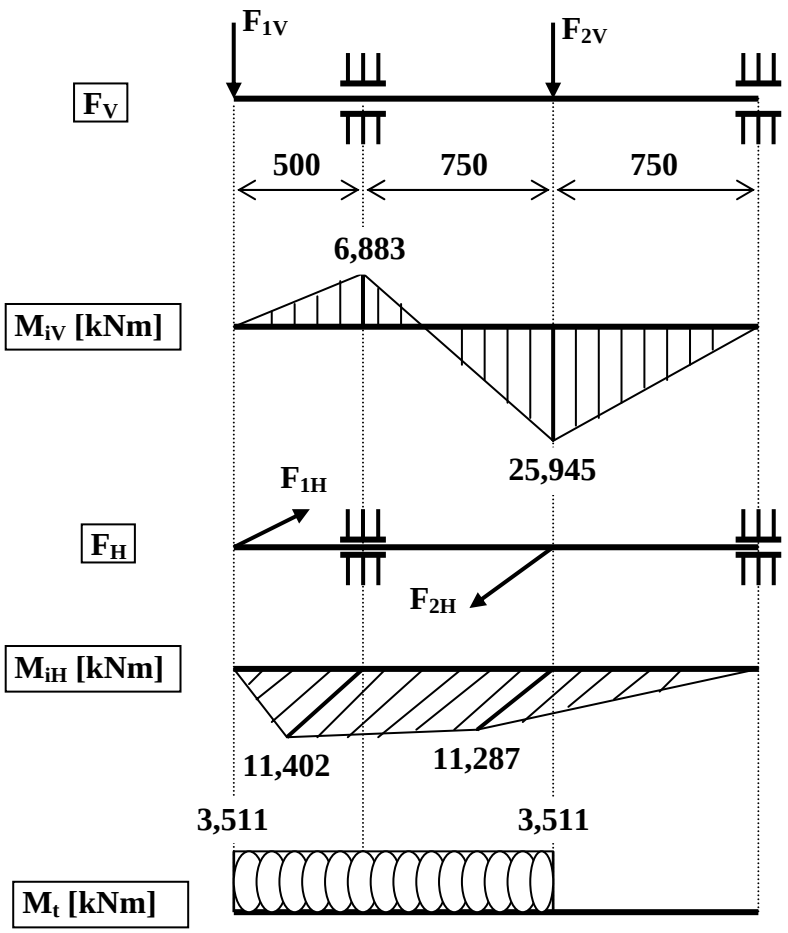
3R.68



3R.69


G1
G2+3T2
G3
FV
200
400
200
200
0,16
0,16
MiV [kNm]
0,4928
3T1
3T3
FH
MiH [kNm]
0,1685
0,3089
0,4494
0,3745
0,2274
0,0561
Mt [kNm]

3R.70



unde:

$F_{1V} = G_1 + 3T_1\sin30^0$, $F_{2V} = G_2 + 3T_2\sin45^0$, $F_{1H} = -3T_1\cos30^0$, $F_{2H} = 3T_2\cos45^0$

4. CARACTERISTICI GEOMETRICE ALE SUPRAFEȚELOR PLANE

4.1 Considerații generale

În relațiile de calcul ale tensiunilor din secțiunile transversale ale elementelor de rezistență solicitate, precum şi în formulele de calcul a deformațiilor acestora, intervin nişte mărimi, numite **caracteristici geometrice.**

În cazul barelor drepte solicitate numai de efort axial (de întindere sau compresiune), caracteristica geometrică este aria **A** a secțiunii transversale a barei.

În cazul elementelor de rezistență solicitate la torsiune sau la încovoiere pură, caracteristicile geometrice care intervin, depind atât de mărimea ariei, forma secțiunii cât şi de poziția suprafeței secțiunii față de planul forțelor exterioare.

Fie, spre exemplu, aceeaşi bară solicitată de acelaşi sistem de forțe exterioare, dar aşezată față de sistemul forțelor în două variante (Fig.4.1-1).

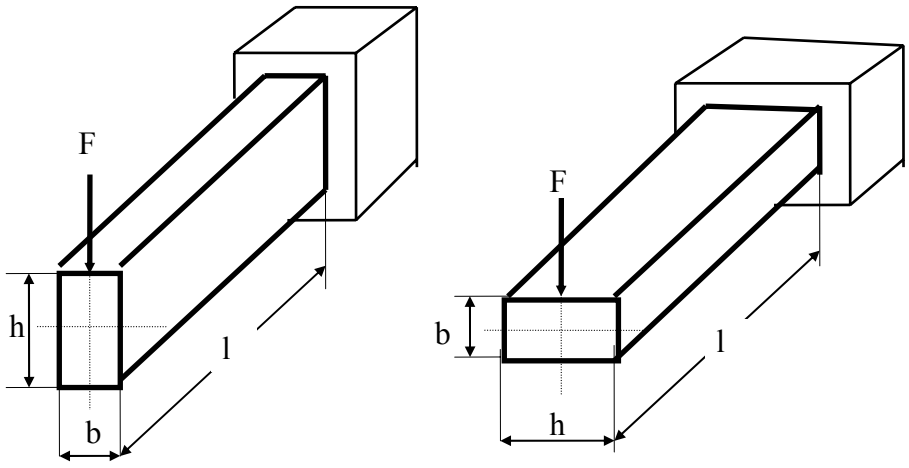


Fig.4.1-1

Cu toate că barele sunt identice, se constată că cea din Fig.4.1-1a prezintă o rezistență la încovoiere mai mare, dar în acelaşi timp,

deplasarea capătului liber este mai mică decât la cea din Fig.4.1-1b. Rezultă din acest exemplu, că deşi aria şi forma suprafeței secțiunii transversale ale celor două bare sunt identice, ele prezintă o rezistență mecanică şi rigiditate la încovoiere, diferite. Această comportare diferită, se explică prin aceea că prin modificarea poziției secțiunii transversale față de planul forțelor, s-au modificat caracteristicile geometrice ale secțiunii transversale ale barei.

Cunoaşterea mărimii caracteristicilor geometrice ale suprafeței secțiunilor transversale ale elementelor de rezistență, este foarte necesară, pentru efectuarea unui calcul de rezistență corect.

În calculul de rezistență sau de rigiditate ale elementelor de rezistență solicitate, intervin în principal următoarele caracteristici geometrice ale suprafeței secțiunii transversale:

- momentele statice,
- momentele de inerție
  - axiale
  - centrifugale
  - polare
- raza de inerție (giratie),
- modulele de rezistență.

Pentru a putea ajunge la faza de definire a principalelor etape pentru determinarea caracteristicilor geometrice ale suprafețelor plane, să abordăm această problemă în mod invers, e drept puțin cam ciudat acest mod de abordare. Optăm pentru acest mod cu scopul de a înțelege mai bine de ce avem nevoie în calculele de rezistență de aceste caracteristici geometrice.

Ne aducem aminte, că pentru calculul de rezistență şi rigiditate este necesar să se cunoască momentele de inerție principale I_1 şi I_2.

Momentele de inerție principale I_1 şi I_2, se determină din relația:

$$I_{1,2} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2} \qquad 4.1\text{-}1$$

Dar cine sunt I_z, I_y, I_{zy} în relația 4.1-1 ? Nu sunt altcineva decât momentele de inerție axiale față de axa Gz, respectiv Gy (I_z respectiv I_y) şi momentul de inerție centrifugal (I_{zy}) față de sistemul central de axe zGy (G fiind centrul de greutate al suprafeței secțiunii).

Iată că trebuie acum să stabilim centrul de greutate G al suprafeței secțiunii, precum şi valoarea momentelor de inerție I_z, I_y, I_{zy}. Dar cum suprafața secțiunii transversale a elementului de rezistență este una oarecare, ne punem întrebarea: cum determinăm pe I_z, I_y şi I_{zy} ?

Aceste caracteristici se pot determina cu relația lui Steiner, dar numai dacă sunt cunoscute momentele de inerție ale suprafețelor simple care formează suprafața secțiunii. Relațiile lui Steiner, sunt:

$$\begin{aligned} I_z &= I_{z_1} + c_1^2 A_1 + I_{z_2} + c_2^2 A_2 + \ldots \\ I_y &= I_{y_1} + d_1^2 A_1 + I_{y_2} + d_2^2 A_2 + \ldots \\ I_{zy} &= I_{z_1 y_1} + c_1 d_1 A_1 + I_{z_2 y_2} + c_2 d_2 A_2 + \ldots \end{aligned} \qquad 4.1\text{-}2$$

unde: $I_{z_1}, I_{z_2}, I_{y_1}, I_{y_2}, I_{z_1 y_1}, I_{z_2 y_2}, \ldots$ sunt momentele de inerție (axiale, respectiv centrifugale) ale suprafețelor simple ce compun suprafața secțiunii transversale,

c_1, c_2, ... - distanța dintre axa centrală Gz şi axele centrale proprii G_1z_1, G_2z_2, ... ale suprafețelor simple componente,

d_1, d_2, ...- distanța dintre axa centrală Gy şi axele centrale proprii G_1y_1, G_2y_2, ... ale suprafețelor simple componente.

După cum se poate constata, este nevoie să se cunoască momentele de inerție ale suprafețelor simple ce compun suprafața secțiunii transversale. Principalele caracteristici geometrice ale celor mai uzuale suprafețe, sunt prezentate în Tabelul 4.2-1.

Cu ajutorul caracteristicilor geometrice prezentate până acuma, se pot determina:

Modulele de rezistență:

$$\begin{aligned} W_{z,min} &= \frac{I_z}{y_{max}} \quad ; \quad W_{z,max} = \frac{I_z}{y_{min}} \\ W_{y,min} &= \frac{I_y}{z_{max}} \quad ; \quad W_{y,max} = \frac{I_y}{z_{min}} \end{aligned} \qquad 4.1\text{-}3$$

unde:

y_{max} - distanța de la axa centrală Gz până la fibrele extreme cele mai îndepărtate,

y_{min} - distanța de la axa centrală Gz, până la fibrele extreme cele mai apropiate,

z_{max} - distanța de la axa centrală Gy, până la fibrele extreme cele mai îndepărtate,

z_{min} - distanța de la axa centrală Gy, până la fibrele extreme cele mai apropiate.

Raza de inerție (girație) este definită astfel:

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \quad ; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad 4.1\text{-}4$$

În calculele de rezistență intervine uneori şi momentul static al unei suprafețe față de o axă***. Momentul static al unei suprafețe față de o axă****, este egal cu produsul dintre aria acelei suprafețe şi distanța de la centrul de greutate al suprafeței până la axa respectivă*.

Momentul static al suprafeței haşurate față de axa z (Fig.4.1-2) este:

$$S_z = A\ d = b\ h\ d \qquad 4.1\text{-}5$$

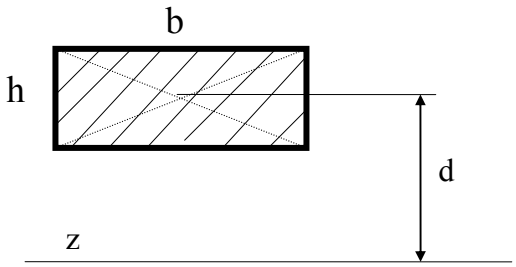


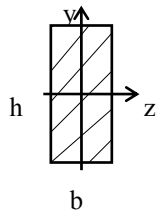
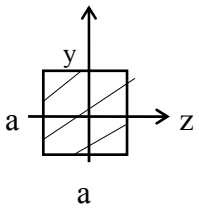
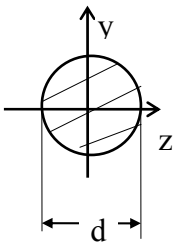
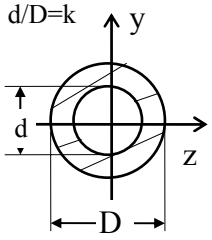
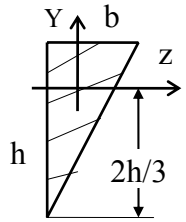
Fig.4.1-2

Alte caracteristici geometrice şi în special pentru suprafețe simple, sunt prezentate în paragraful 4.2.

4.2 Caracteristici geometrice ale unor suprafețe simple

În Tabelul 4.2-1, se prezintă unele caracteristici geometrice pentru câteva suprafețe simple, des întâlnite în practica inginerească.

Tabelul 4.2-1

Suprafața	I_z	I_y	I_{zy}	I_p	$W_{z,min}$	$W_{y,min}$	W_p
	$Bh^3/12$	$b^3h/12$	0	I_z+I_y	$bh^2/6$	$b^2h/6$	-
	$a^4/12$	$a^4/12$	0	$a^4/6$	$a^3/6$	$a^3/6$	-
	$\Pi d^4/64$	$\Pi d^4/64$	0	$\Pi d^4/32$	$\Pi d^3/32$	$\Pi d^3/32$	$\Pi d^3/16$
	$\Pi d^4(1-k^4)/64$	$\Pi d^4(1-k^4)/64$	0	$\Pi d^4(1-k^4)/32$	$\Pi d^3(1-k^4)/32$	$\Pi d^3(1-k^4)/32$	$\Pi d^3(1-k^4)/16$
	$Bh^3/36$	$b^3h/36$	$b^2h^2/72$	I_z+I_y	$bh^2/24$	$b^2h/24$	-

4.3 Etape pentru determinarea caracteristicilor geometrice ale suprafețelor plane

Pentru determinarea principalelor caracteristici geometrice ale suprafețelor plane, caracteristici care întră în calculul de rezistență şi rigiditate ale diferitelor elemente de rezistență, este bine să se parcurgă următoarele etape:

a) *Prima etapă constă în determinarea* ***centrului de greutate*** *al suprafeței pentru a cunoaşte pe unde trec direcțiile centrale (şi ulterior cele principale) de inerție. Pentru determinarea centrului de greutate al suprafeței, se procedează astfel:*

- împărțim suprafața pe care o avem în suprafețe simple (pătrat, dreptunghi, cerc, etc.) la care să se cunoască aria suprafeței şi poziția centrului de greutate,

- notăm suprafețele simple stabilite, cu 1, 2, 3, ...,

- poziționăm centrul de greutate al suprafețelor simple şi le notăm cu G_1, G_2, G_3, ...,

- pentru fiecare suprafață simplă, ducem sistemul de axe central: $z_1G_1y_1$, $z_2G_2y_2$, $z_3G_3y_3$, ...,

- luăm un sistem de axe perpendiculare z_0Oy_0 *față de care calculăm poziția centrului de greutate G al suprafeței compuse (inițiale). Este recomandat ca axa* Oz_0 *să treacă prin punctele cele mai de jos ale suprafeței, iar axa* Oy_0*, prin punctele cele mai din stânga. La un astfel de sistem de referință, toate coordonatele centrelor de greutate G_1, G_2, G_3, ... ale suprafețelor simple, vor avea în relațiile de calcul ale centrului de greutate a suprafeței compuse, numai semnul + (plus),*

- se calculează poziția centrului de greutate a suprafeței compuse, cu relațiile:

$$y_G = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{(\pm A_1)y_1 + (\pm A_2)y_2 + (\pm A_3)y_3 + \ldots}{A_{tot}} \qquad 4.3\text{-}1$$

$$z_G = \frac{\sum A_i z_i}{\sum A_i} = \frac{(\pm A_1)z_1 + (\pm A_2)z_2 + (\pm A_3)z_3 + \ldots}{A_{tot}} \qquad 4.3\text{-}2$$

unde:

A_1, A_2, A_3, ..., -ariile suprafețelor simple stabilite,

y_1, y_2, y_3, ..., -distanța dintre axa de referință Oz_0 *şi axele* G_1z_1, G_2z_2, G_3z_3, ...,

z_1, z_2, z_3, ..., -distanța dintre axa de referință Oy_0 *şi axele* G_1y_1, G_2y_2, G_3y_3, ...

În relațiile 4.3-1 şi 4.3-2 la A_1, A_2, A_3, ..., s-a pus semnul ± deoarece în aceste relații, ariile suprafețelor simple stabilite intră cu semn, după cum urmează:

- semnul + (plus) pentru suprafețe pline,

- semnul – (minus) pentru suprafețe goluri.

După determinarea centrului de greutate G al suprafeței compuse, acesta se poziționează pe secțiunea compusă şi se duc axele centrale Gz şi Gy.

Se poate trece acum la determinarea principalelor caracteristici geometrice ale suprafeței. Mai întâi:

- *Se determină distanțele dintre axa centrală* Gz *şi axele* G_1z_1, G_2z_2, G_3y_3,.... *Aceste distanțe se notează cu c_1, c_2, c_3, ...,*
- *Se determină distanțele dintre axa centrală* Gy *şi axele* G_1y_1, G_2y_2, G_3y_3, ... *Aceste distanțe se notează cu d_1, d_2, d_3,.... Distanțele c_i situate sub axa centrală* Gz *au semnul – (minus), iar distanțele d_i aflate la stânga axei centrale* Gy, *au de asemenea semnul – (minus).*

b) ***Determinarea momentelor de inerție axiale şi centrifugale***, se face cu relațiile lui Steiner:

$$I_z = \pm I_{z_1} + c_1^2(\pm A_1) \pm I_{z_2} + c_2^2(\pm A_2) \pm ... \qquad 4.3\text{-}3$$

$$I_y = \pm I_{y_1} + d_1^2(\pm A_1) \pm I_{y_2} + d_2^2(\pm A_2) \pm ... \qquad 4.3\text{-}4$$

$$I_{zy} = \pm I_{z_1y_1} + c_1d_1(\pm A_1) \pm I_{z_2y_2} + c_2d_2(\pm A_2) \pm ... \qquad 4.3\text{-}5$$

unde:

$I_{z_1}, I_{z_2}, \cdots$ sunt momentele de inerție axiale ale suprafețelor simple, calculate față de axele lor centrale G_1z_1, G_2z_2,... (vezi şi Tabelul 4.2-1)

$I_{y_1}, I_{y_2}, \cdots$ sunt momentele de inerție axiale ale suprafețelor simple, calculate față de axele lor centrale G_1y_1, G_2y_2,...(vezi şi Tabelul 4.2-1),

$I_{z_1y_1}, I_{z_2y_2}, \cdots$ sunt momentele de inerție centrifugale ale suprafețelor simple, calculate față de sistemul de axe central propriu $z_1G_1y_1$, $z_2G_2y_2$, ... (vezi şi Tabelul 4.2-1),

Unitatea de măsură pentru I_z, I_y, I_{zy}, este [m^4]. În construcția de maşini se utilizează de obicei [mm^4] sau [cm^4].

Atenție: ***Pentru suprafețele goluri, la Iz_i, Iy_i, Iz_iy_i, se pune semnul –(minus) iar distanțele c_i şi d_i intră şi ele cu semn***.

Toate suprafețele care au cel puțin o axă de simetrie, au $I_{zy}=0$ (vezi şi Tabelul 4.2-1).

c) Având cunoscute momentele de inerție axiale, se pot ***determina razele de inerție*** (girație) ale suprafeței, utilizând relațiile:

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} > 0 \qquad 4.3\text{-}6$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} > 0 \qquad 4.3\text{-}7$$

unde:

A -aria totală a secțiunii.

Raza de inerție se măsoară în [m], [mm] sau [cm].

d) ***Modulele de rezistență*** față de axele centrale Gz şi Gy, se calculează cu relațiile:

$$W_{z,\min} = \frac{I_z}{|y_{\max}|} \quad ; \quad W_{z,\max} = \frac{I_z}{|y_{\min}|} \qquad 4.3\text{-}8$$

$$W_{y,\min} = \frac{I_y}{|z_{\max}|} \quad ; \quad W_{y,\max} = \frac{I_y}{|z_{\min}|} \qquad 4.3\text{-}9$$

unde:

y_{max} respectiv y_{min} - distanța de la axa centrală Gz până la fibrele extreme cele mai îndepărtate, respectiv fibrele extreme cele mai apropiate,

z_{max}, z_{min} - distața de la axa centrală Gy până la fibrele extreme cele mai îndepărtate, respectiv fibrele extreme cele mai apropiate.

Unitatea de măsură pentru modulul de rezistență este [m^3], dar în construcția de maşini, frecvent se utilizează unitățile [mm^3] sau [cm^3].

e) ***Valorile momentelor de inerție axiale şi centrifugale*** față de un sistem de axe central z_1Gy_1 rotit cu un unghi α față de sistemul central zGy, pot fi determinate cu relațiile:

$$I_{z_1} = \tfrac{1}{2}(I_z + I_y) + \tfrac{1}{2}(I_z - I_y)\cos 2\alpha - I_{zy}\sin 2\alpha \qquad 4.3\text{-}10$$

$$I_{y_1} = \tfrac{1}{2}(I_z + I_y) - \tfrac{1}{2}(I_z - I_y)\cos 2\alpha + I_{zy}\sin 2\alpha \qquad 4.3\text{-}11$$

$$I_{z_1y_1} = \tfrac{1}{2}(I_z - I_y)\sin 2\alpha + I_{zy}\cos 2\alpha \qquad 4.3\text{-}12$$

f) Există un sistem de axe central 1G2 rotit cu unghiul α_1 față de sistemul central zGy, față de care momentele de inerție axiale I_z, I_y, au valori extreme (maxime, respectiv minime) şi față de care momentul de inerție centrifugal I_{zy} este nul. Acest sistem central de axe este un ***sistem central principal***, axele acestuia sunt ***axe centrale principale de inerție***, iar momentele de inerție axiale față de aceste axe, se numesc ***momente de inerție axiale principale***.

Valoarea momentelor de inerție principale, notate cu $\mathbf{I_1}$, respectiv $\mathbf{I_2}$, se determină cu relațiile:

$$I_1 = \tfrac{1}{2}(I_z + I_y) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2} = I_{max} > 0 \qquad 4.3\text{-}13$$

$$I_2 = \tfrac{1}{2}(I_z + I_y) - \tfrac{1}{2}\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2} = I_{min} > 0 \qquad 4.3\text{-}14$$

Dacă ne interesează şi poziția direcției principale de inerție G1 (față de care momentul de inerție are valoare maximă, $I_1=I_{max}$), aceasta este dată de unghiul α_1 a cărui valoare se determină cu relația:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} arc\,tg\left(-\frac{2I_{zy}}{I_z - I_y}\right) \qquad 4.3\text{-}15$$

Poziția celeilalte axe principale de inerție G2 (față de care momentul de inerție are valoarea minimă, $I_2 = I_{min}$) este dată de relația:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \Pi / 2 \qquad 4.3\text{-}16$$

Dacă $\alpha_1 < 0$ (negativ), rotirea axei Gz pentru obținerea direcției principale G1, se face în sensul acelor de ceasornic, iar dacă $\alpha_1 > 0$ (pozitiv), rotirea axei centrale Gz se face în sens invers acelor de ceasornic (sens trigonometric). Rotirea lui Gz spre Gy în acest caz se face pe drumul cel mai scurt.

Dacă $I_{zy} < 0$, atunci direcția G1 trece prin primul cadran, adică cadranul zGy şi față de această axă se obține valoarea maximă a momentului de inerție axial I_{max}, care se notează atunci cu I_1. Momentul de inerție axial cu valoarea minimă, se notează cu I_2 şi se obține față de axa principală de inerție G2.

g) Aşa cum s-au determinat modulele de rezistență W_z, W_y față de direcțiile centrale Gz, respectiv Gy, tot aşa se determină şi ***modulele de rezistență principale*** ($W_{1,min}$, $W_{1,max}$, $W_{2,min}$, $W_{2,max}$), adică față de axele principale de inerție.

4.4 Exemple de determinare a principalelor caracteristici geometrice ale suprafețelor plane

4.4.1 *Fie suprafața plană din Fig.4.4.1-1 care reprezintă secțiunea transversală a unui element de rezistență. Să se calculeze:*

a) momentele de inerție axiale I_z , I_y ,

b) razele de inerție i_z , i_y ,

c) modulele de rezistență $W_{z,min}$, $W_{z,max}$, $W_{y,min}$, $W_{y,max}$,

d) momentele de inerție principale I_1 , I_2 şi direcțiile principale de inerție,

e) momentul static al tălpii de sus față de axa centrală Gz.

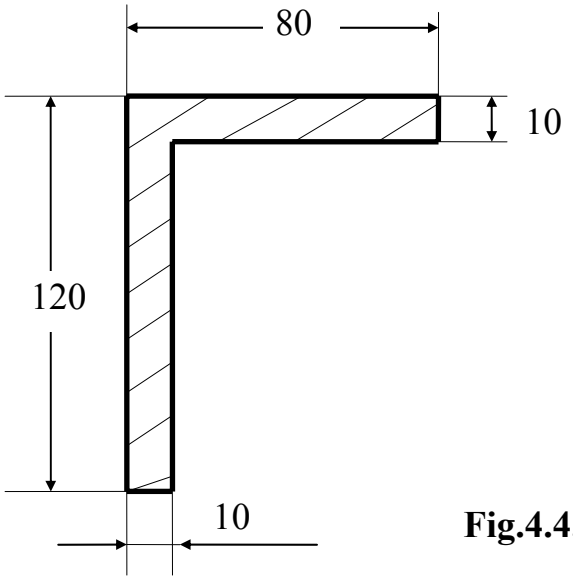


Fig.4.4.1-1

Rezolvare :

Pentru a determina caracteristicile geometrice propuse, se parcurg pas cu pas, etapele prezentate la paragraful 4.3.

Recomand următorul procedeu: pe o coală de hârtie, format A4, desenați secțiunea din Fig.4.4.1-1 şi pe baza acestei figuri faceți tot ce se prezintă în continuare (pe foaia voastră) şi confruntați cu ce se calculează şi prezintă în continuare.

- Împărțim suprafața în două suprafețe simple pline (Fig.4.4.1-2) şi le notăm cu 1, respectiv cu 2.

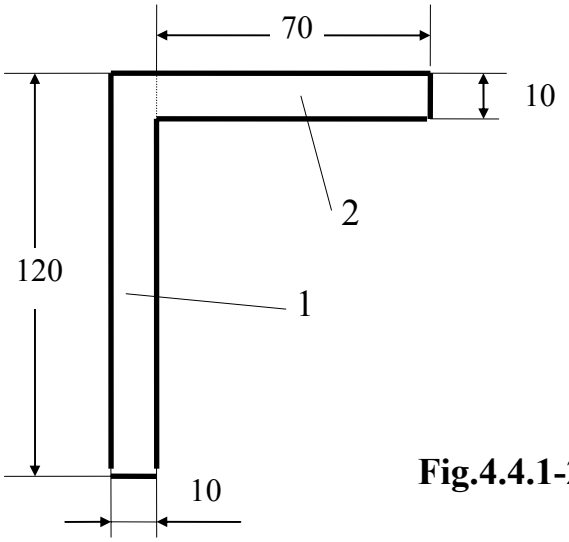


Fig.4.4.1-2

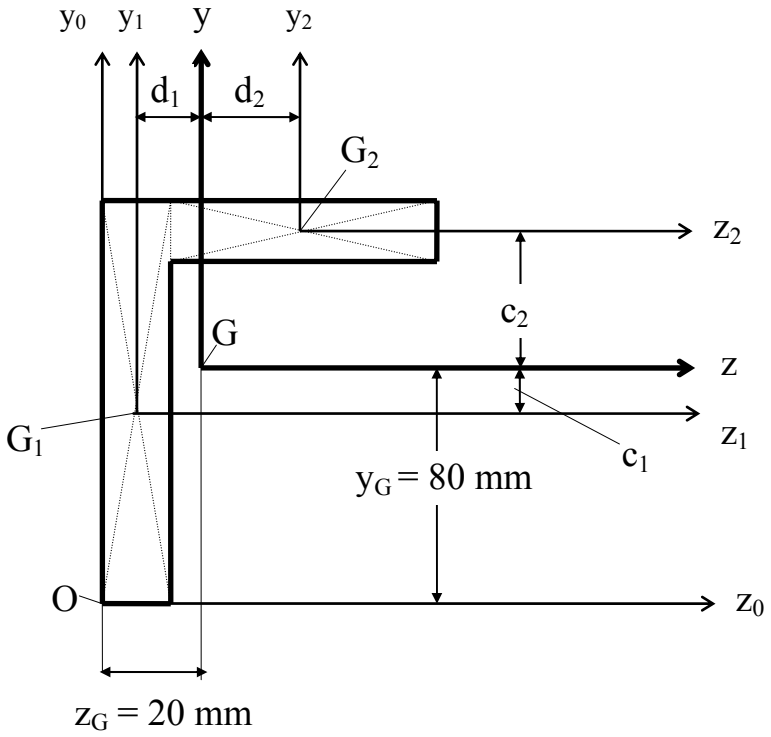


Fig.4.4.1-3

- Poziționăm centrele de greutate ale celor două suprafețe simple în care am împărțit secțiunea, pe care le notăm cu G_1, G_2 (Fig.4.4.1-3).
- Ducem sistemele de axe $z_1G_1y_1$, respectiv $z_2G_2y_2$ (Fig.4.4.1-3).
- Luăm sistemul de axe z_0Oy_0 față de care calculăm poziția centrului de greutate G (Fig.4.4.1-3).

- Calculăm poziția centrului de greutate G al suprafeței cu relațiile 4.3-1, respectiv 4.3-2:

$$y_G = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_{tot}} = \frac{120 \cdot 10 \cdot 60 + 70 \cdot 10 \cdot 115}{120 \cdot 10 + 70 \cdot 10} = 80 \quad \text{mm}$$

$$z_G = \frac{A_1 z_1 + A_2 z_2}{A_{tot}} = \frac{120 \cdot 10 \cdot 5 + 70 \cdot 10 \cdot 45}{120 \cdot 10 + 70 \cdot 10} = 19,7 \quad \text{mm}$$

Pentru simplificarea calculelor ulterioare, considerăm z_G = 20 mm.

- Poziționăm centrul de greutate G al suprafeței (Fig.4.4.1-3).
- Determinăm constantele c_1, c_2, d_1, d_2 (Fig.4.4.1-3):

  $c_1 = -(y_G - y_{G1}) = -(80 - 60) = -20$ mm

  $c_2 = y_{G2} - y_G = 115 - 80 = 35$ mm

  $d_1 = -(z_G - z_{G1}) = -(20 - 5) = -15$ mm

  $d_2 = z_{G2} - z_G = 45 - 20 = 25$ mm.

a) Calculăm momentele de inerție axiale şi centrifugal, față de sistemul central zGy (rel.4.3-3...4.3-5):

$$I_z = I_{z_1} + c_1^2 A_1 + I_{z_2} + c_2^2 A_2 = \frac{10 \cdot 120^3}{12} + (-20)^2 \cdot 120 \cdot 10 + \frac{70 \cdot 10^3}{12} + (35)^2 \cdot 70 \cdot 10 =$$
$$= 278 \cdot 10^4 \quad mm^4$$

$$I_y = I_{y_1} + d_1^2 A_1 + I_{y_2} + d_2^2 A_2 = \frac{10^3 \cdot 120}{12} + (-15)^2 \cdot 120 \cdot 10 + \frac{70^3 \cdot 10}{12} + (25)^2 \cdot 70 \cdot 10 =$$
$$\approx 100 \cdot 10^4 \quad mm^4$$

$$I_{zy} = I_{z_1 y_1} + c_1 d_1 A_1 + I_{z_2 y_2} + c_2 d_2 A_2 = 0 + (-20)(-15)120 \cdot 10 + (35)(25)70 \cdot 10 =$$
$$= 97 \cdot 10^4 \quad mm^4$$

b) Razele de inerție (girație) față de cele două axe centrale Gz şi Gy sunt (rel. 4.3-6 şi 4.3-7):

$$i_z = \sqrt{\frac{278 \cdot 10^4}{1900}} = 38,25 \quad mm$$

$$i_y = \sqrt{\frac{100 \cdot 10^4}{1900}} = 22,94 \quad mm$$

c) Modulele de rezistență față de axele centrale Gz şi Gy se determină cu relațiile 4.3-8 şi 4.3-9.

Din Fig.4.4.1-3, rezultă:

$y_{max} = 80$ mm ; $y_{min} = 120 - 80 = 40$ mm

$z_{max} = 80 - 20 = 60$ mm ; $z_{min} = 20$ mm.

Se obține atunci:

$$W_{z,\min} = \frac{I_z}{|y_{\max}|} = \frac{278 \cdot 10^4}{80} = 34,75 \cdot 10^3 \quad mm^3$$

$$W_{z,\max} = \frac{I_z}{|y_{\min}|} = \frac{278 \cdot 10^4}{40} = 69,5 \cdot 10^3 \quad mm^3$$

$$W_{y,\min} = \frac{I_y}{|z_{\max}|} = \frac{100 \cdot 10^4}{60} = 16,67 \cdot 10^3 \quad mm^3$$

$$W_{y,\max} = \frac{I_y}{|z_{\min}|} = \frac{100 \cdot 10^4}{20} = 50 \cdot 10^3 \quad mm^3$$

d) Momentele de inerție principale I_1 şi I_2, se calculează cu relațiile 4.3-13 şi 4.3-14:

$$I_{1,2} = \frac{278 \cdot 10^4}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(278 \cdot 10^4 - 100 \cdot 10^4)^2 + 4(97 \cdot 10^4)^2} =$$

$$= 189 \cdot 10^4 \pm 131,64 \cdot 10^4 \quad mm^4$$

de unde rezultă:

$I_1 = 189\ 10^4 + 131,64\ 10^4 = 320,64\ 10^4$ mm^4

$I_2 = 189\ 10^4 - 131,64\ 10^4 = 57,36\ 10^4$ mm^4

Prima direcție principală de inerție, face cu axa centrală Gz, unghiul:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} arctg(-\frac{2 \cdot 97 \cdot 10^4}{278 \cdot 10^4 - 100 \cdot 10^4}) = \frac{1}{2} arctg(-1{,}089) = -23{,}73^0$$

Deoarece $\alpha_1 < 0$, rotirea se face în sensul acelor de ceasornic (Fig.4.4.1-4).

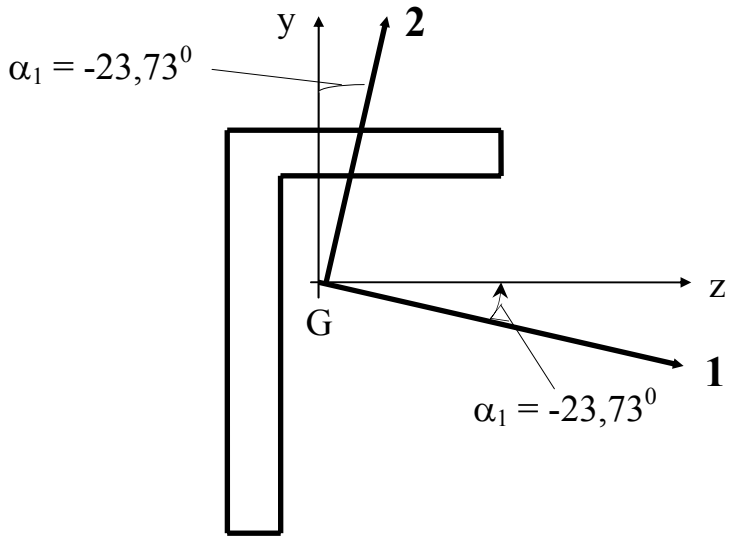


Fig.4.4.1-4

Cum $I_{zy} > 0$, rezultă că axa care trece prin primul cadran (zGy), nu este axa 1, ci axa 2 (vezi Fig.4.4.1-4)

e) Momentul static al suprafeței tălpii de sus, față de axa centrală Gz, se calculează cu relația 4.1-5 (Fig.4.4.1-3):

$$S_{z,A1} = A_1 \, c_2 = 70 \; 10 \; 35 = 24.500 \quad mm^3.$$

$S_{z,A1}$ este pozitiv, deoarece şi c_2 (distanța de la centrul de greutate al suprafeței de arie A_1 până la axa centrală Gz față de care se calculează momentul static) este pozitivă.

4.4.2 *Pentru suprafața plană din Fig.4.4.2-1 să se calculeze:*
a) modulele de rezistență minime,
b) direcțiile principale de inerție,

c) momentele de inerţie principale.

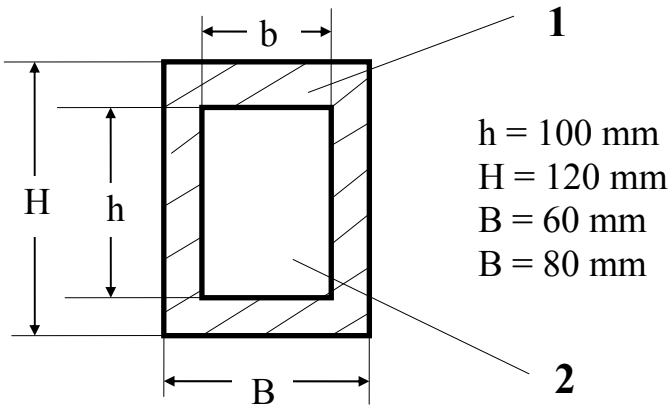


Fig.4.4.2-1

Rezolvare

- Împărţim suprafaţa din Fig.4.4.2-1 în două suprafeţe: una plină de dimensiuni H şi B şi a doua (suprafaţă gol) de dimensiuni b şi h.
- Centrele de greutate G_1 şi G_2 coincid, la fel şi axele lor proprii G_1z_1, G_2z_2, G_1y_1, G_2y_2. De asemenea şi centrul de greutate al întregii secţiuni G, coincide cu centrele G_1 şi G_2 (suprafaţa este dublu simetrică), iar axele centrale Gz şi Gy se suprapun peste axele G_1z_1, G_2z_2, G_1y_1, G_2y_2 (Fig.4.4.2-2)

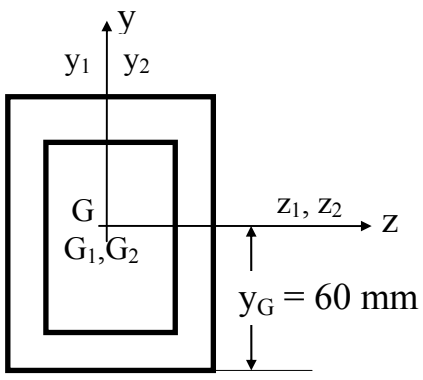


Fig.4.4.2-2

- Distanţele de la axele centrale Gz, respectiv Gy până la axele centrale proprii ale celor două suprafeţe sunt: $c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 0$.

- Valoarea momentelor de inerție axiale şi centrifugale sunt:

$$I_z = I_{z_1} + c_1^2 A_1 - I_{z_2} + c_2^2(-A_2) = \frac{120^3 \cdot 80}{12} + 0^2(120 \cdot 80) - \frac{100^3 \cdot 60}{12} + 0^2(-100 \cdot 60) =$$
$$= 652 \cdot 10^4 \quad mm^4$$

$$I_y = I_{y_1} + d_1^2 A_1 - I_{y_2} + d_2^2(-A_2) = \frac{120 \cdot 80^3}{12} + 0^2(120 \cdot 80) - \frac{100 \cdot 60^3}{12} + 0^2(-100 \cdot 60) =$$
$$= 332 \cdot 10^4 \quad mm^4$$

$$I_{zy} = I_{z_1 y_1} + c_1 d_1 A_1 - I_{z_2 y_2} + c_2 d_2(-A_2) = 0 + 0 - 0 - 0 = 0$$

La $I_{zy} = 0$ se putea ajunge şi fără calcule, deoarece suprafața cercetată (Fig.4.4.2-1) prezintă două axe de simetrie şi este ştiut faptul că suprafețele care prezintă cel puțin o axă de simetrie au momentul de inerție centrifugal I_{zy} nul.

a) Modulele de rezistență minime şi maxime se calculează numai pe baza momentelor de inerție axiale. Pentru acest motiv s-au calculat mai devreme I_z şi I_y. În cazul nostru, modulele de rezistență minime şi maxime față de cele două axe centrale z şi y, sunt egale, deoarece distanțele până la fibrele extreme de la o direcție centrală, sunt egale (vezi Fig.4.4.2-2).

Se obține:

$$W_{z\min} = W_{z\max} = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{I_z}{y_{\min}} = \frac{652 \cdot 10^4}{60} = 108{,}67 \cdot 10^3 \; mm^3$$

$$W_{y\min} = W_{y\max} = \frac{I_{yz}}{z_{\max}} = \frac{I_y}{z_{\min}} = \frac{332 \cdot 10^4}{40} = 83 \cdot 10^3 \; mm^3$$

b) Una din direcțiile principale de inerție face cu direcția centrală Gz, unghiul:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} arctg\left(-\frac{2I_{zy}}{I_z - I_y}\right) = \frac{1}{2} arctg\left(-\frac{2 \cdot 0}{(652 - 332)10^4}\right) = 0$$

Deoarece $\alpha_1 = 0$, rezultă că o direcție principală se suprapune peste direcția centrală Gz, iar cealaltă direcție principală, se suprapune

peste direcția centrală Gy. Asta înseamnă de asemenea că direcțiile centrale Gz şi Gy sunt şi direcții principale de inerție: G1 ≡ Gz şi G2 ≡ Gy.

c) La punctul b) a rezultat că direcțiile centrale Gz şi Gy sunt şi direcții principale de inerție. Rezultă atunci că, momentele axiale de inerție I_z şi I_y sunt momente de inerție principale:

$$I_1 = I_z = 652\ 10^4 \quad mm^4,$$
$$I_2 = I_y = 332\ 10^4 \quad mm^4.$$

Din acest exemplu, se desprinde următoarea ***concluzie foarte importantă***, care ştiută simplifică mult calculele pentru unele cazuri de secțiuni: *la suprafețele care prezintă cel puțin o axă de simetrie şi la care $I_{zy} = 0$, direcțiile centrale Gz şi Gy, sunt şi direcții principale de inerție, iar momentele axiale de inerție I_z şi I_y sunt şi momente de inerție principale. Valoarea cea mai mare dintre I_z şi I_y este I_1, iar cea mai mică valoare o are I_2.*

Aşadar, dacă:

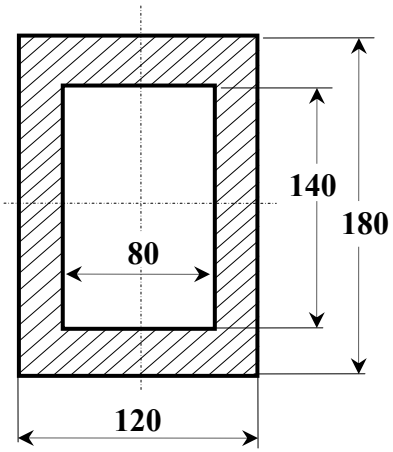
$$I_z > I_y \Rightarrow I_1 = I_z \text{ şi } I_2 = I_y,$$
$$I_z < I_y \Rightarrow I_1 = I_y \text{ şi } I_2 = I_z.$$

4E. Caracteristici geometrice ale suprafețelor plane (Probleme propuse)

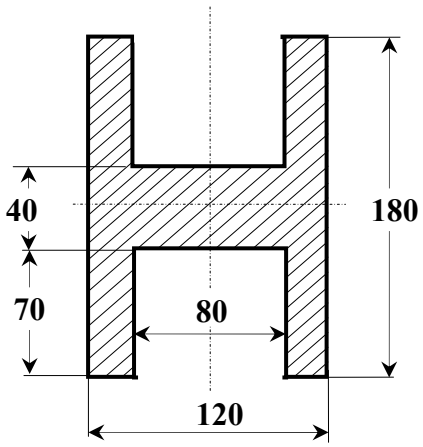
Pentru suprafețele plane din figurile următoare să se determine modulele de rezistență (W_z,W_y), direcțiile principale şi momentele de inerție principale.

Obs. Caracteristicile geometrice ale profilelor laminate se vor lua de la "Rezultate".

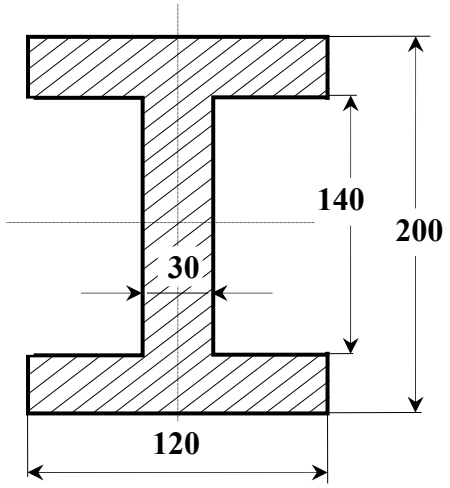
4E.1



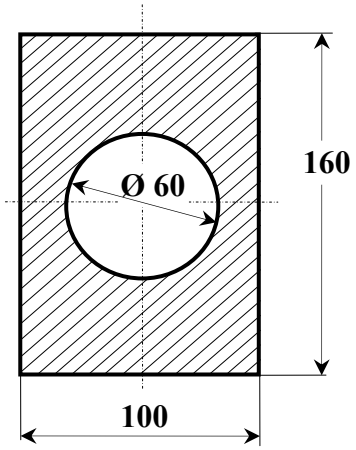
4E.2



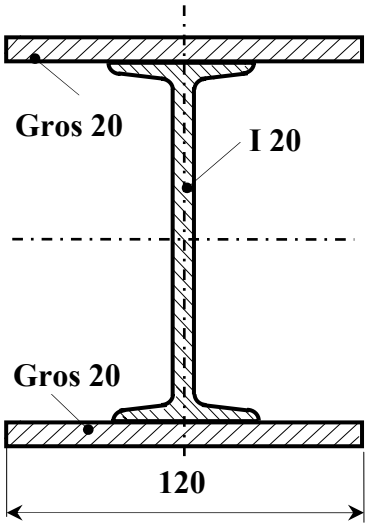
4E.3



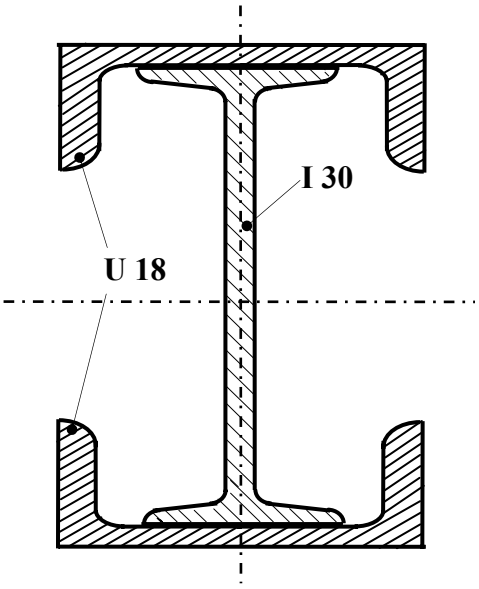
4E.4



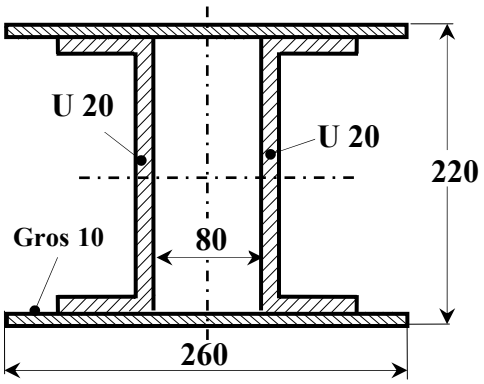
4E.5



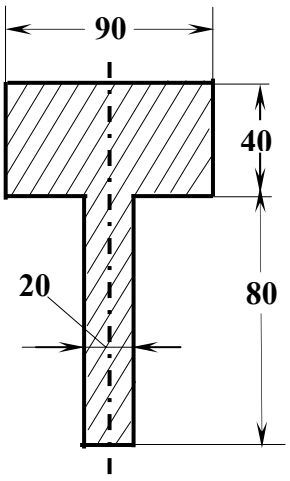
4E.6



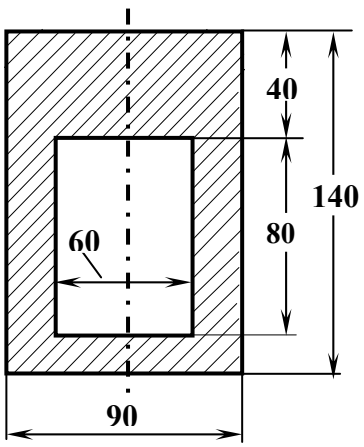
4E.7



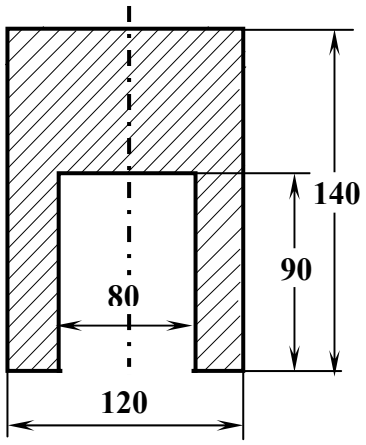
4E.8



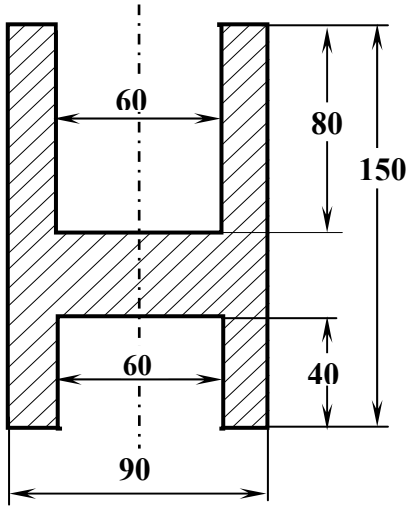
4E.9



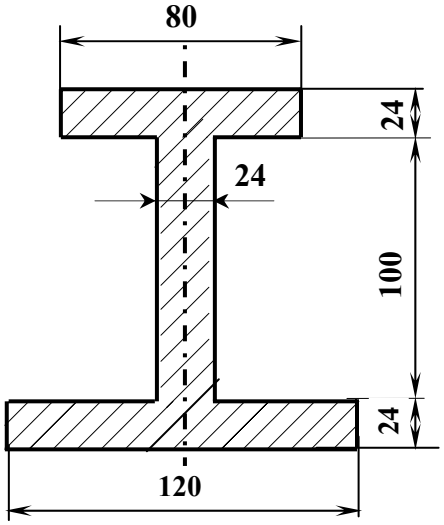
4E.10



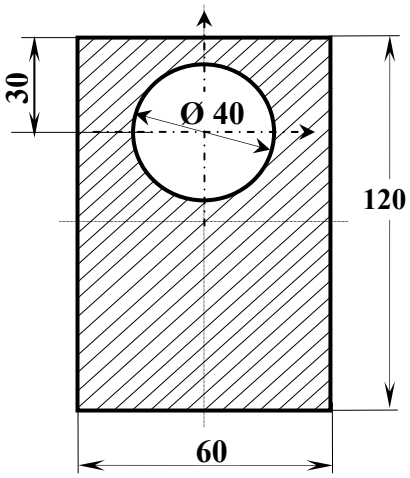
4E.11



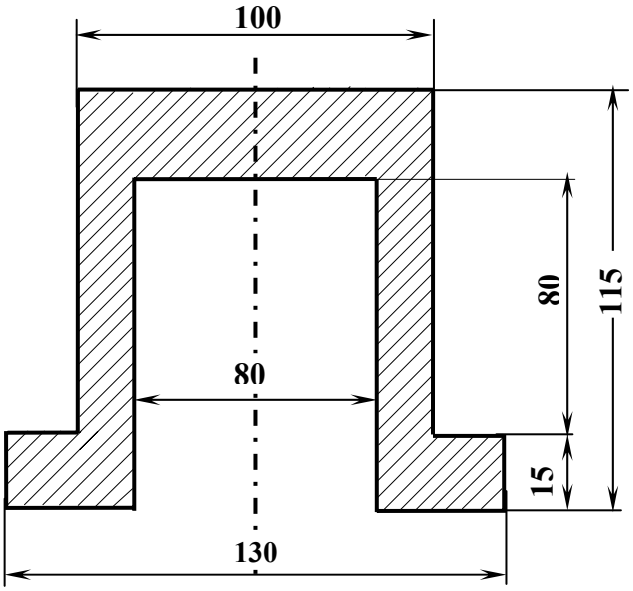
4E.12



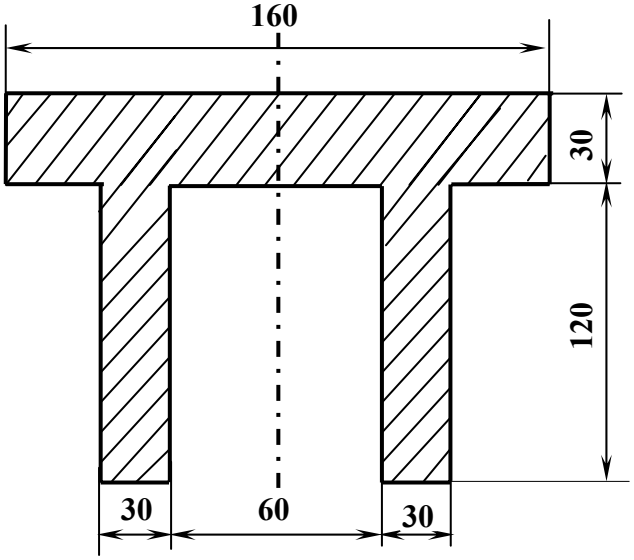
4E.13



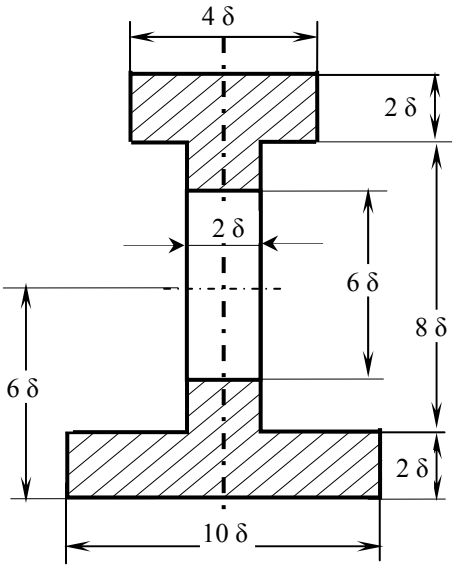
4E.14



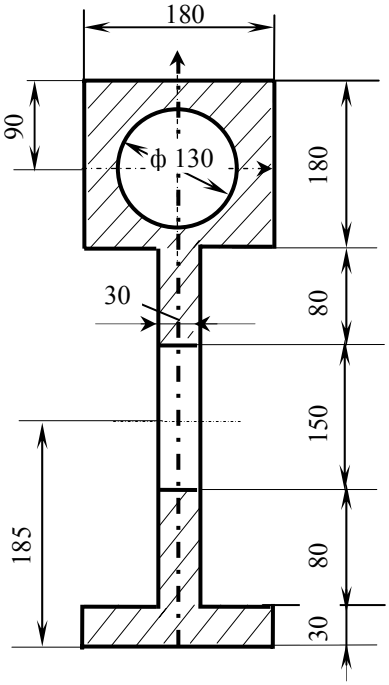
4E.15



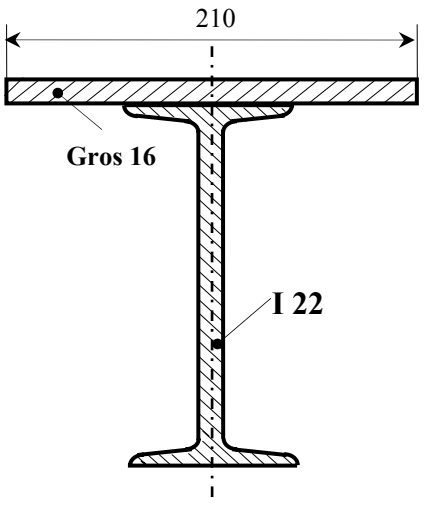
4E.16



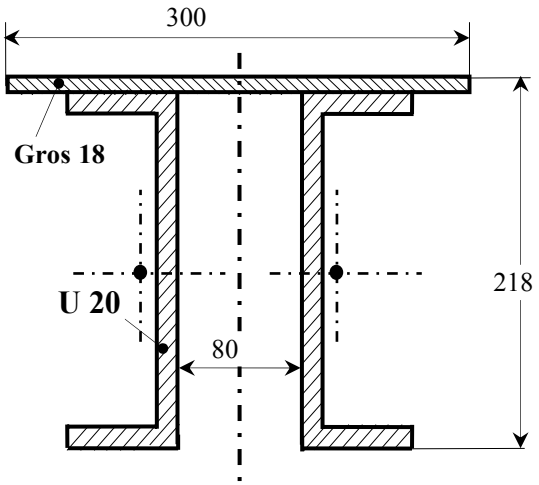
4E.17



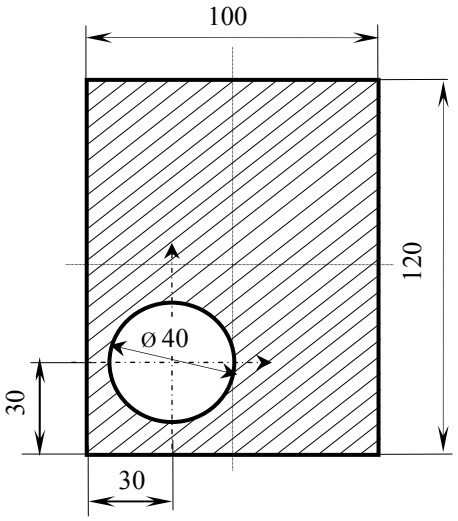
4E.18



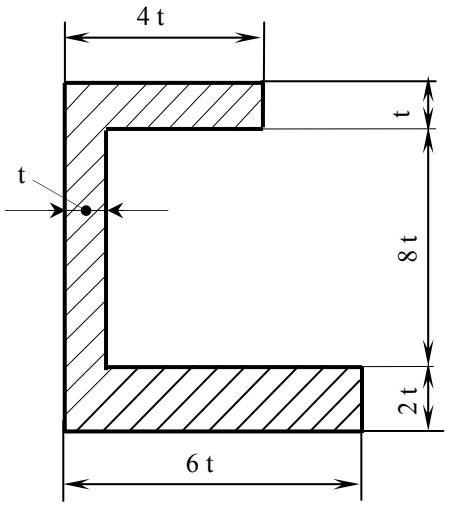
4E.19



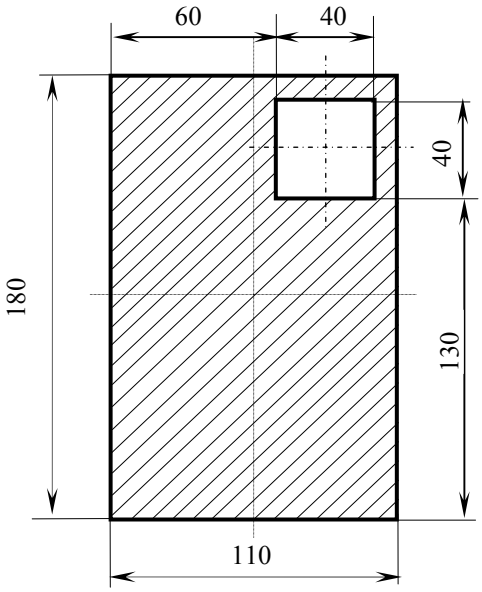
4E.20



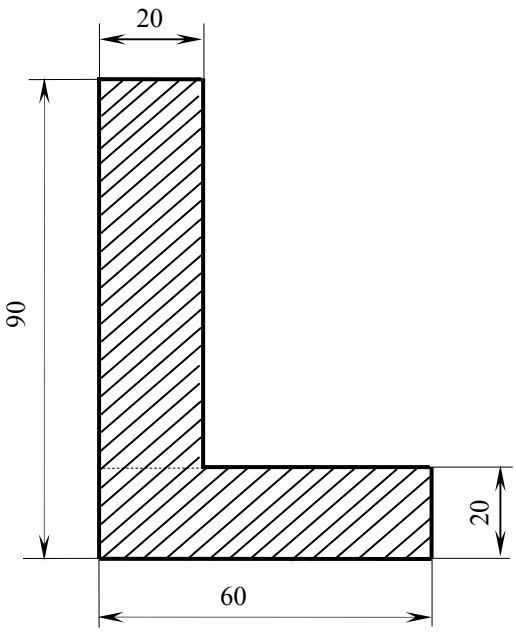
4E.21



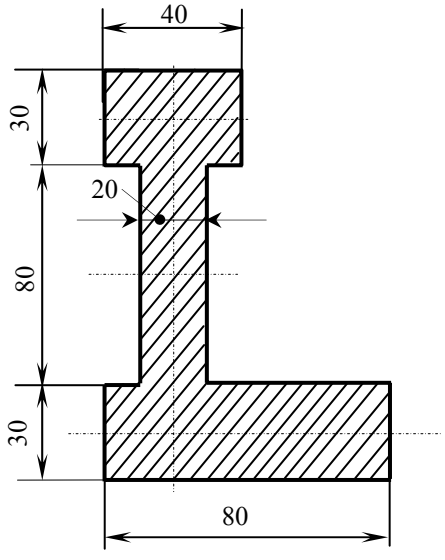
4E.22



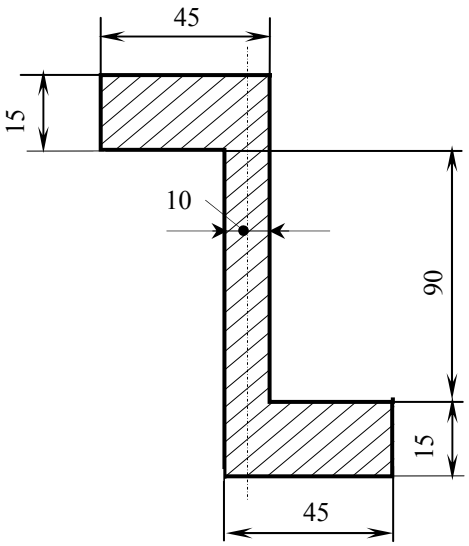
4E.23



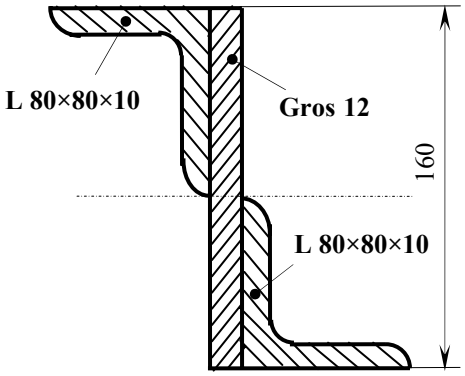
4E.24



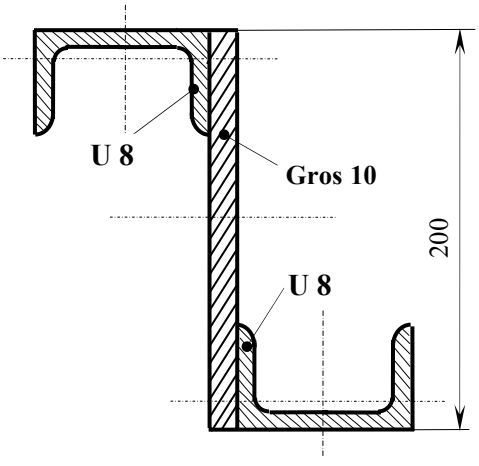
4E.25



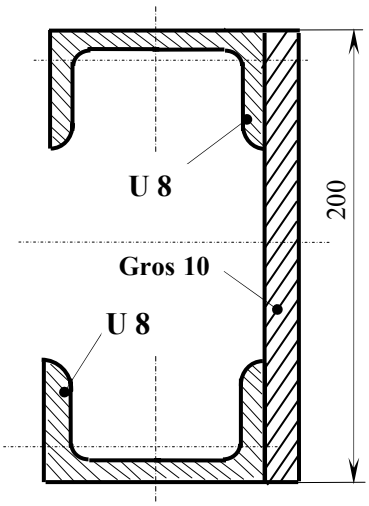
4E.26



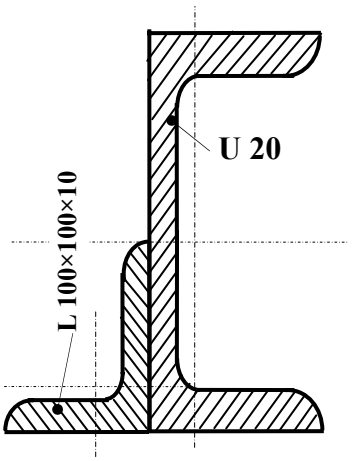
4E.27



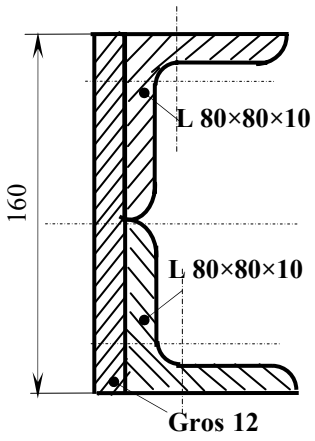
4E.28



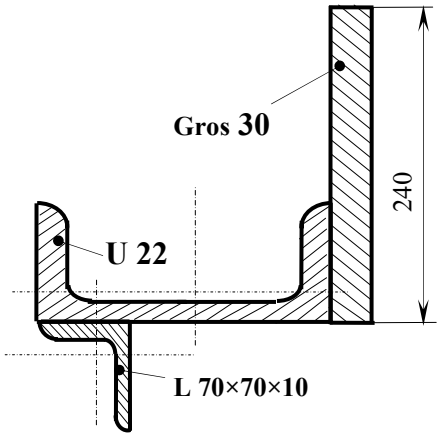
4E.29



4E.30

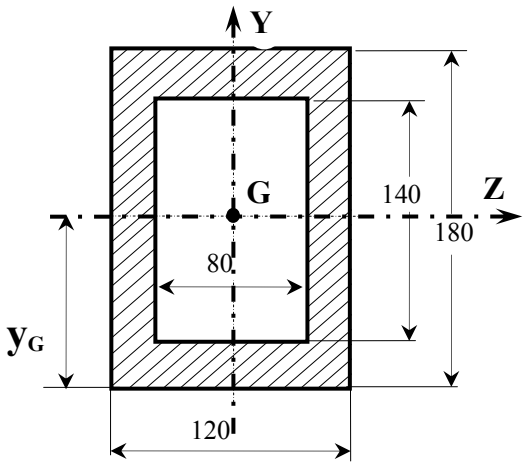


4E.31



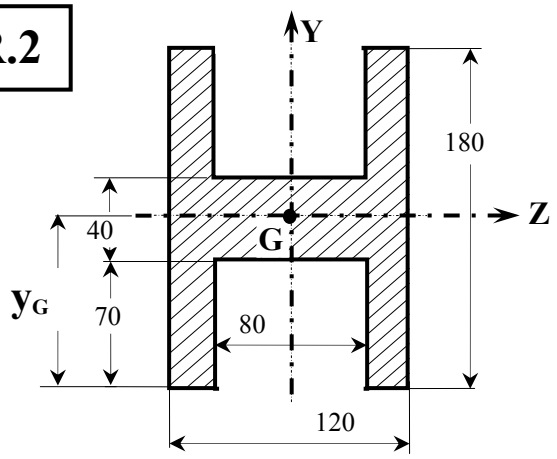
4R. Caracteristici geometrice ale suprafețelor plane (Răspunsuri)

4R.1



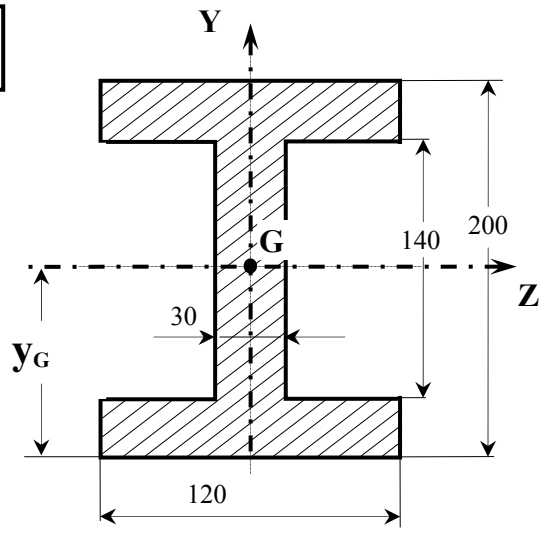
y_G= 90 mm
$I_z = I_1$= 58 320 000 mm^4
$I_y = I_2$= 25 920 000 mm^4
$W_{z,min}$= 648 000 mm^3
$W_{y,min}$= 432 000 mm^3

4R.2



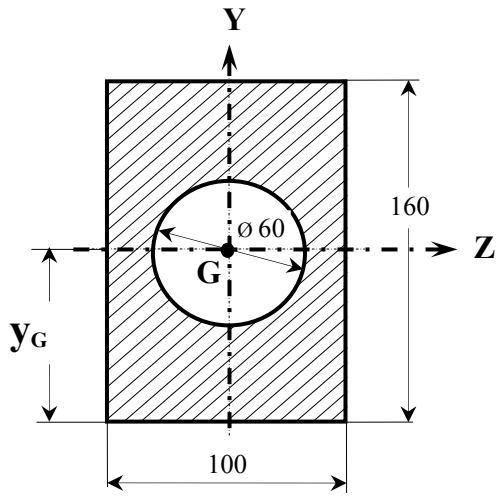
y_G= 90 mm
$I_z = I_1$= 19 866 667 mm^4
$I_y = I_2$= 19 946 667mm^4
$W_{z,min}$= 220 741 mm^3
$W_{y,min}$= 332 444 mm^3

4R.3



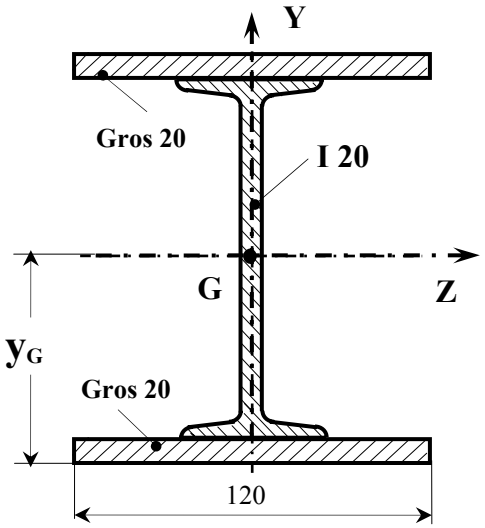
y_G= 100 mm
$I_z = I_1$= 59 420 000 mm^4
$I_y = I_2$= 8 955 000mm^4
$W_{z,min}$= 594 200 mm^3
$W_{y,min}$= 149 250 mm^3

4R.4



y_G= 80 mm
$I_z = I_1$= 33 497 161 mm^4
$I_y = I_2$= 12 697 161 mm^4
$W_{z,min}$= 418 714 mm^3
$W_{y,min}$= 253 943 mm^3

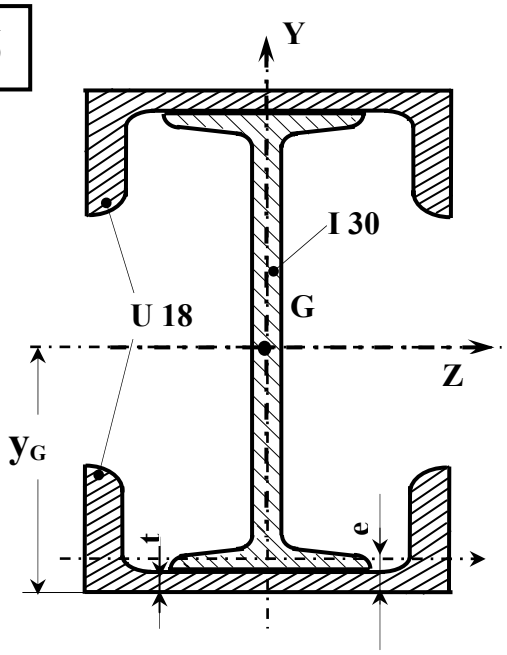
4R.5



y_G= 120 mm
$I_z = I_1$= mm^4
$I_y = I_2$= 25920000 mm^4
$W_{z,min}$= 648000 mm^3
$W_{y,min}$= 432000 mm^3

Din STAS pentru I 20:
h= 200 mm ; b= 90 mm
I_z= 21 400 000 mm^4
I_y= 1 170 000 mm^4
A= 3 350 mm^2

4R.6

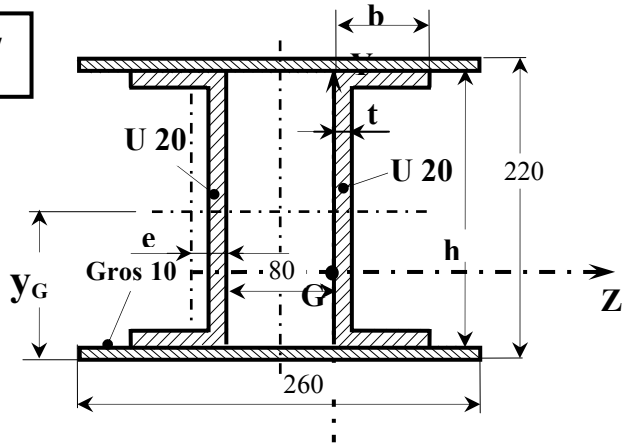


y_G= 158 mm
$I_z = I_1$= 208 166 464 mm^4
$I_y = I_2$= 31 510 000 mm^4
$W_{z,min}$= 1 317 509 mm^3
$W_{y,min}$= 350 111 mm^3

Din STAS pentru I 30:
h= 300 mm ; b= 125 mm
I_z= 98 000 000 mm^4
I_y= 4 510 000 mm^4
A= 6 910 mm^2

Din STAS pentru U 18: h= 180 mm ; b= 70 mm; t=8 mm; e=19,2 mm;
I_z= 13 500 000 mm^4; I_y= 1 140 000 mm^4; A= 2 800 mm^2.

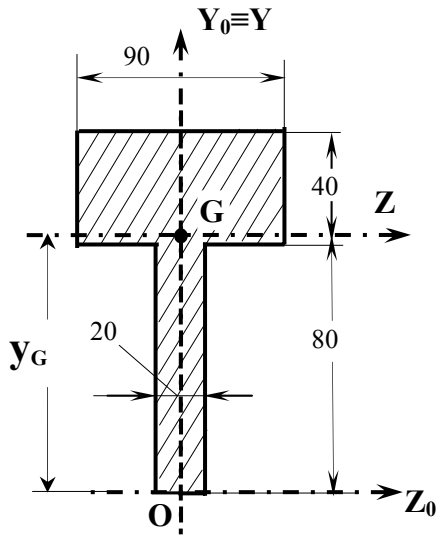
4R.7



y_G= 110 mm
I_z= I_1= 107 013 333 mm^4
I_y= I_2= 55 514 678 mm^4
$W_{z,min}$= 972 848 mm^3
$W_{y,min}$= 427 036 mm^3

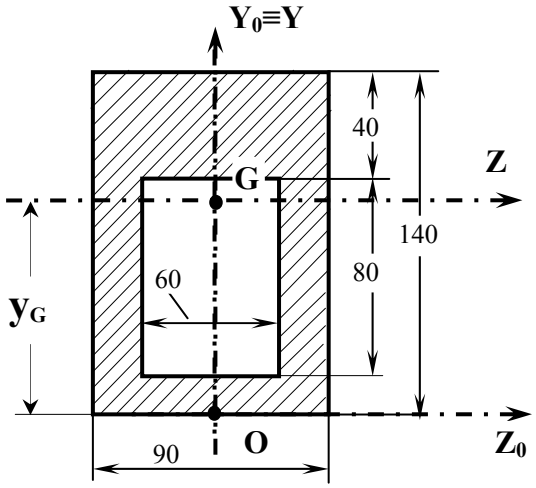
Din STAS pentru U 20: h= 200 mm ; b= 75 mm; t=11,5 mm; e=20,1 mm;
I_z= 19 100 000 mm^4; I_y= 1 480 000 mm^4; A= 3 220 mm^2.

4R.8



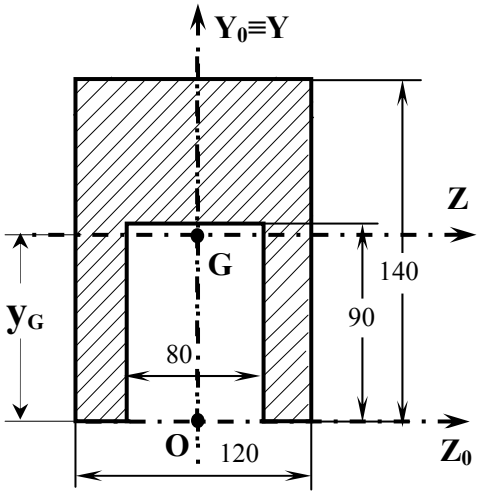
y_G= 81,54 mm
I_z= I_1= 5 320 000 mm^4
I_y= I_2= 2 483 333 mm^4
$W_{z,min}$= 65 257 mm^3
$W_{y,min}$= 55 185 mm^3

4R.9



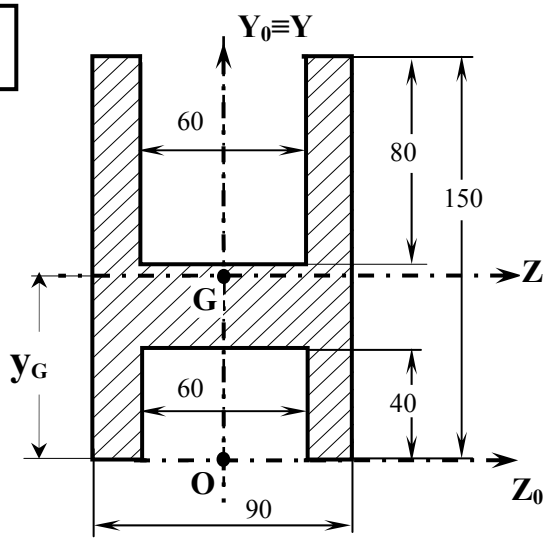
y_G= 76,154 mm
I_z= I_1= 17 244 600 mm^4
I_y= I_2= 7 065 000 mm^4
$W_{z,min}$= 226 440 mm^3
$W_{y,min}$= 92 772 mm^3

4R.10



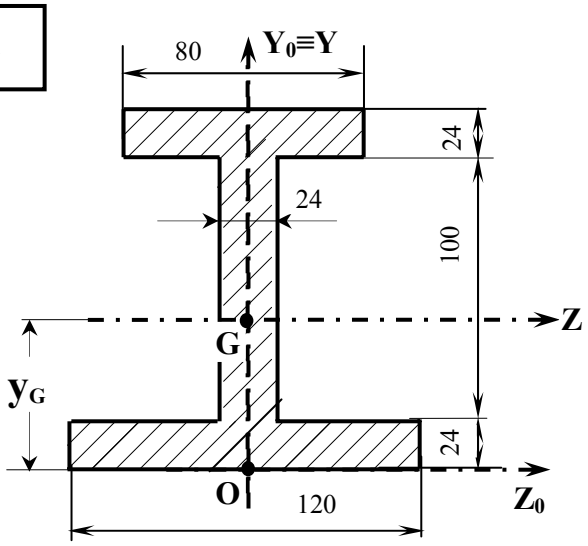
y_G= 88,75 mm
$I_z = I_1$= 14 705 000 mm^4
$I_y = I_2$= 16 320 000 mm^4
$W_{z,min}$= 165 690 mm^3
$W_{y,min}$= 272 000 mm^3

4R.11



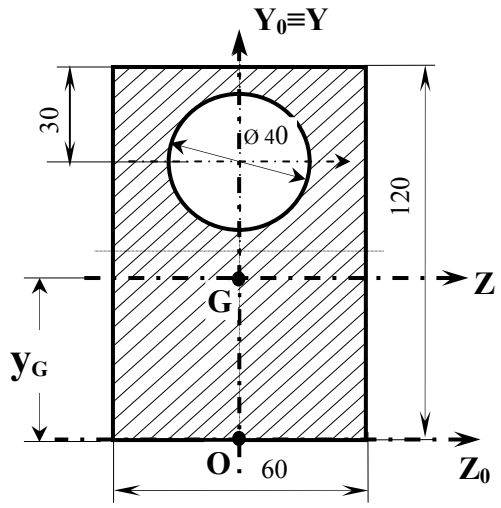
y_G= 69,286 mm
$I_z = I_1$= 9 086 786 mm^4
$I_y = I_2$= 6 952 500 mm^4
$W_{z,min}$= 112 580 mm^3
$W_{y,min}$= 154 500 mm^3

4R.12



y_G= 65,73(3) mm
$I_z = I_1$= 20 189 568 mm^4
$I_y = I_2$= 4 595 200 mm^4
$W_{z,min}$= 245 416 mm^3
$W_{y,min}$= 75 587 mm^3

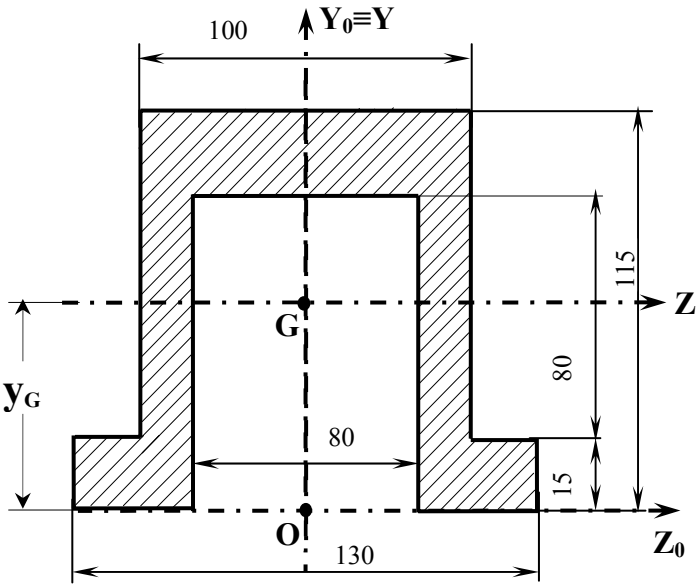
4R.13



y_G= 53,6 mm
$I_z = I_1$= 7 144 200 mm^4
$I_y = I_2$= 2 034 300 mm^4
$W_{z,min}$= 107 590 mm^3
$W_{y,min}$= 67 810 mm^3

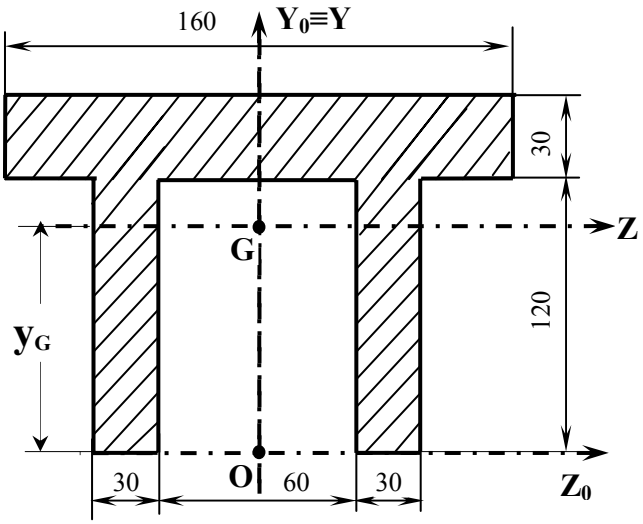
4R.14

y_G= 69,8 mm
$I_z = I_1$= 6 673 600 mm^4
$I_y = I_2$= 7 026 300 mm^4
$W_{z,min}$= 95 611 mm^3
$W_{y,min}$= 108 096 mm^3



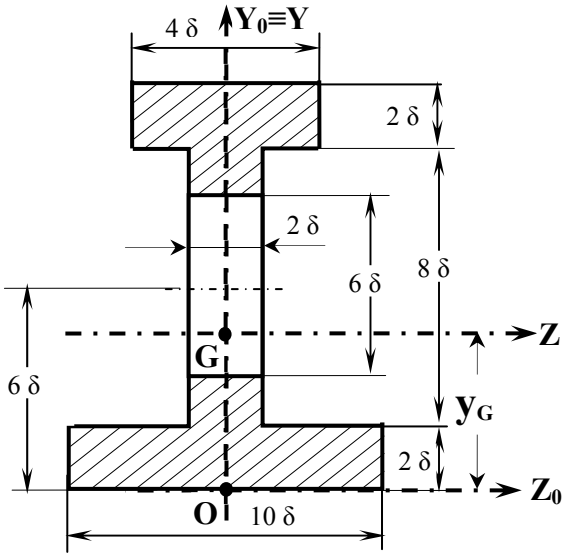
4R.15

y_G= 90 mm
$I_z = I_1$= 25 200 000 mm^4
$I_y = I_2$= 25 360 000 mm^4
$W_{z,min}$= 280 000 mm^3
$W_{y,min}$= 317 000 mm^3



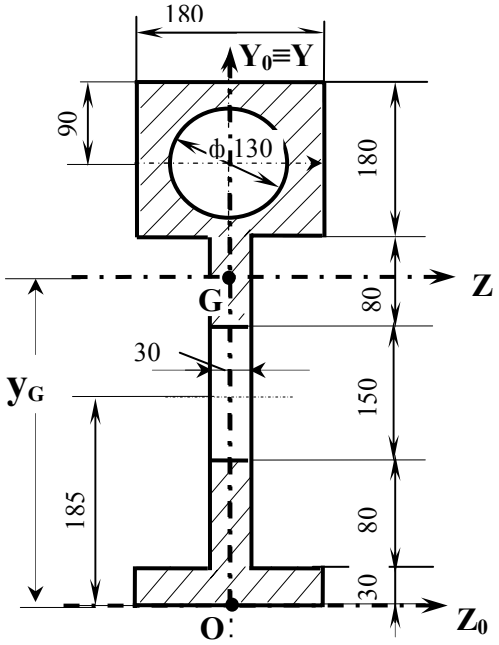
4R.16

$y_G = 4{,}125\ \delta$
$I_z = I_1 = 646{,}16(6)\ \delta^4$
$I_y = I_2 = 178{,}6(6)\ \delta^4$
$W_{z,min} = 82{,}053\ \delta^3$
$W_{y,min} = 35{,}73(3)\ \delta^3$



4R.17

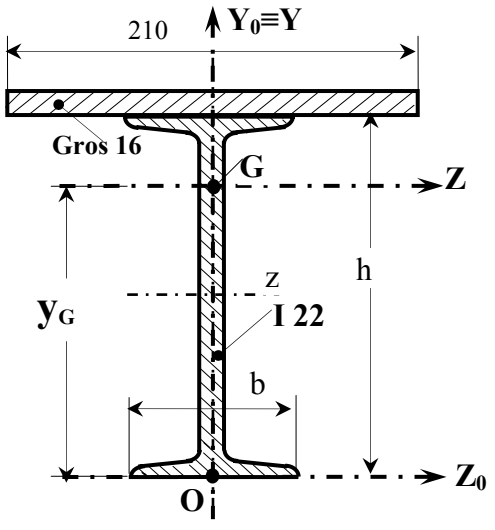
$y_G = 345{,}4$ mm
$I_z = I_1 = 989\ 036\ 073$ mm^4
$I_y = I_2 = 88\ 400\ 152$ mm^4
$W_{z,min} = 2\ 866\ 771$ mm^3
$W_{y,min} = 982\ 224$ mm^3



4R.18

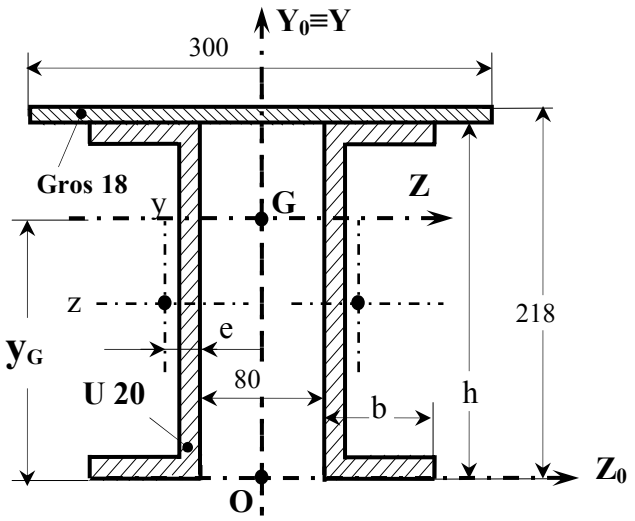
$y_G = 164{,}164$ mm
$I_z = I_1 = 55\ 981\ 403$ mm^4
$I_y = I_2 = 13\ 968\ 000$ mm^4
$W_{z,min} = 341\ 009$ mm^3
$W_{y,min} = 133\ 028$ mm^3

Din STAS pentru I 22: h= 220 mm ;
b= 98 mm; $I_z = 30\ 600\ 000$ mm^4
$I_y = 1\ 620\ 000$ mm^4; A= 3 960 mm^2.



4R.19

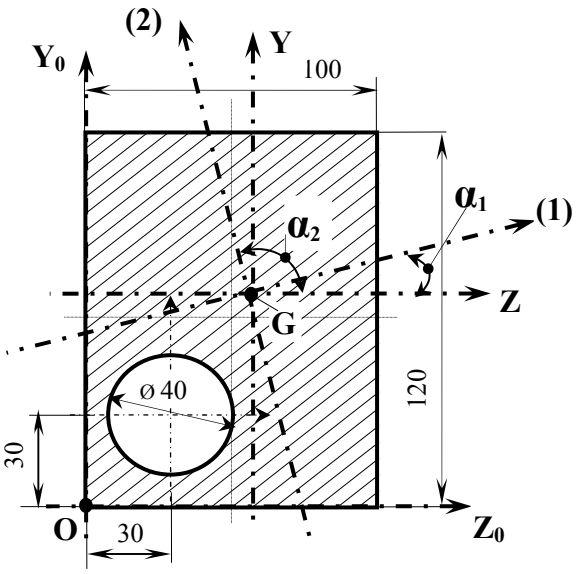
y_G= 149,713 mm
I_z= I_1= 73 242 224 mm^4
I_y= I_2= 66 721 344 mm^4
$W_{z,min}$= 489 217 mm^3
$W_{y,min}$= 444 809 mm^3



Din STAS pentru U 20: h= 200 mm ; b= 75 mm; e=20,1 mm;
I_z= 19 100 000 mm^4; I_y= 1 480 000 mm^4; A= 3 220 mm^2.

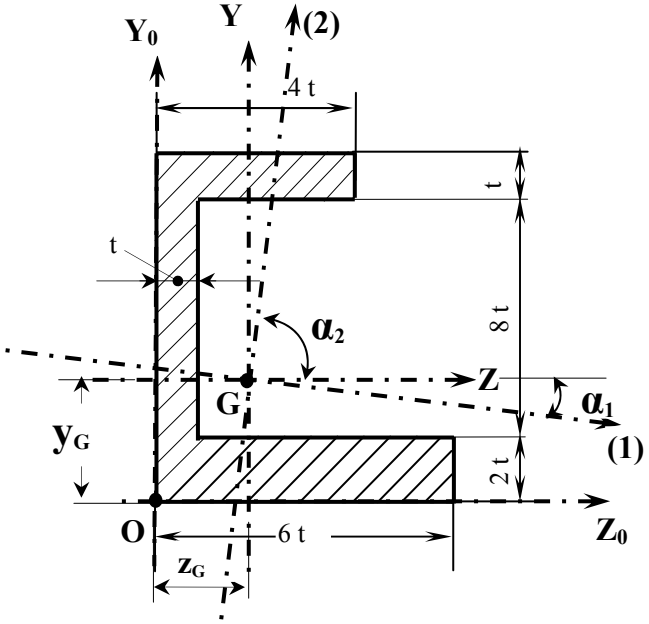
4R.20

y_G= 63,5 mm; z_G=47,7 mm;
I_z= 13 011 000 mm^4
I_y= 9 313 000 mm^4
I_{zy}= -842 200 mm^4
I_1= 13 194 000 mm^4
I_2= 9 130 200 mm^4
α_1= 12,24º; α_2= 102,24º;
$I_{zy,max}$=2 032 000 mm^4



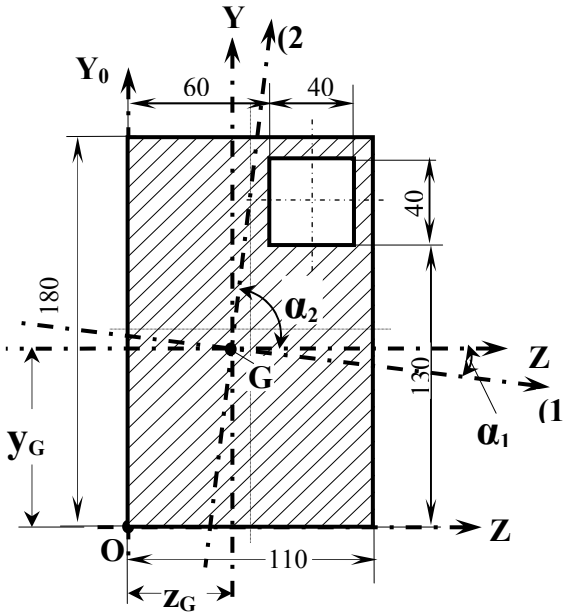
4R.21

y_G= 4,25 t ; z_G=2 t;
I_z= 354,5 t^4; I_y= 72 t^4;
I_{zy}= -60 t^4;
I_1= 366,715 t^4;
I_2= 58,785 t^4;
α_1= -11,24º;
α_2= 78,493º;



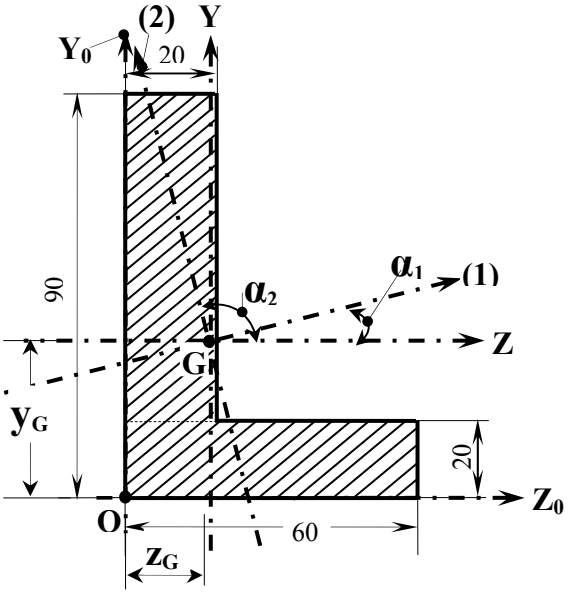
4R.22

y_G= 84,7 mm;
z_G=52,8 mm;
I_z= 46 980 305 mm^4
I_y= 18 663 755 mm^4
I_{zy}= -2 610 988 mm^4
I_1= 48 980 305 mm^4
I_2= 18 440 529 mm^4
α_1= -10,45º;
α_2= 79,55º.



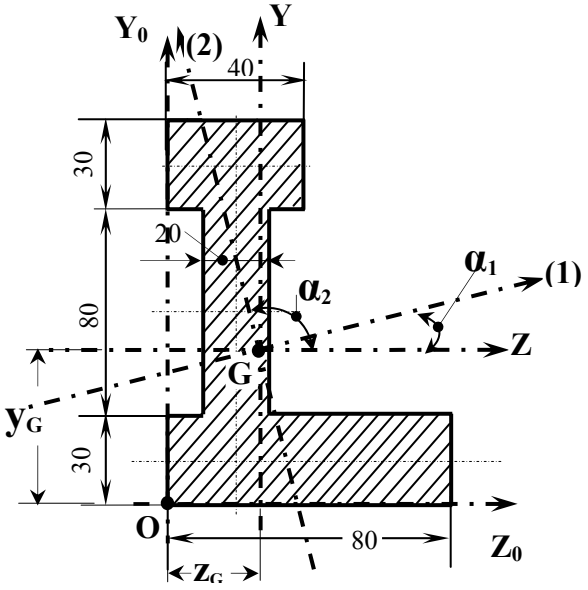
4R.23

y_G= 34; z_G=19 mm;
I_z= 1 920 000 mm^4
I_y= 665 000 mm^4
I_{zy}= -580 000 mm^4
I_1= 2 147 000 mm^4
I_2= 438 000 mm^4
α_1= 21,37; α_2= 111,37º



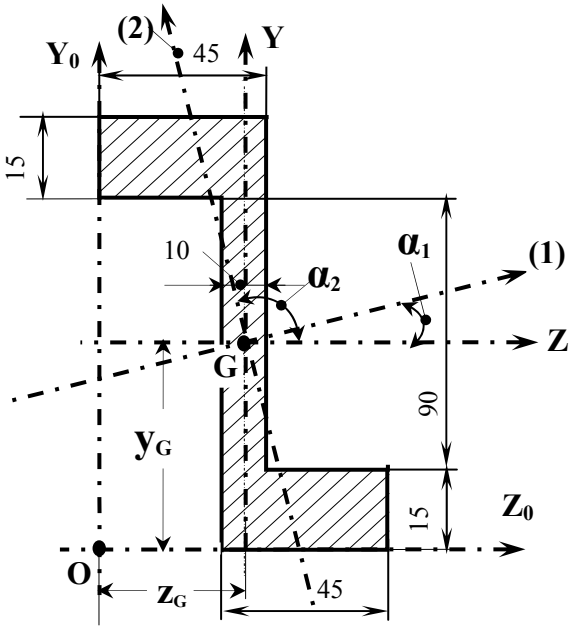
4R.24

y_G= 57,3; z_G= 29,2 mm;
I_z= 11 176 000 mm^4
I_y= 2 010 000 mm^4
I_{zy}= -2 030 000 mm^4
I_1= 11 605 000 mm^4
I_2= 1 580 500 mm^4
α_1= 11,94; α_2= 101,94º



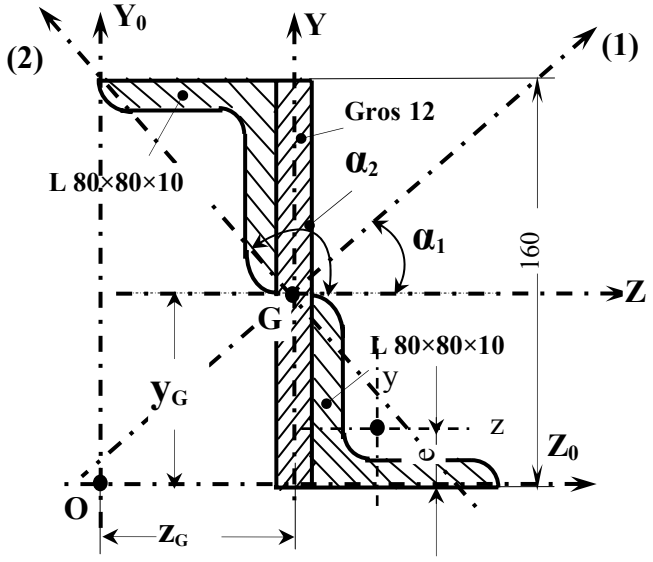
4R.25

y_G= 60; z_G=40 mm;
I_z= 4 353 800 mm^4
I_y= 648 750 mm^4
I_{zy}= -1 240 300 mm^4
I_1= 4 730 600 mm^4
I_2= 271 871 mm^4
α_1= 16,9; α_2= 106,9º



4R.26

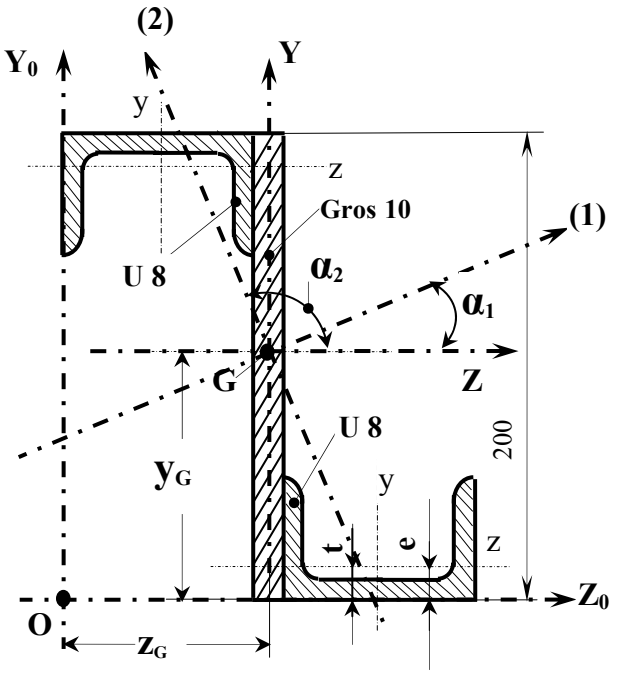
y_G= 80; z_G=86 mm;
I_z= 15 520 751 mm^4
I_y= 4 383 407 mm^4
I_{zy}= -6 185 401 mm^4
I_1= 18 274 897 mm^4
I_2= 1 629 261 mm^4
α_1= 48 º; α_2= 138º



Din STAS pentru L80×80×10: h=b=80; e=23,4 mm; A= 1 510 mm^2;
I_z= I_y =875 000; I_1=1 390 000; I_2= 363 000; I_{zy}=(I_1-I_2)/2= -513 500 mm^4 .
Obs. I_{zy} pentru cornierul simetric se calculează ca fiind $I_{zy,max}$ deoarece axele z şi y sunt situate la 45º faţă de axele principale ale profilului.

4R.27

y_G= 100; z_G=85 mm;
I_z= 23 137 000 mm^4
I_y= 6 591 600 mm^4
I_{zy}= -8 464 500 mm^4
I_1= 26 700 000 mm^4
I_2= 3 028 500 mm^4
α_1= 22,83; α_2= 112,83º

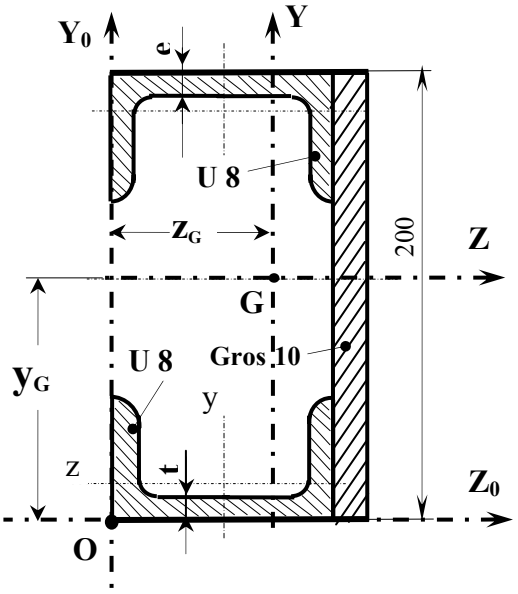


Din STAS pentru U 8: t=8 mm;
e=14,5 mm; I_z= 194 000 mm^4;
I_v=1 060 000 mm^4; A=1 100 mm^2.

4R.28

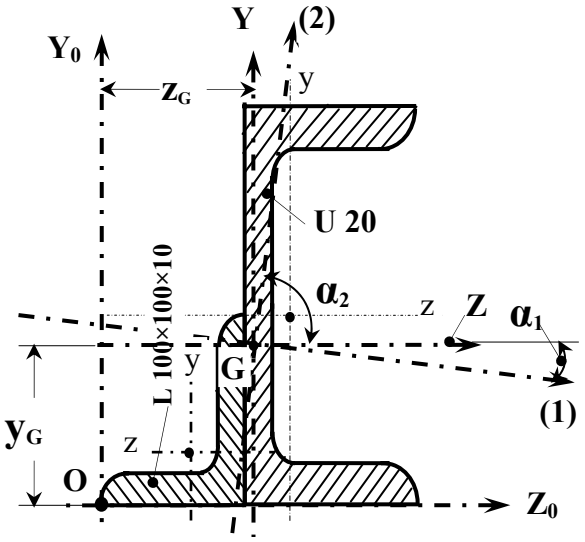
y_G= 100; z_G=61,43 mm;
I_z= I_1 = 23 137 217 mm^4
I_y= I_2= 4 258 095 mm^4
I_{zy}= 0 mm^4; α_1= 0º
W_z= 231 372 mm^3
W_y= 69 316 mm^3

Din STAS pentru U 8: t=8 mm;
e=14,5 mm; I_z= 194 000 mm^4;
I_v=1 060 000 mm^4; A=1 100 mm^2.



4R.29

y_G= 73,2; z_G=102 mm;
I_z= 27 070 000 mm^4
I_y= 6 056 000 mm^4
I_{zy}= 5 206 700 mm^4
I_1= 28 290 000 mm^4
I_2= 4 836 600 mm^4
α_1= - 13,18; α_2=76,8º

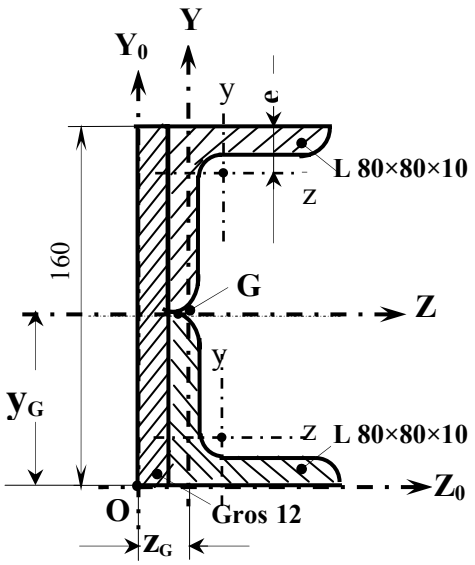


Din STAS pentru U 20: h= 200 mm ; b= 75 mm; e=20,1 mm;
I_z= 19 100 000 mm^4; I_y= 1 480 000 mm^4; A= 3 220 mm^2.

Pentru L100×100×10: h=b=100; e=28,2 mm; A= 1 920 mm^2;
I_z=I_y =1 770 000; I_1=2 800 000; I_2=729 000; I_{zy}=(I_1-I_2)/2=1 035 500 mm^4
Obs. I_{zy} pentru cornierul simetric se calculează ca fiind $I_{zy,max}$ deoarece axele z şi y sunt situate la 45º față de axele principale ale profilului.

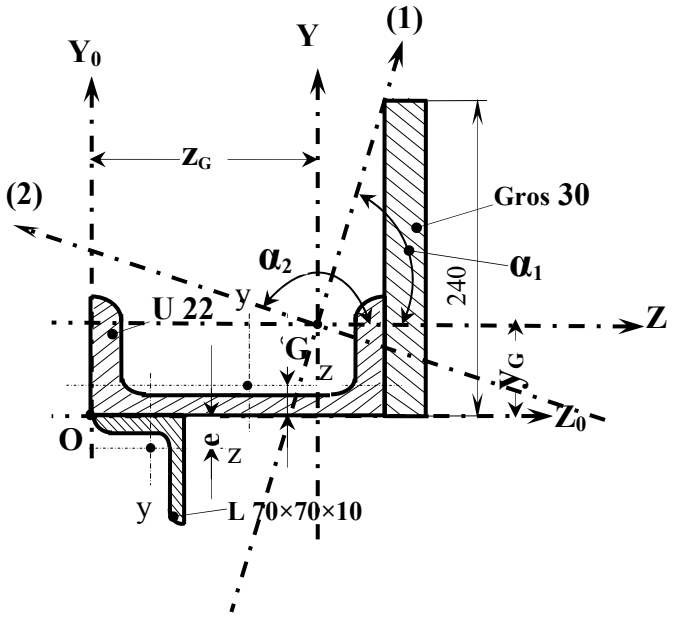
4R.30

y_G= 80; z_G≈24 mm;
I_z= I_1=15 520 751 mm^4
I_y= I_2= 2 787 599 mm^4
I_{zy}= 0; α_1= 0º;
W_z= 194 009 mm^3
W_y= 40 994 mm^3



Din STAS pentru L80×80×10: h=b=80; e=23,4 mm; A= 1 510 mm^2;
I_z= I_y =875 000; I_1=1 390 000; I_2= 363 000; I_{zy}=(I_1-I_2)/2= -513 500 mm^4 .
Obs. I_{zy} pentru cornierul simetric se calculează ca fiind $I_{zy,max}$ deoarece axele z şi y sunt situate la 45º față de axele principale ale profilului.

4R.31



$y_G \approx 75$; $z_G \approx 177$ mm;
$I_z = 74\,474\,692$ mm^4
$I_y = 90\,451\,177$ mm^4
$I_{zy} = 48\,599\,037$ mm^4
$I_1 = 131\,714\,111$ mm^4
$I_2 = 33\,211\,758$ mm^4
$\alpha_1 = 80{,}67$; $\alpha_2 = 170{,}67^o$

Din STAS pentru U 22: h= 220 mm ; b= 80 mm; e=21,4 mm;
$I_z = 1\,970\,000$ mm^4; $I_y = 26\,900\,000$ mm^4; A= 3 740 mm^2.

Pentru L70×70×10: h=b=70; e=20,9 mm; A= 1 310 mm^2;
$I_z = I_y = 572\,000$; $I_1 = 905\,000$; $I_2 = 289\,000$; $I_{zy} = (I_1 - I_2)/2 = 308\,000$ mm^4
Obs. I_{zy} pentru cornierul simetric se calculează ca fiind $I_{zy,max}$ deoarece axele z şi y sunt situate la 45º față de axele principale ale profilului.

5. SOLICITAREA AXIALĂ

5.1 Considerații generale. Etape de calcul

Într-o secțiune a unui element de rezistență, se realizează o ***solicitare axială****, atunci când în acea secțiune acționează un singur efort și acesta este efortul axial N.*

În funcție de orientarea efortului axial N față de secțiune, solicitarea poate fi, de:

- ***tracțiune*** sau întindere când N > 0 (pozitiv),
- ***compresiune***, când N < 0 (negativ).

La solicitarea axială, într-un punct al secțiunii transversale, se produc tensiuni normale σ, de aceeaşi valoare în orice punct al secțiunii (tensiune uniform distribuită), tensiune care se calculează cu relația:

$$\sigma = \pm \frac{N}{A} \qquad 5.1\text{-}1$$

Sub acțiunea eforturilor axiale, elementul de rezistență se deformează. Principala deformație suferită de un element de rezistență solicitat axial, este deformația liniară. În funcție de efectul efortului axial N, deformația liniară poartă numele de:

- ***lungire***, când N > 0,
- ***scurtare***, când N < 0.

Lungirea sau scurtarea unui element de rezistență de lungime **l** solicitat de efortul axial N şi care prezintă rigiditatea la solicitarea axială EA, se calculează cu relația:

$$\Delta l = \frac{N l}{E A} \qquad 5.1\text{-}2$$

Dacă pe lungimea **l**, efortul axial N nu este constant sau rigiditatea EA este variabilă, atunci lungirea sau scurtarea se

calculează prin însumarea lungirilor sau scurtărilor de pe toate porţiunile pe care N şi EA sunt constante:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i l_i}{(EA)_i} \qquad 5.1\text{-}3$$

La solicitarea axială, în calcule, de multe ori se utilizează deformaţia specifică, în special ***lungirea specifică*** sau ***alungirea***, notată cu ε şi a cărei relaţie de calcul este:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{N}{EA} \qquad 5.1\text{-}4$$

De obicei, alungirea ε se exprimă în procente:

$$\varepsilon[\%] = \frac{N}{EA} 100 \qquad 5.1\text{-}5$$

În elementele de rezistenţă, atât tensiunea normală σ cât şi alungirea ε, nu trebuie să depăşească anumite valori maxime, numite mărimi admisibile:

- ***tensiunea normală admisibilă*** σ_a, respectiv
- ***alungirea admisibilă*** ε_a,

Satisfacerea condiţiei de rezistenţă şi a celei de rigiditate (deformabilitate) impune îndeplinirea următoarelor:

$\sigma_{max} \le \sigma_a$ (pentru condiţia de rezistenţă) 5.1-6

$\varepsilon_{max} \le \varepsilon_a$ (pentru condiţia de rigiditate) 5.1-7

Calculul elementelor de rezistenţă la solicitarea axială, se face în principal din satisfacerea condiţiei de rezistenţă. Sunt situaţii când la elementele de rezistenţă solicitate axial, trebuie avută în vedere şi condiţia de rigiditate.

Relaţiile de calcul pentru cele trei tipuri de probleme şi cele două condiţii (verificare, dimensionare şi efort capabil, respectiv condiţia de rezistenţă şi rigiditate - vezi parag.1.4 şi 1.5) pentru solicitarea axială, sunt prezentate succint în Tabelul 5.1-1.

Pentru a verifica satisfacerea condițiilor impuse, după cum se constată din Tabelul 5.1-1, trebuie cunoscute σ_{max} şi ε_{max}. *Secțiunile în care se ating valorile maxime σ_{max} şi ε_{max}, se numesc* ***secțiuni periculoase.***

Pentru un calcul corect, aceste secțiuni trebuie cunoscute. La solicitarea axială, poziția secțiunii periculoase, depinde atât de valoarea efortului axial N, cât şi de mărimea ariei secțiunii transversale a elementului. Dacă una dintre aceste mărimi este constantă pentru tot elementul de rezistență, atunci poziția secțiunii periculoase se stabileşte mai uşor şi anume:

- dacă A = constant, secțiunea periculoasă este acolo unde efortul axial N are valoarea cea mai mare (maximă),
- dacă N = constant, secțiunea periculoasă este acolo unde aria secțiunii transversale a elementului este mai mică (minimă).

Tabelul 5.1-1

Tipul problemei	**C o n d i ț i a**	
	de rezistență	**de rigiditate**
De verificare	$\sigma_{max} = \frac{N}{A} \le \sigma_a$	$\Delta l_{max} = \frac{Nl}{EA} \le \Delta l_a$ $\varepsilon_{max} = \frac{N}{EA} \le \varepsilon_a$
De dimensionare	$A_{nec} = \frac{N}{\sigma_a} = ...$	$A_{nec} = \frac{N \cdot l}{E \Delta l_{max}} = \frac{N}{E \varepsilon_a}$
De efort capabil	$N_{cap} = A\sigma_a = ...$	$N_{cap} = \frac{EA \cdot \Delta l_a}{l} =$ $= E \cdot A \cdot \varepsilon_a$

Atunci când începem să rezolvăm o problemă de rezistență (exemplificarea se face pentru solicitarea axială), stabilim următoarele aspecte, care pot constitui în acelaşi timp şi **etapele de calcul**:

- *Stabilim care elemente de rezistență din structura respectivă ne interesează sau prezintă importanță pentru calcul.*

- *Stabilim la ce solicitări sunt supuse aceste elemente. Stabilirea solicitării poate fi făcută în urma unei observaţii atente asupra structurii şi a modului de transmitere al forţelor exterioare de la un element la altul, sau în urma trasării diagramelor de eforturi.*
- *Se stabileşte secţiunea periculoasă (una sau mai multe). Stabilirea secţiunii periculoase se face analizând variaţia efortului şi a secţiunii transversale de-a lungul elementului de rezistenţă care se calculează.*
- *Se stabileşte tipul problemei (verificare, dimensionare sau efort capabil). Tipul problemei rezultă din enunţul problemei pe care o rezolvăm.*
- *Se stabileşte condiţia impusă (de rezistenţă sau rigiditate). Stabilirea condiţiei se face tot pe baza datelor din enunţul problemei, în funcţie de mărimile admisibile care se dau. Dacă se dă σ_a se impune condiţia de rezistenţă, iar dacă se dă ε_a (sau Δl_a) se impune condiţia de rigiditate. Dacă se dau toate mărimile admisibile amintite mai înainte, se impun ambele condiţii.*
- *Dacă s-a stabilit solicitarea, secţiunea periculoasă, tipul problemei şi condiţia impusă, se trece la Tabelul 5.1-1 (dacă solicitarea este axială) sau la tabelul asemănător de la solicitarea respectivă, de unde se iau formulele de calcul corespunzătoare şi se rezolvă problema.*

Observaţie: După cum se constată, în relaţiile din Tabelul 5.1-1, apare şi efortul axial N din secţiunea periculoasă. Determinarea eforturilor în general, depinde de sistemul pe care-l avem. Din multiplele exemple care se vor prezenta, sper că veţi ajunge la înţelegerea modului de determinare al eforturilor axiale. În cel mai dificil caz, trasaţi diagramele de eforturi, aşa cum s-a prezentat în Capitolul 3.

5.2 Calculul sistemelor de bare drepte articulate, static determinate

Se ştie că dacă numărul necunoscutelor (eforturi, reacțiuni) este egal sau mai mic decât numărul ecuațiilor de echilibru ce pot fi scrise pentru un sistem, sistemul este ***static determinat.***

Să ne reamintim că la o bară solicitată la întindere de către forțele F egale şi de sensuri opuse (Fig.5.2-1a), efortul axial este orientat spre interiorul barei, iar la bara solicitată la compresiune, efortul axial este orientat spre capetele barei (Fig.5.2-1b).

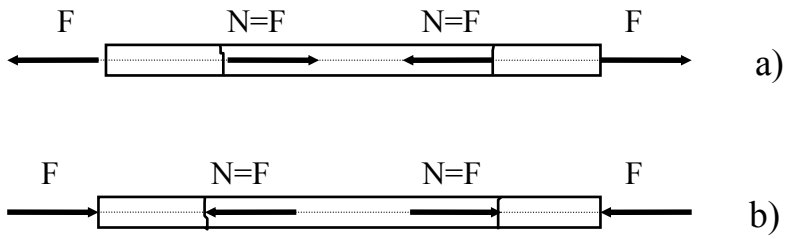


Fig.5.2-1

Barele articulate la ambele capete, care pe toată lungimea lor nu prezintă sarcini, sunt solicitate numai axial. Solicitarea acestora provine din acțiunea celorlalte elemente de rezistență cu care sunt în legătură.

Exemplu. *Platforma rigidă BC pe care trebuie aşezată o sarcină F = 90 kN, este suspendată cu ajutorul a doi tiranți verticali, ca în Fig.5.2-2. Cunoscând* σ_a *= 150 MPa şi E = 2,1* 10^5 *MPa pentru materialul tiranților, se cere:*

a) dimensionarea tiranților (d = ? şi a = ?) pentru $\sigma_{max} \leq \sigma_a$,

b) deplasarea pe vericală a punctului de aplicație al forței F (δ_D*=?).*

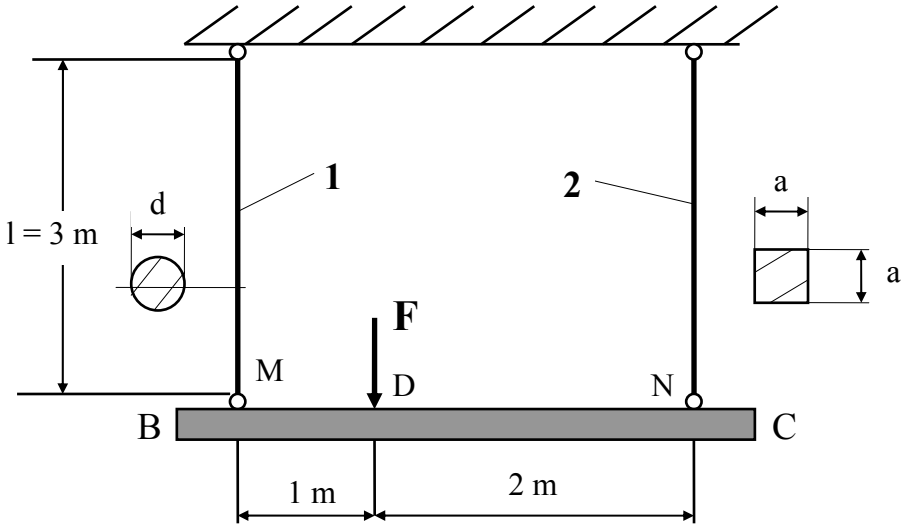


Fig.5.2-2

Rezolvare

a) Să parcurgem acum etapele prezentate la paragraful 5.1.

- Dintre toate elementele care apar în Fig.5.2-1, ne interesează numai cei doi tiranți care susțin platforma, notați cu 1, respectiv 2. De altfel, nu cunoaştem dimensiunile platformei, ştim numai că ea este rigidă, adică deformațiile sale pot fi considerate nule (neglijabile).
- Cei doi tiranți neavând alte sarcini de-a lungul lor, sunt solicitați numai axial. Este foarte uşor de înțeles, că aceştia sunt solicitați la tracțiune (întindere).
- Deoarece în lungul tiranților atât N cât şi aria secțiunii transversale A sunt constante, rezultă că secțiunea periculoasă poate fi oriunde.
- Problema este de dimensionare şi se impune condiția de rezistență, deoarece se cer dimensiunile secțiunii transversale (d şi a) şi în enunțul problemei s-a dat tensiunea maximă admisă σ_a. Aici nu se impune o dimensionare şi din condiția de rigiditate, deoarece nu s-a dat în enunț ε_a (sau Δl_a). Este adevărat că la punctul b) al problemei trebuie făcute calcule de deformații, dar acestea nu au nimic cu dimensionarea tiranților prevăzută la punctul a).
- Din Tabelul 5.1-1, rezultă că pentru dimensionare, utilizăm relația:

$$A_{nec} = \frac{N}{\sigma_a} = \ldots \qquad 5.2\text{-}1$$

Pentru tirantul 1 (cel din stânga), relația 5.2-1 se scrie:

$$A_{1nec} = \frac{N_1}{\sigma_a} = \frac{\Pi \cdot d^2}{4}$$

de unde rezultă relația de calcul pentru diametrul secțiunii transversale a tirantului:

$$d = \sqrt{\frac{4N_1}{\Pi \cdot \sigma_a}} \qquad 5.2\text{-}2$$

Pentru tirantul din dreapta (notat cu 2), relația 5.2-1, se scrie:

$$A_{2nec} = \frac{N_2}{\sigma_a} = a^2$$

de unde rezultă dimensiunea secțiunii transversale a tirantului 2:

$$a = \sqrt{\frac{N_2}{\sigma_a}} \qquad 5.2\text{-}3$$

În relațiile 5.2-2 şi 5.2-3, N_1 şi N_2 sunt eforturile axiale din secțiunile transversale periculoase ale celor doi tiranți. Valorile lui N_1 şi N_2, trebuie determinate.

Determinarea eforturilor din secțiunile periculoase (pe care le-am precizat deja) se face prin metoda secțiunilor, metodă binecuscută de determinare a eforturilor din secțiunile transversale ale elementelor de rezistență. Secționăm atunci cei doi tiranți în secțiunile lor periculoase şi în locul porțiunii de tirant înlăturată, punem N_1, respectiv N_2 pentru a nu strica echilibrul sistemului (Fig.5.2-3).

Acest sistem îl izolăm şi punem condițiile de echilibru:

$(\sum F)_x = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = 0$ (această condiție nu ne ajută).

$(\sum F)_y = 0$

$N_1 - F + N_2 = 0$

sau

$$N_1 + N_2 = F \qquad 5.2\text{-}4$$

$$(\sum M)_M = 0$$

$$F\ 1 - N_2\ 3 = 0$$

sau

$$3\ N_2 = F \qquad 5.2\text{-}5$$

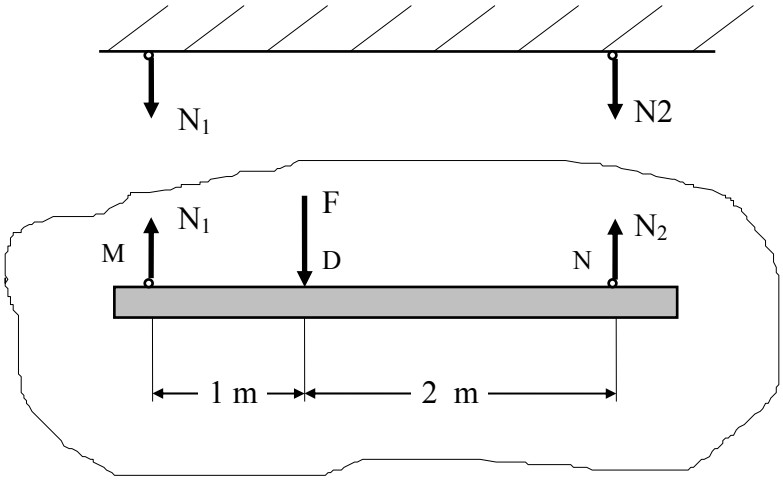


Fig.5.2-3

S-au obținut două ecuații cu două necunoscute (N_1 şi N_2):

$$N_1 + N_2 = F$$
$$3\ N_2 = F$$

Rezolvând acest sistem, rezultă:

$$N_1 = 60 \text{ kN}$$
$$N_2 = 30 \text{ kN}.$$

Înlocuind valorile lui N_1 şi N_2 în relațiile 5.2-2, respectiv 5.2-3, se obține dimensiunea secțiunii transversale a tiranților:

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 60 \cdot 10^3}{\Pi \cdot 150}} = 22{,}56\ mm \qquad 5.2\text{-}6$$

$$a = \sqrt{\frac{30 \cdot 10^3}{150}} = 14{,}14\ \ mm \qquad 5.2\text{-}7$$

Dimensiunile secțiunilor transversale se rotunjesc prin adaos, rezultând valorile finale:

$$d = 23 \text{ mm} \qquad 5.2\text{-}8$$

$$a = 15 \text{ mm}. \qquad 5.2\text{-}9$$

b) La acest punct trebuie determinată deplasarea secțiunii în care acționează forța F (secțiunea D).

Atunci când trebuie determinate deplasările unor secțiuni se parcurg următoarele ***etape***:

- *Se schițează sistemul în poziția pe care o are înainte de aplicarea sarcinilor. Schițați această poziție prin linie continuă.*
- *Se analizează modul de deformare al fiecărui element deformabil şi cum deformația acestuia influențează deplasarea celorlalte elemente.*
- *Pe baza deformațiilor elementelor analizate, se schițează sistemul în poziția pe care o are după aplicarea sarcinilor şi deformarea elementelor componente. Schițați această poziție cu linie întreruptă.*
- *Se cotează toate deformațiile produse ale elementelor.*
- *Se determină deplasarea cerută pe baza deformațiilor cotate*.

Să revenim acum la exemplul nostru, punctul b).

Schița sistemului în poziție nedeformată, este prezentată în Fig.5.2-4 (linia continuă).

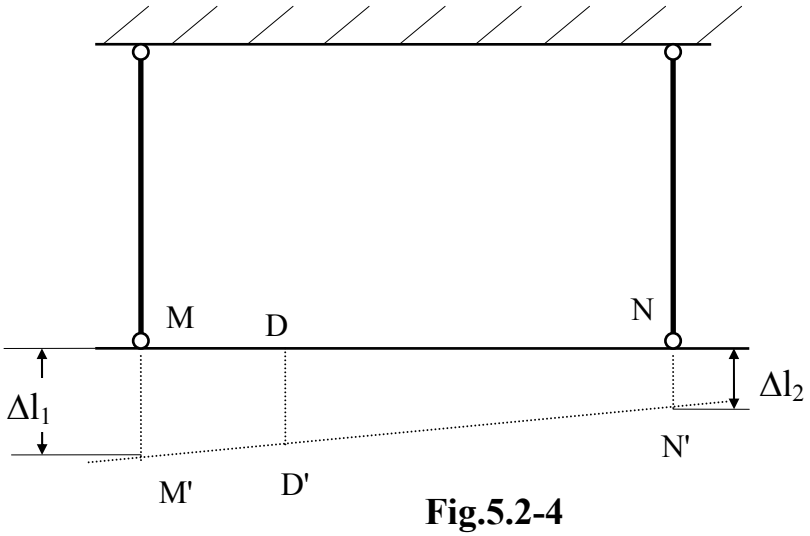


Fig.5.2-4

Tiranții fiind solicitați la întindere, se lungesc cu lungirile:

$$\Delta l_1 = MM' = \frac{N_1 \cdot l}{E \cdot A_1} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^3}{2{,}1 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 23^2} = 2{,}06\ mm \qquad 5.2\text{-}10$$

$$\Delta l_2 = NN' = \frac{N_2 \cdot l}{E \cdot A_2} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^3}{2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 15^2} = 1{,}96\,mm \qquad 5.2\text{-}11$$

Deformațiile Δl_1 şi Δl_2 sunt trecute în Fig.5.2-4, rezultând astfel poziția sistemului după deformare (trasată cu linie întreruptă). Deplasarea punctului de aplicație al forței F (δ_D = DD'), printr-un calcul geometric, rezultă uşor. O reprezentare mai clară, pentru determinarea deplasării punctului de aplicație a forței F, (δ_D) este prezentată în Fig.5.2-5.

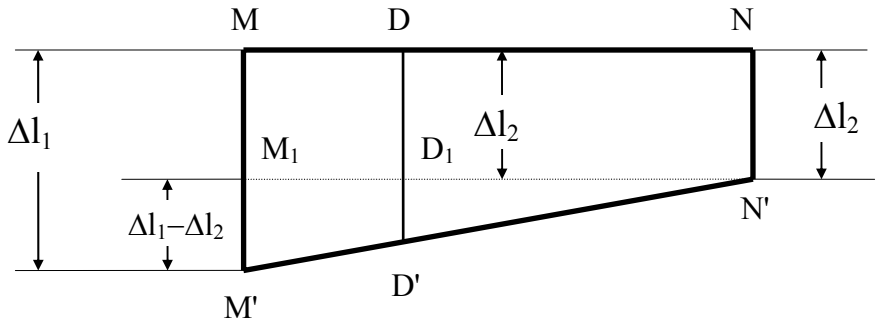


Fig.5.2-5

$$\delta_D = DD_1 + D_1D' = \Delta l_2 + D_1D' \qquad 5.2\text{-}12$$

iar din asemănarea triunghiurilor N'D_1D' şi N'M_1M', rezultă:

$$\frac{D_1D'}{M_1M'} = \frac{ND}{NM} \qquad 5.2\text{-}13$$

Relația 5.2-12, devine:

$$\delta_D = \Delta l_2 + \tfrac{2}{3}(\Delta l_1 - \Delta l_2) = 1{,}96 + \tfrac{2}{3}(2{,}06 + 1{,}96) = 2{,}01\ mm$$

Deci, punctul de aplicație al forței F, se deplasează în jos cu 2,01 mm.

Observație

Această problemă a fost o problemă de dimensionare.

Să presupunem că problema este ***de verificare***. Înseamnă că se cunosc dimensiunile secțiunii transversale **d** şi **a** şi trebuie verificată condiția de rezistență sau rigiditate. Mersul problemei în acest caz este identic cu cel prezentat, numai că se utilizează relațiile:

$$\sigma_{1\max} = \frac{N_1}{A_1} = \ldots \leq \sigma_a$$

$$\sigma_{2\max} = \frac{N_2}{A_2} = \ldots \leq \sigma_a$$

sau

$$\varepsilon_{1\max} = \frac{N_1}{E \cdot A_1} = \ldots \leq \varepsilon_a$$

$$\varepsilon_{2\max} = \frac{N_2}{E \cdot A_2} = \ldots \leq \varepsilon_a$$

În aceste relații, eforturile N_1 şi N_2 sunt cele calculate.

Considerăm acum că problema este ***de efort capabil***. În acest caz nu se cunoaşte valoarea forței F, iar eforturile N_1 şi N_2 nu mai au valori numerice, ele determinându-se ca la exemplul precedent, dar rămân necunoscute, adică:

$$N_1 = \frac{2F}{3}$$
$$N_2 = \frac{F}{3}$$

Relațiile de calcul din Tabelul 5.1-1 care se utilizează, au forma:

$$N_{1cap} = \sigma_a \cdot A_1 = \frac{2F}{3} \Rightarrow F' = \frac{3}{2} \cdot \sigma_a \cdot A_1$$

$$N_{2cap} = \sigma_a \cdot A_2 = \frac{1}{3}F \Rightarrow F'' = 3 \cdot \sigma_a \cdot A_2$$

Se obține câte o valoare pentru forța F impusă de fiecare tirant.

Dacă se consideră şi condiția de rigiditate, mai rezultă două valori pentru forța capabilă F:

$$N_{1cap} = E \cdot A_1 \cdot \varepsilon_a = \tfrac{2F}{3} \Rightarrow F''' = \frac{3}{2} \cdot E \cdot A_1 \cdot \varepsilon_a$$

$$N_{2cap} = E \cdot A_2 \cdot \varepsilon_a = \tfrac{F}{3} \Rightarrow F^{IV} = 3 \cdot E \cdot A_2 \cdot \varepsilon_a$$

Pentru a fi satisfăcute toate condițiile (de rezistență şi de rigiditate) dintre cele patru valori F', F", F"', F^{IV} ale forței F se ia valoarea cea mai mică.

$$F = \min (F', F'', F''', F^{IV}).$$

Se observă că schimbarea tipului problemei nu complică modul de rezolvare a problemei. Prin schimbarea tipului de problemă, se schimbă doar mărimile cunoscute cu cele necunoscute.

5.3 Calculul barelor drepte solicitate de forțe axiale

Fie o bară dreaptă cu forma şi încărcarea din Fig.5.3-1. Se cer:

a) forța capabilă F pentru $\sigma_{max} = \sigma_a = 150$ MPa.

b) deplasarea capătului liber al barei.

Se cunosc: $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa, d = 40 mm, l = 1 m.

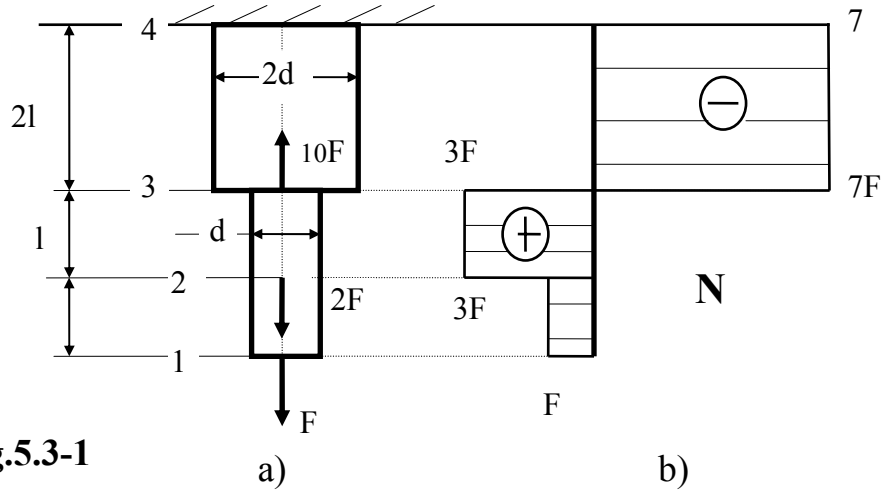


Fig.5.3-1

Rezolvare

a) Etapele de rezolvare sunt aceleaşi pe care le-am utilizat şi la exemplul precedent (parag.5.2).

- Avem un singur element de rezistență (bara), dar care prezintă secțiune variabilă în lungul său.
- Bara este solicitată axial, cu porțiuni întinse, respectiv comprimate.
- Secțiunea periculoasă după cum s-a mai spus, depinde atât de valoarea efortului axial cât şi de mărimea ariei secțiunii transversale. Pentru a stabili secțiunea periculoasă, în acest caz, trebuie trasată diagrama de efort axial N. Această diagramă este prezentată în Fig.5.3-1b. Există, după cum se poate constata, trei intervale caracteristice: 1-2, 2-3, 3-4. Pe primele două intervale (1-2 şi 2-3), aria A a secțiunii transversale este constantă (A = const.), iar N este variabil. Rezultă că intervalul 2-3 (unde N = 3F), este mai periculos decât intervalul 1-2. Dintre intervalul 3-4 (N = -7F) şi intervalul 2-3 (N = 3F), este mai periculos intervalul 2-3, concluzie care rezultă din următorul calcul simplu:

$$\sigma_{2-3} = \frac{N_{2-3}}{A_{2-3}} = \frac{3 \cdot F}{\frac{\Pi \cdot d^2}{4}} = 3\frac{F}{\frac{\Pi \cdot d^2}{4}} \qquad 5.3\text{-}1$$

$$\left|\sigma_{3-4}\right| = \frac{N_{3-4}}{A_{3-4}} = \frac{7 \cdot F}{\frac{\Pi}{4}(2 \cdot d)^2} = \frac{7}{4} \cdot \frac{F}{\frac{\Pi \cdot d^2}{4}} < \sigma_{2-3} \qquad 5.3\text{-}2$$

Aşadar, secțiunea periculoasă este oricare secțiune situată în intervalul 2-3.

- Problema este de efort capabil (nu se cunoaşte încărcarea F).
- Condiția impusă pentru determinarea forței F, este condiția de rezistență (se impune numai $\sigma_{max} \leq \sigma_a$).
- Relația pe care o utilizăm pentru calcul (din Tabelul 5.1-1), este:

$$N_{cap} = A\ \sigma_a = ... \qquad 5.3\text{-}3$$

Relația 5.3-3, transcrisă pentru exemplul nostru în secțiunea periculoasă, este:

$$N_{cap} = A_{2\text{-}3}\ \sigma_a = 3\ F \qquad 5.3\text{-}4$$

de unde rezultă valoarea maximă admisă pentru forța F:

$$F = \frac{A_{2-3} \cdot \sigma_a}{3} = \frac{\frac{\Pi \cdot d^2}{4} \cdot \sigma_a}{3} = \frac{\Pi \cdot d^2 \cdot \sigma_a}{12} = \frac{\Pi \cdot 40^2 \cdot 150}{12} = 62{,}831\ KN \qquad 5.3\text{-}5$$

b) Pentru rezolvarea acestui punct, parcurgem următorul raționament:

- Toată bara se deformează: intervalele 1-2 şi 2-3 se lungesc (N > 0), iar intervalul 3-4 se scurtează (N < 0).
- Capătul liber al barei se deplasează, fiindcă toate intervalele se deformează. Nu se poate şti încă de acum dacă deplasarea capătului liber se produce în jos sau în sus, aceasta depinzând de valorile deformațiilor celor trei intervale. Se poate scrie totuşi că deplasarea capătului liber al barei δ_1 este:

$$\delta_1 = \Delta l_{1\text{-}4} \qquad 5.3\text{-}6$$

unde,

$\Delta l_{1\text{-}4}$ -deformația întregii bare (intervalul 1-4).

Cum de la 1-4 nici N şi nici A (aria) nu sunt constante, deformația $\Delta l_{1\text{-}4}$ nu poate fi scrisă într-un singur termen. În acest exemplu, $\Delta l_{1\text{-}4}$ are trei termeni, impuşi de cele trei intervale caracteristice pe care atât N cât şi EA sunt constante. Astfel:

$$\Delta l_{1\text{-}4} = \Delta l_{1\text{-}2} + \Delta l_{2\text{-}3} + \Delta l_{3\text{-}4} \qquad 5.3\text{-}7$$

Rezultă că relația 5.3-6, capătă forma:

$$\delta_1 = \Delta l_{1\text{-}4} = \Delta l_{1\text{-}2} + \Delta l_{2\text{-}3} + \Delta l_{3\text{-}4} \qquad 5.3\text{-}8$$

Explicitând relația 5.3-8, se obține:

$$\delta_1 = \frac{N_{1-2} \cdot l_{1-2}}{E \cdot A_{1-2}} + \frac{N_{2-3} \cdot l_{2-3}}{E \cdot A_{2-3}} + \frac{N_{3-4} \cdot l_{3-4}}{E \cdot A_{3-4}} =$$

$$= \frac{F \cdot l}{E \cdot \frac{\Pi \cdot d^2}{4}} + \frac{3 \cdot F \cdot l}{E \frac{\Pi \cdot d^2}{4}} - \frac{7 \cdot F \cdot 2 \cdot l}{E \cdot 4 \cdot \frac{\Pi \cdot d^2}{4}} = \frac{F \cdot l}{E \cdot \frac{\Pi \cdot d^2}{4}} (1 + 3 - \frac{14}{4}) = 0{,}119\ mm$$

Deoarece $\delta_1 = 0{,}119$ mm > 0, rezultă că deplasarea capătului liber al barei (al secțiunii 1), are loc în jos. Lungirea intervalelor 1-2 şi 2-3, este mai mare decât scurtarea intervalului 3-4.

Observație. Să presupunem că se cere deplasarea pe verticală a secțiunii 2. În acest caz, deformația intervalului 1-2 nu influențează deplasarea secțiunii 2. Oricât s-ar deforma intervalul 1-2, dacă intervalul 2-4 nu se deformează, secțiunea 2 nu se deplasează. Deci:

$$\delta_2 = \Delta l_{2\text{-}4} \qquad \text{sau} \qquad \delta_3 = \Delta l_{3\text{-}4}.$$

Trebuie avută o mare atenție la modul în care deformația intervalelor contribuie la deplasarea unor secțiuni.

5.4 Calculul sistemelor de bare articulate, static nedeterminate

Dacă la un sistem, necunoscutele (reacțiuni sau eforturi) nu pot fi determinate cu ajutorul ecuațiilor de echilibru, atunci sistemul este ***static nedeterminat***.

Gradul de nedeterminare al sistemului, este dat de diferența dintre numărul necunoscutelor şi numărul ecuațiilor de echilibru scrise.

Pentru rezolvarea sistemelor static nedeterminate (în prima etapă aflarea necunoscutelor), este nevoie de ecuații suplimentare, atâtea cât este şi gradul de nedeterminare. Ecuațiile suplimentare provin din explicitarea relațiilor care se scriu între deformațiile sau deplasările diferitelor elemente ale sistemului sau a secțiunilor acestora. După găsirea acestor ecuații suplimentare (numărul este egal cu gradul de nedeterminare) şi determinarea necunoscutelor, problema devine una obişnuită (static determinată), uşor de rezolvat.

Exemplu. *O platformă rigidă BC pe care trebuie aşezată forța F=40 kN, este suspendată cu ajutorul a doi tiranți 1 şi 2 (Fig.5.4-1), ambii de secțiune circulară cu diametrul d = 30 mm.*

Se cer:

a) Să se verifice tiranții pentru σ_a = 150 MPa,

b) Să se calculeze deplasarea punctului de aplicație al forței F.

Se cunosc: $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa, h = 3 m, a = 1 m.

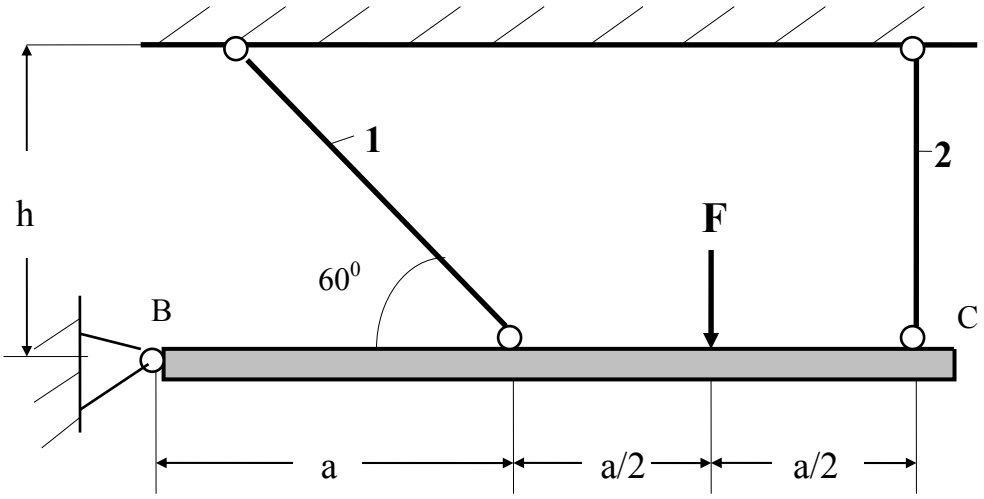


Fig.5.4-1

Rezolvare.

a) Parcurgem etapele prezentate la paragraful 5.1, etape pe care le-am utilizat şi la exemplele precedente.

- Interes prezintă numai cei doi tiranți, 1 şi 2.
- Ambii tiranți sunt solicitați numai la întindere.
- Având secțiune constantă şi fiind solicitați de eforturi axiale constante (neavând încărcări pe lungimea lor), orice secțiune a tiranților poate fi considerată ca periculoasă.
- Problema este de verificare, iar condiția impusă este cea de rezistență (se dă numai σ_a).
- Din Tabelul 5.1-1, relația de calcul care se utilizează este:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} = \ldots \qquad 5.4\text{-}1$$

Aria secțiunii transversale A este cunoscută, dar efortul axial N din tiranți nu este cunoscut. Pentru aflarea efortului axial, procedăm ca la exemplul de la paragraful 5.2 (vezi Fig.5.4-2):

- secționăm tiranții,
- înlocuim porțiunile înlăturate cu eforturile N_1 şi N_2,
- izolăm sistemul,

- punem condițiile de echilibru (sistemul este plan).

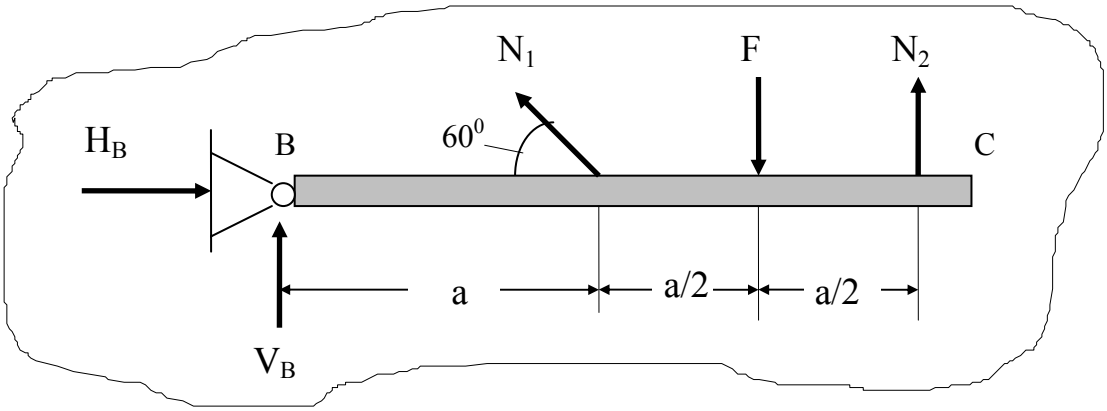


Fig.5.4-2

Sistemul din Fig.5.4-2 este în echilibru sub acțiunea eforturilor N_1, N_2, a sarcinii F şi a reacțiunilor (pe orizontală şi verticală) din reazemul B. Sistemul fiind plan, se pot scrie după cum se ştie, numai trei ecuații independente de echilibru. Există 4 (patru) necunoscute (H_B, V_B, N_1, N_2) şi 3 (trei) ecuații de echilibru posibil a fi scrise. Rezultă că sistemul dat este o dată static nedeterminat (n = 4-3 = 1).

Ecuația suplimentară, rezultă din explicitarea unei relații care se va scrie (şi aceasta trebuie găsită) între deformațiile sau deplasările diferitelor secțiuni ale tiranților.

Din cele 4 necunoscute, pe noi nu ne interesează în mod normal, direct, decât eforturile axiale N_1 şi N_2. Din acest motiv, la scrierea ecuațiilor de echilibru, renunțăm la ecuațiile de proiecții de forțe pe direcție orizontală şi verticală, deoarece acestea nu fac altceva decât să introducă necunoscutele H_B şi V_B, care nici nu ne interesează.

Scriem atunci o singură ecuație de echilibru, ca o sumă de momente față de reazemul B (să dispară H_B şi V_B):

$$(\sum M)_B = 0 \;\rightarrow\; (N_1 \sin 60^0)\, a - F\, 3\, a/2 + N_2\, 2a = 0$$

sau după efectuarea calculelor,

$$N_1 + 4\, N_2 = 3\, F \qquad 5.4\text{-}2$$

Sistemul tot o dată static nederminat este: am scris o relație (rel. 5.4-2) şi sunt două necunoscute (N_1 şi N_2).

Să căutăm acum relația suplimentară. Pentru aceasta procedăm ca la exemplul de a paragraful 5.2, unde s-a arătat cum se poate ajunge la deplasarea unei secțiuni:

- desenăm sistemul nedeformat (cu linie continuă),
- desenăm sistemul în poziție deformată (cu linie întreruptă),
- etc. (vezi exemplul 5.2 punctul b).

Rezultatul raționamentului făcut pentru a determina relația suplimentară este prezentat în Fig.5.4-3.

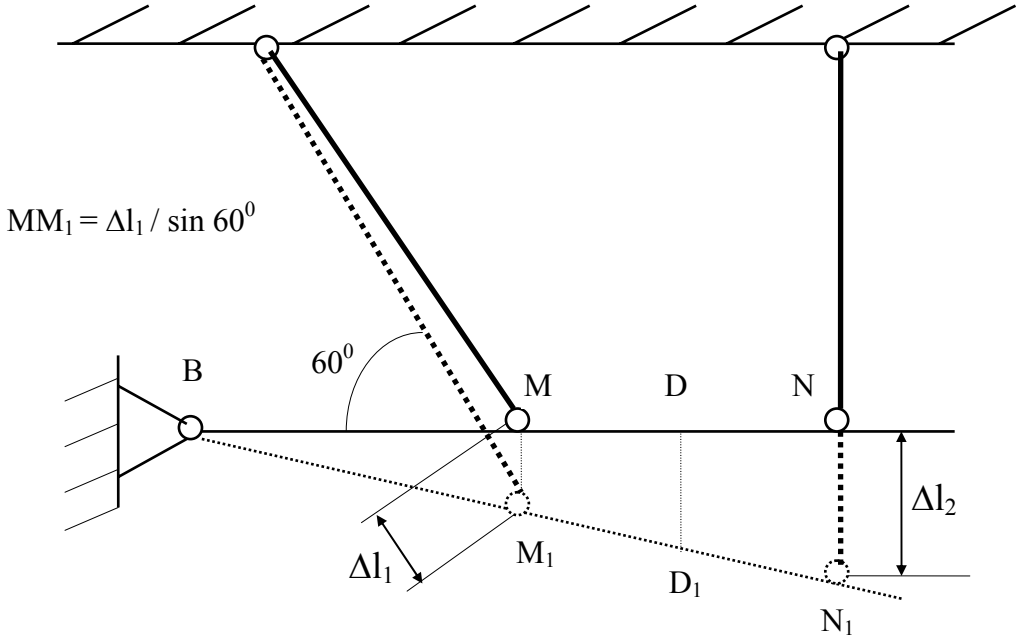


Fig.5.4-3

Triunghiurile BMM_1 şi BNN_1 sunt asemenea şi putem scrie:

$$\frac{MM_1}{NN_1} = \frac{BM}{BN} \Rightarrow \frac{\frac{\Delta l_1}{sin\,60^0}}{\Delta l_2}\frac{a}{2a} \Rightarrow \frac{\Delta l_1}{\Delta l_2 \cdot sin\,60^0} = \frac{1}{2}$$

După efectuarea calculelor, relația între deformațiile celor doi tiranți este de forma:

$$4 \cdot \Delta l_1 = \sqrt{3} \cdot \Delta l_2 \qquad 5.4\text{-}3$$

Explicitând acum relația 5.4-3, rezultă:

$$4\frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} = \sqrt{3} \cdot \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2}$$

iar dacă se înlocuiesc lungimile tiranților l_1 şi l_2 funcție de dimensiunea **h** şi se fac simplificările corespunzătoare, se ajunge la o relație finală între eforturile N_1 şi N_2, care este tocmai relația suplimentară de care avem nevoie:

$$8\ N_1 - 3\ N_2 = 0 \qquad 5.4\text{-}4$$

Relația 5.4-4 se ataşează celei de echilibru (rel. 5.4-2), obținându-e sistemul 5.4-5, de unde se calculează eforturile necunoscute N_1 şi N_2:

$$\begin{aligned} N_1 + 4\ N_2 &= 3F \\ 8\ N_1 - 3\ N_2 &= 0 \end{aligned} \qquad 5.4\text{-}5$$

Ținând seama de valoarea forței F, după rezolvarea sistemului 5.4-5, rezultă pentru eforturile N_1 şi N_2, valorile:

$$\begin{aligned} N_1 &= 10{,}285\ \text{kN} \\ N_2 &= 27{,}428\ \text{kN}. \end{aligned}$$

De aici, problema este uşor de rezolvat, sistemul fiind static determinat iar o serie de mărimi sunt deja calculate.

Dintre cei doi tiranți, mai periculos este tirantul 2, deoarece având aceeaşi arie pentru secțiunea transversală ca tirantul 1, prezintă un efort axial mai mare ($N_2 > N_1$). Ca urmare a acestei concluzii, este suficient să verificăm numai tirantul 2, cel mai periculos. În acest context, relația de verificare 5.4-1, devine:

$$\sigma_{max} = \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{N_2}{\frac{\Pi \cdot d^2}{4}} = 38{,}80\ MPa$$

Aşadar:

$\sigma_{max} = 38{,}80$ MPa $< \sigma_a = 150$ MPa.

Rezultă că cei doi tiranți satisfac condiția de rezistență cerută.

b) Pentru determinarea deplasării punctului de aplicație al forței F, utilizăm Fig.5.4-3, de unde rezultă:

$$\delta_F = DD_1 \qquad 5.4\text{-}6$$

Din asemănarea triunghiurilor BDD_1 şi BNN_1, rezultă:

$$\frac{DD_1}{\Delta l_2} = \frac{BD}{BN} \Rightarrow \frac{\delta_F}{\Delta l_2} = \frac{\frac{3}{2}a}{2 \cdot a} \qquad 5.4\text{-}7$$

de unde se obține:

$$\delta_F = \Delta l_2 \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \cdot \Delta l_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} = 0,415 \ mm$$

Observație. Dacă gradul de nedeterminare este 2, 3, 4, ... trebuie căutate 2, 3, 4, ... relații între deformațiile elementelor ce compun sistemul respectiv.

5.5 Calculul sistemelor cu inexactități de execuție

La executarea unei structuri de rezistență, este greu de realizat o dimensiune exactă a diferitelor elemente. Totdeauna trebuie avut în vedere posibilitatea existenței unei mici inexactități de execuție.

În cazul sistemelor static determinate, inexactitățile de execuție nu provoacă nici un fel de tensiuni suplimentare în sistem.

În cazul sistemelor static nedeterminate, datorită montării forțate ca umare a existenței unor inexactități de execuție, în elementele de rezistență se creează tensiuni suplimentare. De multe ori, aceste tensiuni suplimentare sunt mari, iar suprapuse peste cele create de forțele exterioare, pot compromite capacitatea de rezistență a elementelor.

În acest capitol, se vor prezenta două cazuri de sisteme cu inexactități de execuție.

5.5.1 *Calculul barelor articulate static nederminate, cu inexactități de execuție*

Exemplul nr.1

Se consideră un sistem alcătuit din trei bare articulate, la care bara centrală (bara 3) dintr-o greşeală de execuție este mai scurtă cu δ (Fig.5.5.1-1a).

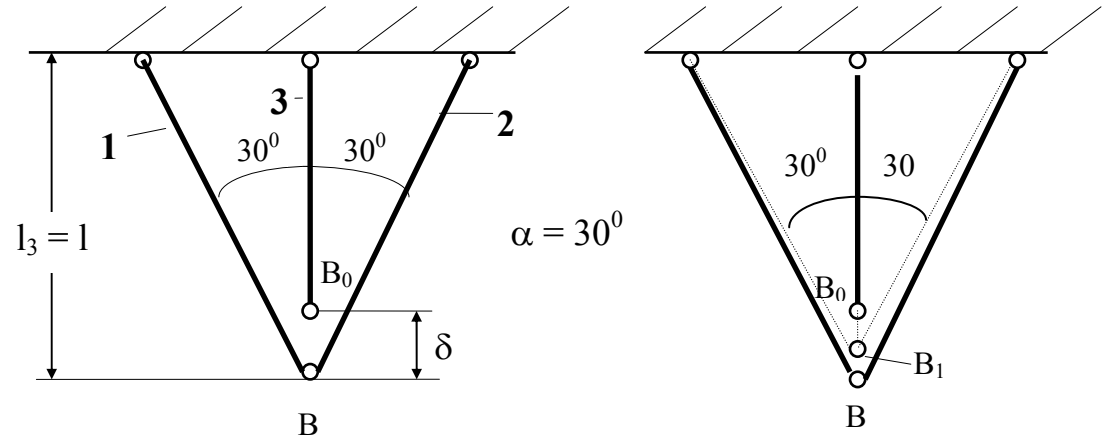


Fig.5.5.1-1

Se cere să se calculeze tensiunile din cei trei tiranți după realizarea montajului în mod forțat.

Rezolvare

Barele trebuie montate înt-un nod comun B_1 (Fig.5.5.1-1b).
Se creează câteva situații care trebuie discutate.

a) Bara 3 să fie întinsă până în nodul B (Fig.5.5.1-1a). Asta înseamnă că bara 3 este solicitată, iar barele 1 şi 2, nu. Practic această situație nu este posibilă, deoarece solicitarea având loc în domeniul elastic pentru bara 3, după montare bara 3 tinde să revină la dimensiunea ei inițială (să se comprime), ceea ce automat acționează şi asupra barelor 1 şi 2 comprimându-le, rezultând situația prezentată în Fig.5.5.1-1b.

b) De data aceasta să presupunem că barele 1 şi 2 sunt comprimate astfel încât nodul B să fie dus în nodul B_0. La fel, după montare, barele 1 şi 2 caută să revină la dimensiunile inițiale, solicitând bara 3 la întindere şi astfel rezultă tot varianta de montaj prezentată în Fig.5.5.1-1b.

Deci, montarea forțată a celor trei bare, nu poate fi făcută decât prin solicitarea tuturor barelor (barele 1 şi 2 se comprimă iar bara 3 se lungeşte), nodul comun de montaj fiind nodul B_1 (Fig.5.5.1-1b).

Determinarea eforturilor din cele trei bare (N_1, N_2, N_3) se face prin metoda deja cunoscută, rezultând sistemul din Fig.5.5.1-2.

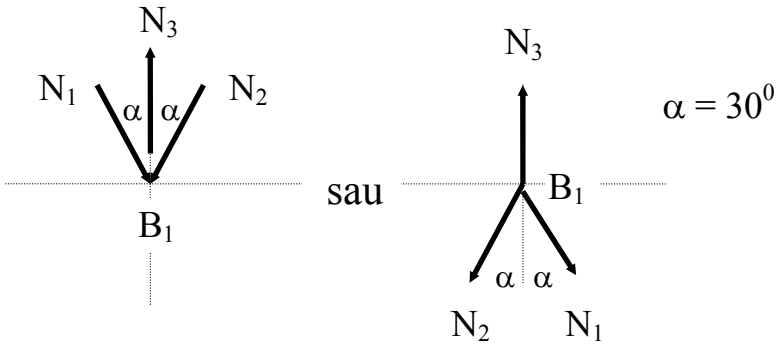


Fig.5.5.1-2

Punând condiția de echilibru pentru sistemul din Fig.5.5.1-2, se obține:

$$(\sum F)_x = 0$$

$$N_1 \sin 30^0 - N_2 \sin 30^0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad N_1 = N_2 \qquad 5.5.1\text{-}1$$

$$(\sum F)_y = 0$$

$$N_3 - N_2 \cos 30^0 - N_1 \cos 30^0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2N_1 \cos 30^0 - N_3 = 0 \qquad 5.5.1\text{-}2$$

$$(\sum M)_{B^1} = 0 \quad \Rightarrow$$ nu se poate scrie o astfel de ecuație.

Sunt trei necunoscute şi s-au scris două ecuații. Rezultă că sistemul este o dată static nedeterminat. Ecuația suplimentară, rezultă din Fig.5.5.1-1b, prezentată mai bine (mărită) în Fig.5.5.1-3.

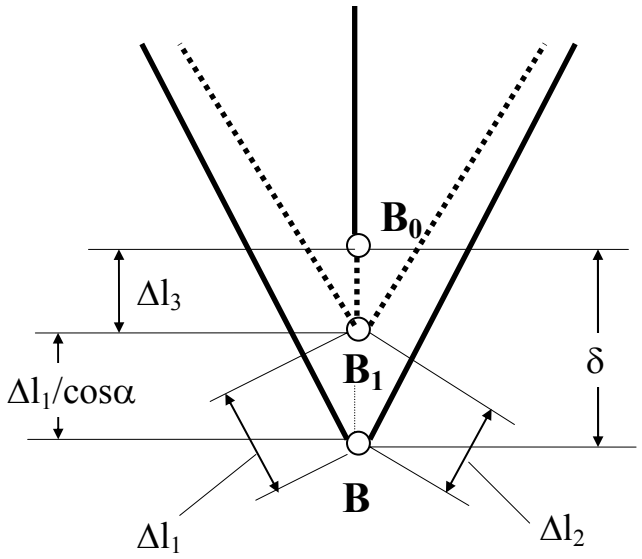


Fig.5.5.1-3

Din Fig.5.5.1-3, rezultă:

$$B_0B = B_0B_1 + B_1B$$

sau

$$\delta = \Delta l_3 + \Delta l_1 / \cos \alpha \qquad 5.5.1\text{-}3$$

Considerând cazul când barele au caracteristicile $A_1 = A_2 \neq A_3$, $l_1 = l_2 \neq l_3$, $E_1 = E_2 \neq E_3$ şi explicitând relația 5.5.1-3, se obține:

$$\delta = \frac{N_3 \cdot l_3}{E_3 \cdot A_3} + \frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1 \cdot \cos\alpha} \qquad 5.5.1\text{-}4$$

unde:

$l_1 = l_2 \approx l_3 / \cos\alpha$

Ecuația 5.5.1-4 se ataşează ecuației 5.5.1-2, iar din sistemul format.

$$2N_1 \cos\alpha - N_3 = 0 \qquad 5.5.1\text{-}5a$$

$$\delta = \frac{N_3 \cdot l_3}{E_3 \cdot A_3} + \frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1 \cdot \cos\alpha} \qquad 5.5.1\text{-}5b$$

se obțin eforturile:

$$N_1 = N_2 = \frac{\delta}{l_3\left(\frac{1}{E_1 \cdot A_1 \cdot \cos\alpha} + \frac{2 \cdot \cos\alpha}{E_3 \cdot A_3}\right)} \qquad 5.5.1\text{-}6$$

$$N_3 = \frac{2 \cdot \delta \cdot \cos\alpha}{l_3\left(\frac{1}{E_1 \cdot A_1 \cdot \cos\alpha} + \frac{2 \cdot \cos\alpha}{E_3 \cdot A_3}\right)} < N_1 \qquad 5.5.1\text{-}7$$

În bara 3 se produc tensiuni de întindere, de valoare:

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} > 0 \qquad 5.5.1\text{-}8$$

iar în barele 1 şi 2, tensiuni normale de compresiune:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{N_2}{A_2} < 0 \qquad 5.5.1\text{-}9$$

Calculele numerice pe exemple, conduc la concluzia că montarea forțată, poate crea tensiuni mari în elementele de rezistență. Sigur, aceste structuri care au fost montate forțat, sunt ulterior supuse unui sistem de forțe exterioare. Forțele exterioare vor creea la rândul lor, tensiuni. Este un mare pericol atunci când s-au făcut montări

forțate şi fenomenul trebuie adus imediat la cunoştiința proiectantului, pentru a reface calculul de rezistență şi a lua măsuri de compensare a tensiunilor cauzate de montajul forțat.

Spre exemplu, pentru cazul prezentat, dacă după montarea forțată, în nodul comun B_1 sistemul este solicitat de o forță F (Fig.5.5.1-4), forța F produce în toate cele trei bare tensiuni normale de întindere. Efectul acțiunii forței F este acela că în bara 3, având şi datorită montării forțate tensiuni de întindere, tensiunile normale finale cresc, putând conduce la cedarea prin rupere a acestei bare.

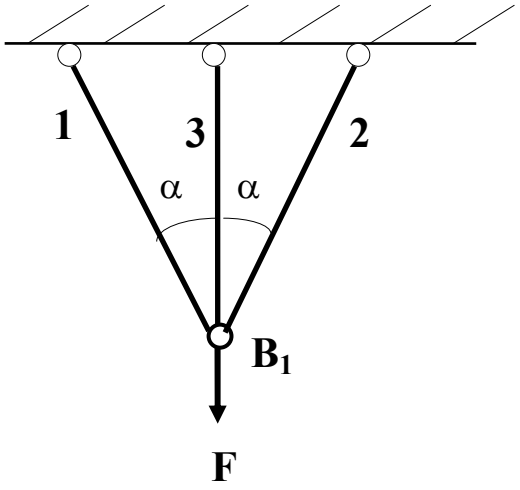


Fig.5.5.1-4

În acelaşi timp, barele 1 şi 2, având de la montarea forțată tensiuni de compresiune, prin aplicarea forței F, tensiunile finale scad.

În concluzie, pentru sistemul prezentat, prin aplicarea forței F după realizarea montajului forțat, bara 3 se încarcă suplimentar, iar barele 1 şi 2, se descarcă.

Exemplul nr.2 *Dintr-o greşeală, bara 2 a sistemului din Fig.5.5.1-5 s-a realizat mai scurtă cu* $\delta = 2$ *mm. Barele fiind de secțiune circulară cu diametrele* d_1*, respectiv* d_2*, se cere să se calculeze tensiunile din cele două bare care susțin platforma rigidă BC, după montarea forțată.*

Se cunosc: $l_1 = l_2 = l = 2$ *m,* $d_1 = 20$ *mm,* $d_2 = 10$ *mm,* $E_1 = 1{,}3\ 10^5$ *MPa,* $E_2 = 2{,}1\ 10^5$ *MPa,* $a = 1$ *m.*

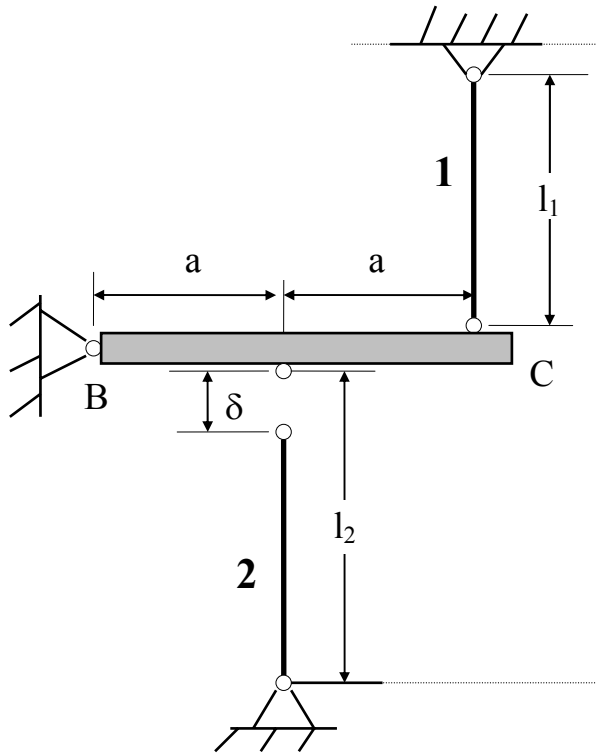


Fig.5.5.1-5

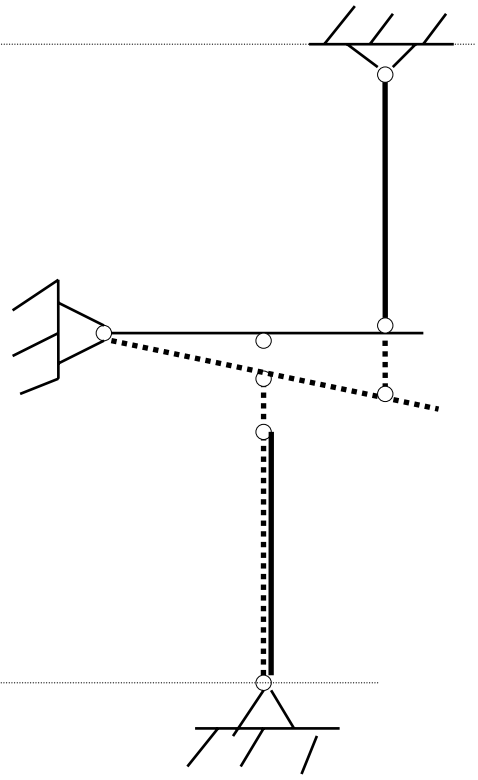


Fig.5.5.1-6

Rezolvare

Poziția sistemului după montarea forțată, este prezentată în Fig.5.5.1-6. Această poziție se obține prin întinderea atât a barei 1 cât şi a barei 2. În ambele bare apar tensiuni de întindere. Evidențierea eforturilor este prezentată în Fig.5.5.1-7.

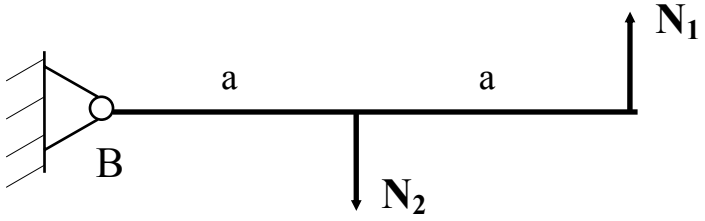


Fig.5.5.1-7

Condiția de echilibru, conduce la ecuația:

$$(\sum M)_B = 0$$

$$N_1\, 2a - N_2\, a = 0$$

de unde,

$$N_1 = N_2 / 2 \qquad 5.5.1\text{-}10$$

S-a obținut o singură relație şi există două necunoscute: N_1 şi N_2. Sistemul este static nedeterminat o singură dată. Relația suplimentară, rezultă din prezentarea deformațiilor suferite de cele două bare la montarea lor forțată, aşa cum se prezintă în Fig.5.5.1-8.

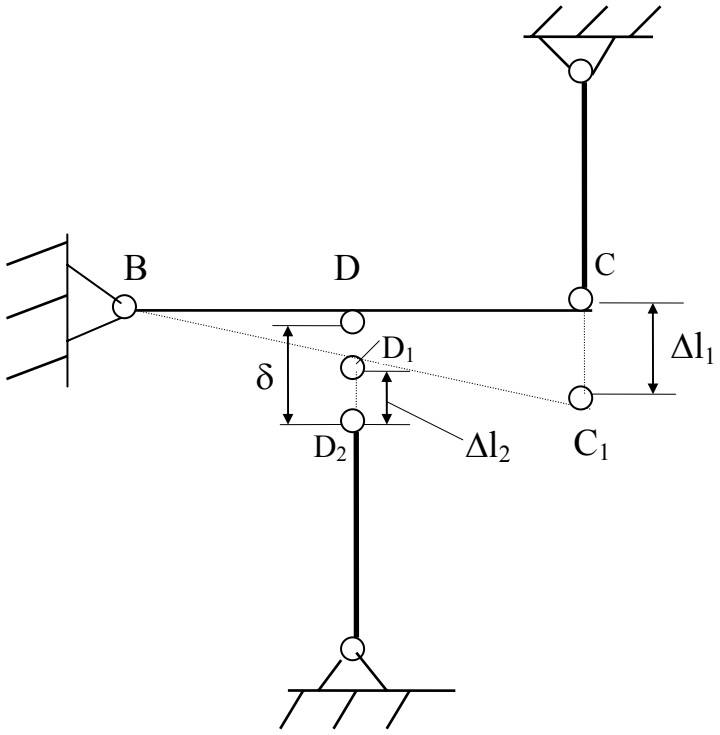


Fig.5.5.1-8

Din Fig.5.5.1-8, rezultă că:

$$\delta = \Delta l_2 + DD_1 \qquad 5.5.1\text{-}11$$

iar din asemănarea triunghiurilor BDD_1 şi BCC_1, se obține:

$$\frac{DD_1}{\Delta l_1} = \frac{a}{2a} \Rightarrow DD_1 = \frac{\Delta l_1}{2} \qquad 5.5.1\text{-}12$$

Ținând seama de relația 5.5.1-12, relația 5.5.1-11, devine:

$$\delta = \Delta l_2 + \Delta l_1 / 2 \qquad 5.5.1\text{-}13$$

iar explicitată, conduce la relația:

$$\delta = \frac{N_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} \qquad 5.5.1\text{-}14$$

Din rezolvarea sistemului format de relațiile 5.5.1-10 şi 5.5.1-14:

$$N_1 - 2\,N_2 = 0 \qquad 5.5.1\text{-}15a$$

$$\delta = \frac{N_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} \qquad 5.5.1\text{-}15b$$

rezultă eforturile axiale N_1 şi N_2 din cele două bare:

$$N_1 = \frac{\delta}{1 \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot E_1 \cdot A_1} + \frac{2}{E_2 \cdot A_2}\right)} = 7{,}490 \quad \text{kN} \qquad 5.5.1\text{-}16$$

$$N_2 = 2\,N_1 = 14{,}981 \quad \text{kN} \qquad 5.5.1\text{-}17$$

Ca urmare a montării forțate, tensiunile normale din cele două bare sunt:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{4 \cdot N_1}{\Pi \cdot d_1^2} = 23{,}84 \ \ MPa$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{4 \cdot N_2}{\Pi \cdot d_2^2} = 190{,}74 \ \ MPa$$

Din acest exemplu se constată că prin montarea forțată a sistemului, în bara 2 (care este din oțel) se produc tensiuni mai mari decât cele admisibile.

La o încărcare exterioară (într-un anumit fel), bara 2 poate ceda şi odată cu aceasta, întregul sistem.

Atenție: tensiunile rezultate în urma montării forțate ale diferitelor elemente de rezistență, pot fi foarte mari şi ele nu trebuie neglijate.

5.5.2 *Calculul barelor drepte, solicitate axial, care prezintă un rost* (spațiu) *la un capăt*

Se consideră bara dreaptă din Fig.5.5.2-1 care dintr-o greşeală s-a executat mai scurtă cu δ. Se cere să se calculeze tensiunile maxime care apar în bară, după aplicarea sistemului de forţe (Fig.5.5.2-1). Se cunosc: $\delta = 0{,}1$ mm, $A_2 = 2A_1 = 1.000\ mm^2$, $l = 0{,}5$ m, $E_1 = E_2 = E = 2{,}1\ 10^5$ MPa, $F = 18$ kN.

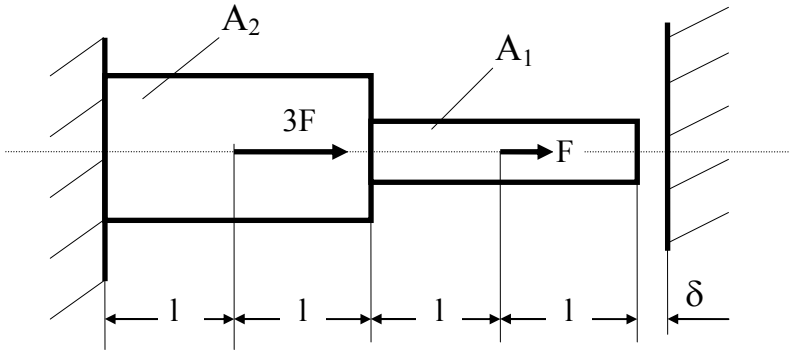


Fig.5.5.2-1

Rezolvare

Sub acțiunea forțelor aplicate, bara se deformează. În cazul nostru, bara se lungeşte.

La acest tip de problemă, pot exista două cazuri:

a) Sub acțiunea forțelor aplicate bara se lungeşte, dar lungirea ei totală nu depăşeşte rostul δ, astfel încât capătul liber nu atinge reazemul din dreapta. Această situație a fost tratată în paragraful 5.3.

b) Sub acțiunea forțelor aplicate, bara se lungeşte iar lungirea ei totală este mai mare decât rostul δ şi capătul din dreapta inițial liber atinge reazemul, apărând astfel o reacțiune suplimentară (în reazemul din dreapta).

Acest ultim caz se prezintă în cele ce urmează.

Dacă lungirea totală a barei este mai mare decât δ, sistemul se prezintă ca în Fig.5.5.2-2.

În cele două reazeme, apar reacțiunile N_B, respectiv N_C (Fig.5.5.2-2).

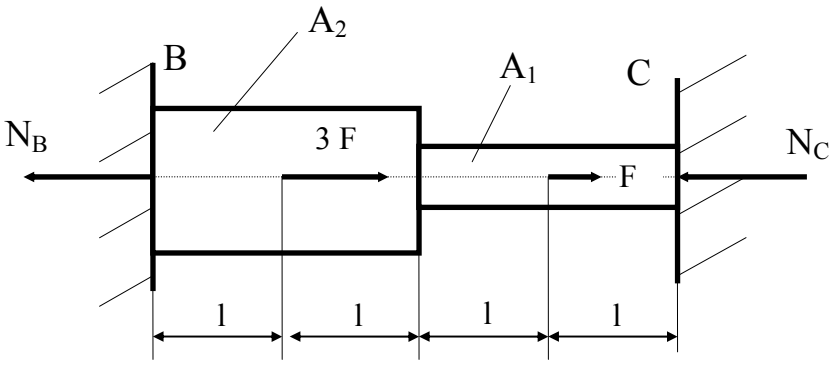


Fig.5.5.2-2

Parcurgem etapele pe care deja le cunoaştem de la exemplele precedente.

- Ne interesează toată bara.
- Bara este solicitată axial.
- Secțiunea periculoasă nu o putem determina până nu trasăm diagrama de efort axial (efortul axial este singurul efort care există).
- Problema este de verificare (se cer tensiunile maxime).
- Condiția impusă este condiția de rezistență.
- Din Tabelul 5.1-1, relația de calcul care se utilizează, este

$$\sigma = \frac{N}{A} = \ldots \qquad 5.5.2\text{-}1$$

Deci, nu cunoaştem secțiunea periculoasă, unde se scrie relația 5.5.2-1. Pentru aceasta, trebuie trasată diagrama de efort axial N:

- se fixează reacțiunile (Fig.5.5.2-2),
- se pun condițiile de echilibru:

$(\sum F)_x = 0$

$$N_B - 3F - F + N_C = 0,$$

sau

$$N_B + N_C = 4F \qquad 5.5.2\text{-}2$$

$(\sum F)_y = 0$

- nu putem scrie o astfel de condiție

$(\sum M) = 0$

- nu putem scrie o astfel de condiție.

Am scris o relație (rel 5.5.2-2) şi avem două necunoscute (N_1 şi N_2). Rezultă că sistemul este o dată static nedeterminat. Relația suplimentară o determinăm după cum deja se ştie, din analiza modului de deformare al barei.

Sub acțiunea forțelor aplicate, bara se deformează cu Δl (Fig.5.5.2-3). Dar, deformația barei nu poate fi mai mare decât rostul δ, reacțiunea N_C (sau reazemul din dreapta) împiedicând deformarea mai departe a barei. Schema cu sistemul nedeformat (linie continuă), deformat (linie întreruptă) şi deformațiile produse, este prezentată în Fig.5.5.2-3.

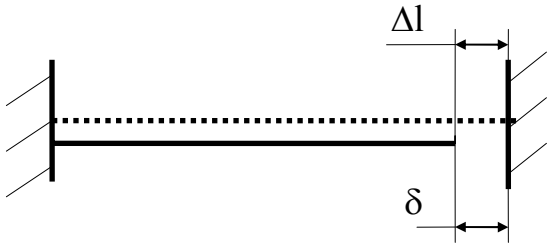


Fig.5.5.2-3

Din Fig.5.5.2-3, rezultă relația dintre deformațiile barei:

$$\Delta l = \delta \qquad 5.5.2\text{-}3$$

care explicitată (vezi Fig.5.5.2-2), conduce la relația:

$$\frac{N_B \cdot l}{E \cdot A_2} + \frac{(N_B - 3F) \cdot l}{E \cdot A_2} + \frac{(N_B - 3F) \cdot l}{E \cdot A_1} + \frac{(N_B - 3F - F) \cdot l}{E \cdot A_1} = \delta \qquad 5.5.2\text{-}4$$

Se poate constata că deformația întregii bare Δl, s-a scris ca o sumă de deformații, deoarece atât efortul axial N cât şi rigiditatea EA, variază în lungul barei.

Ținând seama că $A_2 = 2A_1$ şi efectuând calculele, relația 5.5.2-4 capătă forma:

$$3 \cdot N_B - \frac{17}{2} \cdot F = \frac{E \cdot A_1 \cdot \delta}{l} \qquad 5.5.2\text{-}5$$

Relația 5.5.2-5 se atașează celei rezultate din condiția de echilibru (rel. 5.5.2-2), de unde rezultă reacțiunile N_B şi N_C:

$$N_B = \frac{17}{6} \cdot F + \frac{E \cdot A_1 \cdot \delta}{3 \cdot l} \qquad 5.5.2\text{-}6$$

$$N_C = \frac{7}{6} \cdot F - \frac{E \cdot A_1 \cdot \delta}{3 \cdot l} \qquad 5.5.2\text{-}7$$

iar ca valori numerice, rezultă.

$N_B = 65$ kN
$N_C = 7$ kN

Având acum valorile reacțiunilor se poate trasa diagrama efortului axial N. Diagrama efortului axial rezultată, este prezentată în Fig.5.5.2-4.

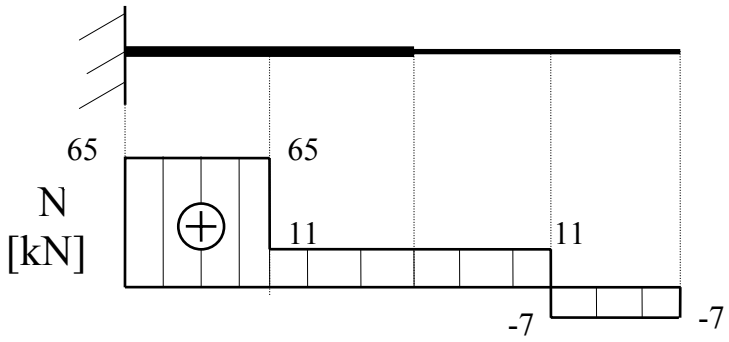


Fig.5.5.2-4

Analizând diagrama din Fig.5.5.2-4 şi mărimea ariei secțiunii transversale a barei în lungul acesteea, rezultă că intervalul din stânga unde N = 65 kN este cel mai periculos. Secțiunea periculoasă este oricare din acest interval.

Acum relația generală 5.5.2-1 de calcul a tensiunii normale maxime, capătă forma:

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A_2} = \frac{65 \cdot 10^3}{2 \cdot 1000} = 32{,}5\ MPa < \sigma_a = 150\ MPa$$

Bara din Fig.5.5.2-1 poate fi solicitată de sistemul de forțe aplicat. Condiția de rezistență impusă este satisfăcută.

Observație. În situația barelor care nu prezintă rostul δ (δ = 0), problema se rezolvă la fel, numai că relația 5.5.2-3, are forma:

$$\Delta l = 0 \qquad 5.5.2\text{-}8$$

5.6 Calculul barelor cu secțiuni neomogene, solicitate axial

Secțiunile neomogene*, sunt acele secțiuni care în puncte diferite prezintă proprietăți diferite*.

Barele cu secțiuni neomogene fac parte în general din categoria barelor static nedeterminate. Ca un exemplu clasic de bară cu secțiune neomogenă, amintesc un stâlp de beton armat cu bare metalice.

Exemplul nr.1. *Fie un stâlp de beton de înălțime* ***h*** *şi secțiune transversală patrată cu latura* ***a****, armat cu vergele de oțel, aşezate în lungul stâlpului. Stâlpul este solicitat de o forță axială de compresiune F ca în Fig.5.6-1. Notăm:*

A_b *- aria secțiunii transversale a porțiunii de beton a stâlpului*

A_0 *- aria totală a secțiunii barelor armăturii de oțel,*

σ_{ab} *- tensiunea admisibilă la compresiune a betonului*

σ_a *- tensiunea admisibilă a oțelului (armăturii),*

E_b *- modulul de elasticitate al betonului,*

E *- modulul de elasticitate al oțelului (armăturii).*

Se cere să se determine forța capabilă F pentru acest stâlp, cunoscând σ_a.

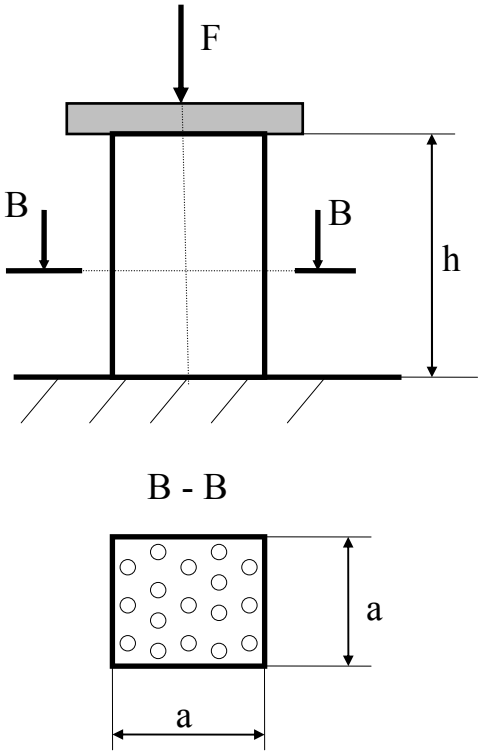


Fig.5.6-1

Rezolvare.

Se parcurg etapele cunoscute:

- Interesează întregul stâlp.
- Stâlpul este solicitatat axial (la compresiune).
- Secțiunea este constantă, efortul axial de asemenea. Rezultă că secțiunea periculoasă este oricare.
- Problema este de efort capabil (se cere F)
- Se impune condiția de rezistență (se dă σ_a).
- Din Tabelul 5.1-1, relația utilizată, este:

$$N_{b,cap} = A_b \, \sigma_{ab} = ... \qquad 5.6\text{-}2$$

$$N_{0,cap} = A_0 \, \sigma_a = ... \qquad 5.6\text{-}3$$

Trebuie determinate eforturile din beton şi armătura de oțel (N_b, respectiv N_0).

O parte a forței F care comprimă stâlpul, este preluată de beton (N_b), iar cealaltă parte este preluată de barele de oțel ale armăturii (N_0).

Eforturile N_b şi N_0 echilibrează acțiunea forței F (Fig.5.6-2).

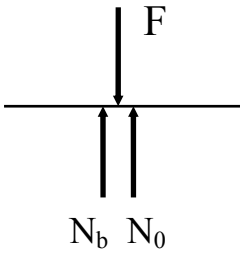


Fig.5.6-2

Condiția de echilibru (Fig.5.6-2) conduce la relația:

$$(\sum F)_y = 0$$

$$N_b + N_0 = F \qquad 5.6\text{-}4$$

Altă relație de echilibru nu se mai poate scrie.

Rezultă că sistemul este o dată static nedeterminat: s-a scris o singură ecuație şi sunt două necunoscute (N_b şi N_0). Acum trebuie găsită o relație între deformațiile elementelor sistemului.

Se are în vedere faptul că atât partea din beton a stâlpului cât şi cea de oțel (Fig.5.6-3) se vor scurta cu aceeaşi cantitate:

$$\Delta l_0 = \Delta l_b \qquad 5.6\text{-}5$$

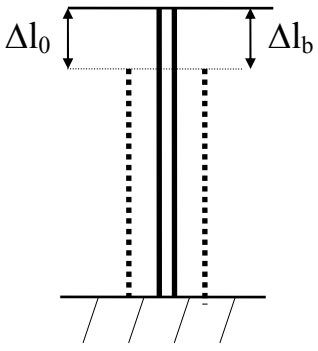


Fig.5.6-3

Explicitarea relației 5.6-5, conduce la:

$$\frac{N_0 \cdot h}{E \cdot A_0} = \frac{N_b \cdot h}{E_b \cdot A_b} \qquad 5.6\text{-}6a$$

sau:

$$\frac{N_0}{E \cdot A_0} = \frac{N_b}{E_b \cdot A_b} \qquad 5.6\text{-}6b$$

Relația 5.6-6b se atașează ecuației de echilibru 5.6-4, rezultând sistemul:

$$N_0 + N_b = F \qquad 5.6\text{-}7a$$

$$\frac{N_0}{E \cdot A_0} = \frac{N_b}{E_b \cdot A_b} \qquad 5.6\text{-}7b$$

cu:

$$A_0 + A_b = a^2 \qquad 5.6\text{-}7c$$

După rezolvarea sistemului 5.6-7a,b,c rezultă eforturile axiale din beton (N_b), respectiv din armătura de oțel (N_0):

$$N_b = \frac{F}{1+\frac{A_0}{A_b}\cdot\frac{E}{E_b}} \qquad 5.6\text{-}8$$

$$N_0 = \frac{F}{1+\frac{A_b}{A_0}\cdot\frac{E_b}{E}} \qquad 5.6\text{-}9$$

Problema fiind de efort capabil, se revine la relațiile 5.6-2, respectiv 5.6-3, obținându-se:

$$N_{b,cap} = A_b \cdot \sigma_{ab} = \frac{F'}{1+\frac{A_0}{A_b}\cdot\frac{E}{E_b}} \qquad 5.6\text{-}10$$

$$N_{0,cap} = A_0 \cdot \sigma_a = \frac{F''}{1+\frac{A_b}{A}\cdot\frac{E_b}{E}} \qquad 5.6\text{-}11$$

Din relațiile 5.6-10 şi 5.6-11, se obțin valorile forței capabile pentru satisfacerea condiției de rezistență atât a betonului cât şi a armăturii de oțel:

$$F' = A_b \cdot \sigma_{ab}\left(1 + \frac{A_0}{A_b} \cdot \frac{E}{E_b}\right) \qquad 5.6\text{-}12a$$

$$F'' = A_0 \cdot \sigma_a\left(1 + \frac{A_b}{A_0} \cdot \frac{E_b}{E}\right) \qquad 5.6\text{-}12b$$

Pentru ca ambele materiale (betonul şi armătura de oțel) să satisfacă condiția de rezistență, valoarea maximă admisă a forței F care poate fi acceptată, este:

$$F_{max} = \min (F' ; F'') \qquad 5.6\text{-}13$$

Exemplul nr.2. *Să se verifice elementele de rezistență ale sistemului din Fig.5.6-4, pentru care se cunosc: F = 100 kN, δ = 0,1 mm, $E_{OL} = E_0 = 2\ 10^5$ MPa, $E_{cu} = E_c = 10^5$ MPa, $\sigma_{a,OL} = \sigma_{a,} = 150$ MPa, $\sigma_{a,Cu} = \sigma_{a,c} = 50$ MPa, d = 20 mm, d_1 = 35 mm, d_2 = 50 mm.*

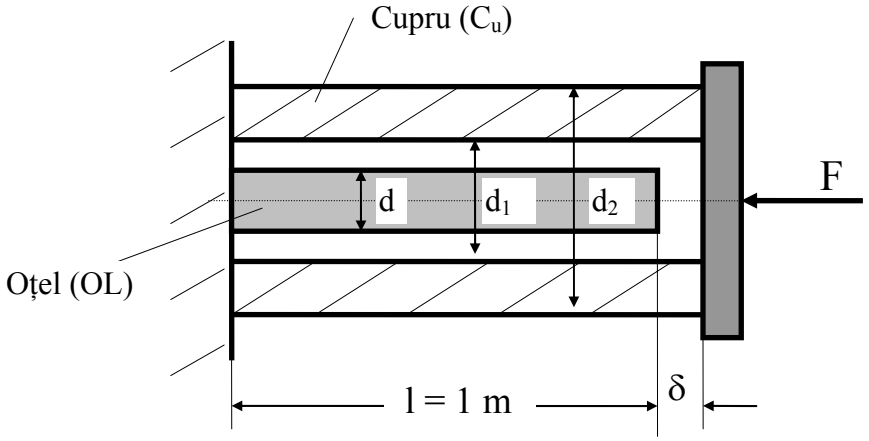


Fig.5.6-4

Rezolvare

Dacă se efectuează o secțiune transversală prin sistem, în secțiune se întâlneşte atât oțel cât şi cupru. Deci, sistemul este cu secțiune neomogenă.

Parcurgem etapele de rezolvare cunoscute:

- Interesează ambele elemente: atât bara de oțel cât şi cea de cupru. Bara de oțel este circulară, iar cea de cupru are secțiune inelară (este o țeavă).
- Ambele elemente sunt solicitate axial (la compresiune), dacă sub acțiunea forței F, bara de cupru se scurtează cu mai mult de δ. Pentru acest exemplu considerăm această situație. Eforturile axiale din cele două bare ($N_{OL} \equiv N_0$ şi $N_{Cu} \equiv N_c$) care iau naştere, se opun acțiunii forței F (Fig.5.6-5).
- Cum barele au secțiune constantă iar eforturile axiale din ele sunt de asemenea constante în lungul lor, rezultă că secțiunea periculoasă poate fi oricare.

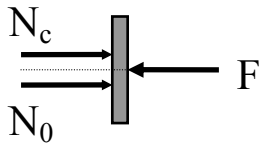


Fig.5.6-5

- Problema este de verificare, iar condiția impusă este cea de rezistență.
- Din Tabelul 5.1-1, relația pentru calcul este:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} = \dots \qquad 5.6\text{-}14$$

iar transpusă pentru cele două bare, rezultă:

$$\sigma_{max,0} = \frac{N_0}{A_0} = \dots \qquad 5.6\text{-}15$$

$$\sigma_{max,c} = \frac{N_c}{A_c} = \dots \qquad 5.6\text{-}16$$

Pentru rezolvarea relațiilor 5.6-15 şi 5.6-16, trebuie cunoscute eforturile axiale N_0 şi N_c din cele două bare. Punând condiția de echilibru (Fig.5.6-5), rezultă:

$$(\sum F)_x = 0$$

$$N_0 + N_c = F \qquad 5.6\text{-}17$$

Altă relație de echilibru nu se mai poate scrie. Existând două necunoscute (N_0 şi N_c) şi scriind o singură relație (rel. 5.6-17), rezultă că sistemul este o dată static nedeterminat. Relația suplimentară necesară, se obține din condiția de deformare a sistemului. În Fig.5.6-6, se prezintă deformațiile celor două bare, de unde rezultă uşor relația dintre deformații:

$$\Delta l_c - \Delta l_0 = \delta \qquad 5.6\text{-}18$$

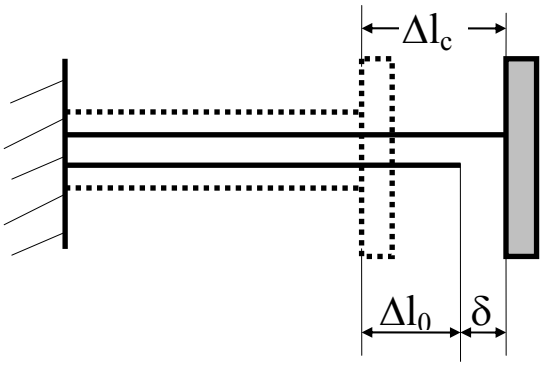


Fig.5.6-6

După deformare, ambele bare prezintă aceeaşi lungime. Explicitând relația 5.6-18, rezultă:

$$\frac{N_c \cdot l}{E_c \cdot A_c} - \frac{N_0 \cdot l}{E \cdot A_0} = \delta \qquad 5.6\text{-}19$$

Ataşând relația 5.6-19 la relația 5.6-17, se obține sistemul care permite determinarea celor două eforturi axiale :

$$N_c + N_0 = F \qquad 5.6\text{-}20a$$

$$\frac{N_c}{E_c \cdot A_c} - \frac{N_0}{E \cdot A_0} = \frac{\delta}{l} \qquad 5.6\text{-}20b$$

După rezolvarea sistemului 5.6-20a,b şi înlocuirea valorilor numerice, se obțin valorile eforturilor axiale:

$$N_c \equiv N_{Cu} = 74{,}49 \ \text{kN} \qquad \text{5.6-21a}$$

$$N_0 \equiv N_{OL} = 25{,}51 \ \text{kN} \qquad \text{5.6-21b}$$

Pe baza valorilor eforturilor, rezultă tensiunile normale maxime din cele două bare:

$$\sigma_{max,0} = \frac{N_0}{A_0} = 81{,}20 \ MPa < \sigma_a = 150 \ MPa$$

$$\sigma_{max,c} = \frac{N_c}{A_c} = 50{,}58 \ MPa > \sigma_{a,c} = 50 \ MPa$$

Se constată că în bara de cupru, tensiunea normală maximă este cu puțin mai mare decât tensiunea admisibilă. Diferența este totuşi nesemnificativă (0,58 MPa) şi în acest caz, putem considera că şi bara de cupru, satisface condiția de rezistență.

5.7 Calculul barelor supuse variațiilor de temperatură

La calculul barelor care prezentau inexactități de execuție, am văzut că prin montarea forțată şi în lipsa unor forțe exterioare, în elementele de rezistență apar tensiuni şi uneori destul de mari. Tensiuni în absența forțelor exterioare în elementele de rezistență pot apărea şi datorită variațiilor de temperatură la care acestea pot fi supuse în mod voit sau accidental. Tensiuni de acest fel destul de mari, spre exemplu, se produc în şinele de cale ferată vara când temperatura creşte mult sau iarna când aceasta scade semnificativ sub 0^0 C. În urma variației temperaturii şinelor în raport cu temperatura la care acestea s-au montat, în şine pot apărea tensiuni normale de întindere sau de compresiune, funcție de sensul variației temperaturii.

Exemplul nr.1. *Fie o bară încastrată la ambele capete (Fig.5.7-1). Montarea barei s-a făcut la temperatura* t_1. *Se pune problema*

determinării tensiunilor normale care apar în bară în urma modificării temperaturii la valoarea t_2 ($\Delta t = t_2 - t_1$).

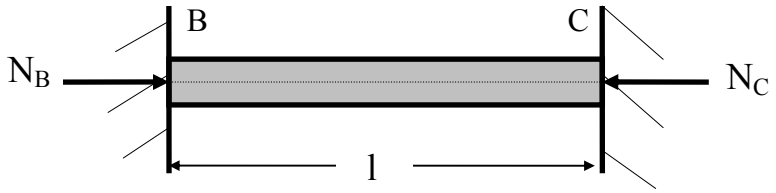


Fig.5.7-1

Considerăm lungimea barei l, aria secţiunii transversale A, modulul de elasticitate longitudinal al materialului barei E, coeficientul de dilatare termică liniară al materialului α *şi* $t_2 > t_1$.

Rezolvare

Parcurgem aceleaşi etape de rezolvare pe care le-am mai parcurs la exemplele precedente şi cu care deja ne-am familiarizat:

- Avem o singură bara care ne interesaeză.
- Deoarece $t_2 > t_1$, bara tinde să se dilate, dilatare împiedicată de reazeme. Rezultă că bara este solicitată la compresiune, ceea ce are ca efect, apariţia în reazemele B şi C a reacţiunilor N_B, respectiv N_C (Fig.5.7-1).
- Secţiunea fiind constantă, la fel şi efortul axial N, rezultă că secţiunea periculoasă poate fi oricare.
- Problema este de verificare, condiţia de rezistenţă.
- Relaţia de calcul pe care o utilizăm (din Tabelul 5.1-1), este:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \dots \qquad 5.7\text{-}1$$

Pentru calcul este nevoie de efortul axial N din bară. Pentru sistemul din Fig.5.7-1, punem condiţia de echilibru:

$$(\sum F)_x = 0$$

$$N_B - N_C = 0 \qquad \text{sau} \quad N_B = N_C \qquad 5.7\text{-}2$$

Nu se mai pot scrie alte ecuaţii de echilibru. Având două necunoscute (N_B şi N_C) şi scriind o singură ecuaţie, rezultă că sistemul este o dată static nedeterminat. Relaţia suplimentară o căutăm în modul de deformare al barei.

Sub acțiunea variației de temperatură Δt, bara tinde să se dilate cu Δl_t. Această deformație este împiedicată de reazem (de reacțiune). Fie deformația împiedicată de reazem Δl_N (Fig.5.7-2).

Din Fig.5.7-2, rezultă relația între deformații:

$$\Delta l_t = \Delta l_N \qquad 5.7\text{-}3$$

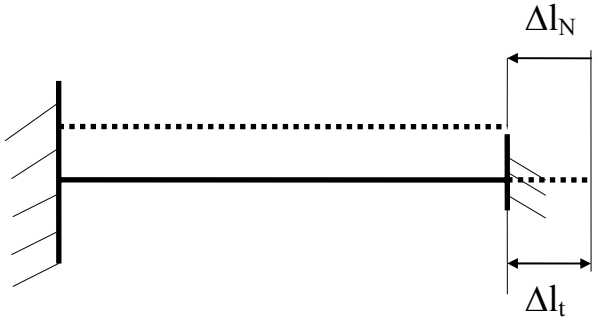


Fig.5.7-2

Explicitând relația 5.7-3, se obține:

$$\alpha \cdot l \cdot \Delta t = \frac{N_C \cdot l}{E \cdot A}$$

de unde:

$$N_C = N_B = E \cdot A \cdot \alpha \cdot \Delta t \qquad 5.7\text{-}4$$

Diagrama de efort axial N, este prezentată în Fig.5.7-3.

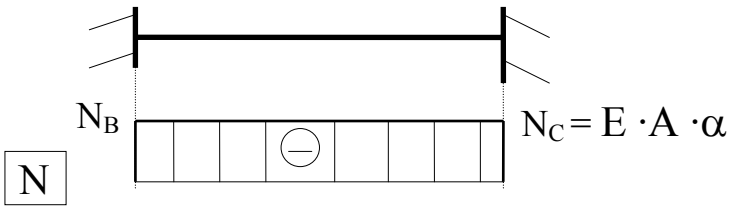


Fig.5.7-3

Tensiunea maximă, calculată pe baza relației 5.7-1, este:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} = \frac{N_C}{A} = \frac{E \cdot A \cdot \alpha \cdot \Delta t}{A} = E \cdot \alpha \cdot \Delta t \qquad 5.7\text{-}5$$

Se poate constata că tensiunea normală maximă, nu depinde de mărimea secțiunii transversale a barei.

Să considerăm că bara este din oțel pentru care $E = 2{,}1\ 10^5$ *MPa,* $\alpha = 12{,}5\ 10^{-6}\ grad^{-1}$, $\Delta t = 50^0\ C$.

Tensiunea normală maximă în bară în această situație, este:

$$\sigma_{max} = 2{,}1\ 10^5\ \ 12{,}5\ 10^{-6}\ \ 50 = 131{,}25\ \ \text{MPa}.$$

Rezultă o tensiune normală destul de mare, apropiată de cea admisibilă.

Tensiuni apar şi atunci când elementele de rezistență se răcesc (iarna când temperatura scade; $t_1 > t_2$). În acest caz, tensiunile din elementele de rezistență sunt de întindere.

Exemplul nr.2. *La ce diferență de temperatură* Δt *poate fi supusă bara din Fig.5.7-4, pentru a nu se depăşi* σ_a.

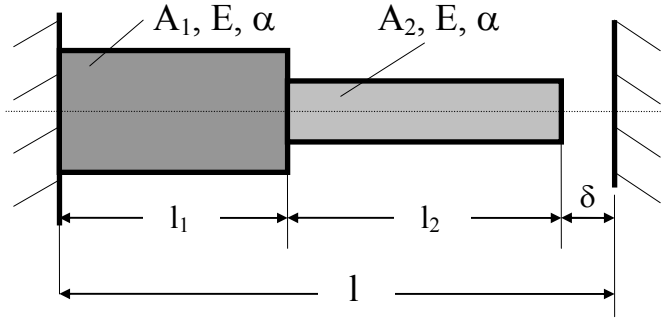


Fig.5.7-4

Rezolvare

Pentru rezolvarea problemei, parcurgem etapele cunoscute:

- Avem o singură bară cu secțiune variabilă, din acelaşi material.
- Bara se va dilata, până atinge peretele din dreapta. Temperatura creşte în continuare până când în bara comprimată, tensiunea normală atinge valoarea σ_a.
- La capetele barei (în reazeme) apar reacțiunile N_B şi N_C (Fig.5.7-5).

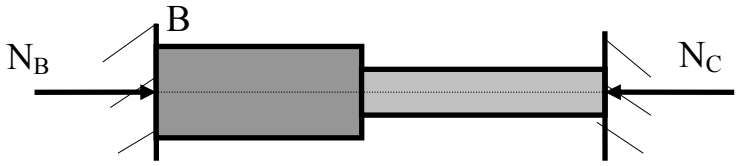


Fig.5.7-5

Secțiunea periculoasă este pe intervalul cu aria A_2 ($A_2 < A_1$) deoarece efortul axial N în lungul barei este constant.

- Problema este de efort capabil, iar condiția care se impune este cea de rezistență.
- Relația utilizată pentru calcul (vezi Tabelul 5.1-1), este:

$$N_{cap} = A\,\sigma_a = ... \qquad 5.7\text{-}6$$

Punem condiția de echilibru, pentru sistemul din Fig.5.7-5:

$$(\sum F)_x = 0$$

$$N_B = N_C = N \qquad 5.7\text{-}7$$

Alte condiții de echilibru nu se mai pot pune. Rezultă că sistemul este o dată static nedeterminat. Relația suplimentară necesară se caută, făcând acelaşi raționament ca la exemplul precedent. Schema cu deformațiile suferite de bară, este prezentată în Fig.5.7-6.

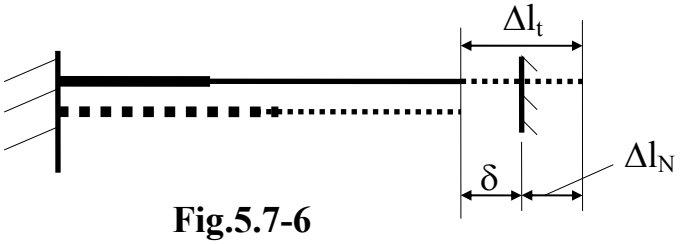


Fig.5.7-6

Din Fig.5.7-6, rezultă:

$$\Delta l_t - \Delta l_N = \delta \qquad 5.7\text{-}8$$

Explicitând relația 5.7-8, se obține:

$$\alpha \cdot l_1 \cdot \Delta t + \alpha \cdot l_2 \cdot \Delta t - \left(\frac{N \cdot l_2}{E \cdot A_2} + \frac{N \cdot l_1}{E \cdot A_1} \right) = \delta \qquad 5.7\text{-}9$$

sau mai simplu:

$$\alpha \cdot \Delta_t \cdot (l_1 + l_2) - \frac{N}{E}\left(\frac{l_2}{A_2} + \frac{l_1}{A_1} \right) = \delta \qquad 5.7\text{-}10$$

sau,

$$\alpha \cdot \Delta t \cdot l - \delta = \frac{N}{E}\left(\frac{l_2}{A_2} + \frac{l_1}{A_1}\right) \qquad 5.7\text{-}11$$

Din relația 5.7-11, rezultă valoarea efortului axial N din bară:

$$N = N_B = N_C = \frac{E(\alpha \cdot \Delta t \cdot l - \delta)}{\frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2}} \qquad 5.7\text{-}12$$

Revenind la relația de bază (rel. 5.7-6) şi punând condiția de rezistență în secțiunea periculoasă, rezultă:

$$\frac{E(\alpha \cdot \Delta t \cdot l - \delta)}{\frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2}} = A_1 \cdot \sigma_a \qquad 5.7\text{-}13$$

Din relația 5.7-13, după efectuarea calculelor, rezultă diferența de temperatură maximă admisă:

$$\Delta t = \frac{A_1 \cdot \sigma_a\left(\frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2}\right) + E \cdot \delta}{E \cdot \alpha} \qquad 5.7\text{-}14$$

5.8 Calculul barelor supuse acțiunii simultane a mai multor factori

La unele sisteme (în general static nedeterminate) este necesar câteodată să se țină seama de influența simultană a mai multor factori: forțele exterioare, variația de temperatură şi inexactitățile de execuție.

Rezolvarea acestor probleme se poate face în două moduri.

a) Primul mod constă din ***considerarea simultană*** a influenței tuturor factorilor. În acest caz, în ecuația care exprimă condiția suplimentară de deformație, trebuie introduşi termenii care exprimă influența fiecărui factor. Eforturile şi tensiunile obținute în urma acestui mod de abordare, sunt cele totale (rezultante).

b) Al doilea mod de abordare a unor asemenea sisteme, constă în ***evaluarea separată*** a eforturilor şi a tensiunilor produse de fiecare

factor de influență. Problema se rezolvă separat pentru fiecare factor şi în fiecare caz, se ține seama numai de un singur factor. Eforturile şi tensiunile totale (rezultante), se obțin prin însumarea algebrică a valorilor obținute în urma rezolvării fiecărei probleme separat. De cele mai multe ori, acest mod de abordare este mai uşor şi mai comod, dar necesită un volum mai mare de calcule. Metoda aceasta este cunoscută şi sub numele de ***metoda suprapunerii efectelor***. Această metodă a fost folosită până acum la trasarea diagramelor de eforturi pentru sistemele spațiale (vezi parag.3.4).

În cazurile prezentate până acum, am ținut seama numai de un singur factor: forțele exterioare, inexactitățile de execuție, variația temperaturii.

În continuare, se prezintă un exemplu de calcul pentru un sistem static nedeterminat supus acțiunii simultane a mai multor factori.

Exemplul nr.1. *Fie trei bare verticale paralele de lungime l = 2 m care susțin o platformă rigidă BC pe care se aplică forța F = 40 kN (Fig.5.8-1). Bara centrală este mai scurtă cu* δ *=0,2 mm decât este necesar. Bara 1 este din cupru iar barele 2 şi 3 sunt din oțel. Temperatura sistemului creşte cu* $\Delta t = 20^0$ *C.*

Se cere să se determine tensiunile din cele trei bare, după montarea forțată şi creşterea temperaturii cu Δt*. Se mai cunosc: a = 1,5 m, b = 1 m, c = 0,25 m,* $A_1 = 2\ cm^2$, $A_2 = 1\ cm^2$, $A_3 = 3\ cm^2$, $E_{Cu} = E_c = 10^5$ *MPa,* $E_{OL} = E = 2\ 10^5$ *MPa,* $\alpha_{Cu} = \alpha_c = 17\ 10^{-6}\ grad^{-1}$, $\alpha_{OL} = \alpha = 13\ 10^{-6}\ grad^{-1}$.

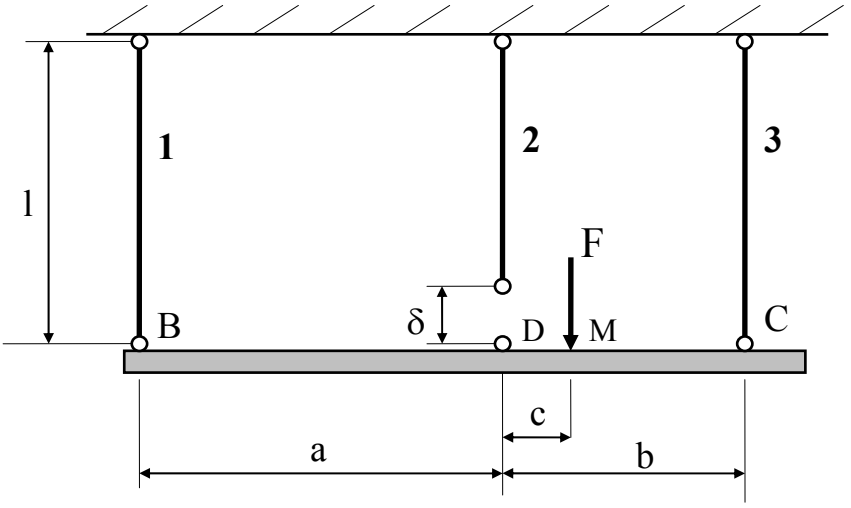


Fig.5.8-1

Rezolvare

Presupunem că s-a realizat montarea forțată şi că eforturile în urma creşterii temperaturii cu Δt, sunt toate de întindere (Fig.5.8-2).

Se utilizează metoda simultană (sau globală).

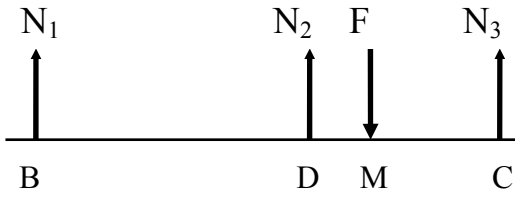


Fig.5.8-2

Condițiile de echilibru puse pentru sistemul din Fig.5.8-2, conduc la următoarele ecuații:

$$(\sum F)_y = 0$$

$$N_1 + N_2 + N_3 - F = 0 \qquad 5.8\text{-}1$$

$$(\sum M)_D = 0$$

$$N_1\, a - N_3\, b + F\, c = 0 \qquad 5.8\text{-}2$$

S-au scris două ecuații şi sunt trei necunoscute: N_1, N_2, N_3. Rezultă că sistemul este o dată static nedeterminat. Relația suplimentară necesară, se determină din modul de deformare al elementelor sistemului. Schema cuprinzând deformațiile elementelor sistemului, considerând că toate eforturile sunt de întindere, este prezentată în Fig.5.8-3.

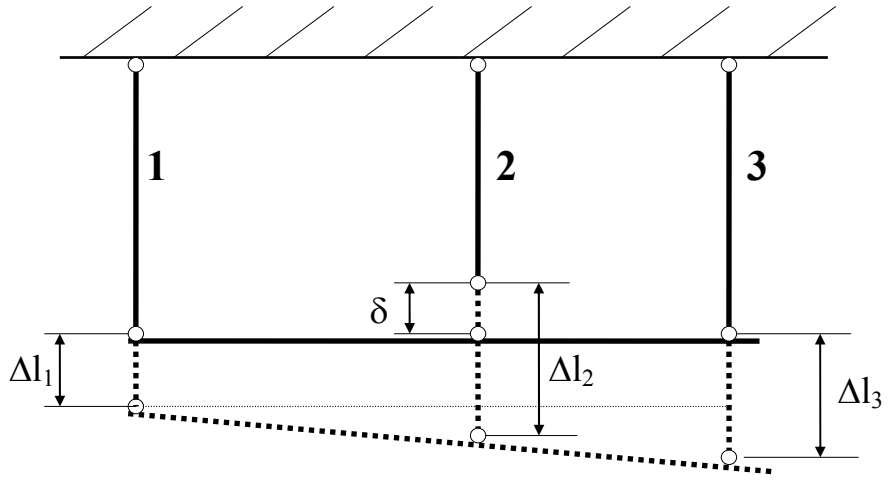


Fig.5.8-3

Din Fig.5.8-3, rezultă următoarea relație între deformațiile barelor:

$$\frac{\Delta l_3 - \Delta l_1}{\Delta l_2 - \Delta l_1 - \delta} = \frac{a+b}{a} \qquad 5.8\text{-}3$$

Deformațiile celor trei bare, ținând seama şi de influența temperaturii, sunt:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l}{E_1 \cdot A_1} + \alpha_1 \cdot l \cdot \Delta t \qquad 5.8\text{-}4a$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l}{E_2 \cdot A_2} + \alpha_2 \cdot l \cdot \Delta t \qquad 5.8\text{-}4b$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l}{E_3 \cdot A_3} + \alpha_3 \cdot l \cdot \Delta t \qquad 5.8\text{-}4c$$

Înlocuind relațiile 5.8-4a ... 5.8-4c în relația 5.8-3, se obține:

$$\frac{\frac{N_3 \cdot l}{E_3 \cdot A_3} + \alpha_3 \cdot l \cdot \Delta t - \frac{N_1 \cdot l}{E_1 \cdot A_1} - \alpha_1 \cdot l \cdot \Delta t}{\frac{N_2 \cdot l}{E_2 \cdot A_2} + \alpha_2 \cdot l \cdot \Delta t - \frac{N_1 \cdot l}{E_1 \cdot A_1} - \alpha_1 \cdot l \cdot \Delta t - \delta} = \frac{a+b}{a} \qquad 5.8\text{-}5$$

Relația 5.8-5 se ataşează ecuațiilor de echilibru (rel. 5.8-1 şi 5.8-2). După rezolvarea sistemului de ecuații astfel format (rel 5.8-1, 5.8-2 şi 5.8-5), se obțin valorile celor trei eforturi:

$N_1 = 7{,}92$ kN 5.8-6a
$N_2 = 10{,}2$ kN 5.8-6b
$N_3 = 21{,}88$ kN 5.8-6c

Dacă un efort axial are semnul – (minus), înseamnă că bara respectivă nu este solicitată cum am considerat noi (noi am considerat că toate sunt întinse), ci contrar considerației făcute.

Cu valorile eforturilor, se pot determina acum tensiunile din cele trei bare:

Pentru bara 1:

$$\sigma_{max,1} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{7{,}92 \cdot 10^3}{200} = 39{,}6 \ \ MPa < \sigma_{a,c}$$

Pentru bara 2:

$$\sigma_{max,2} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{10{,}2 \cdot 10^3}{100} = 10{,}2 \ \ MPa < \sigma_a$$

Pentru bara 3:

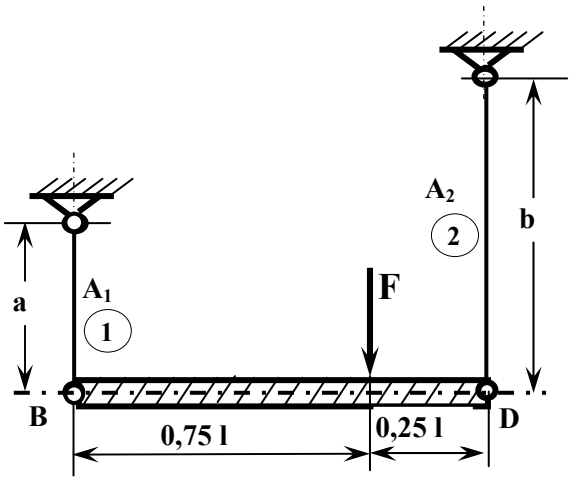
$$\sigma_{max,3} = \frac{N_3}{A_3} = \frac{21{,}80 \cdot 10^3}{300} = 72{,}9 \ \ MPa < \sigma_a$$

Toate barele satisfac condiția de rezistență cerută.

5E. Solicitarea axială (Probleme propuse)

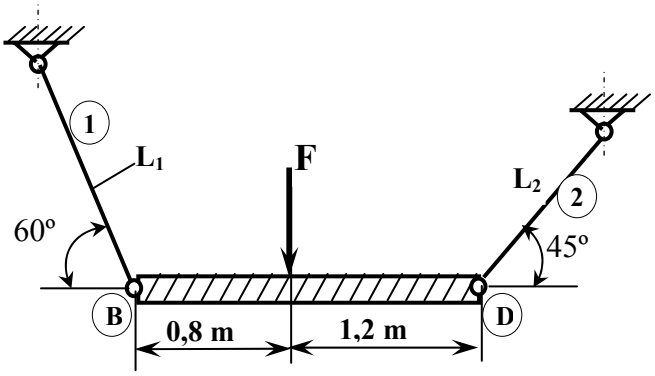
5E.1

Grinda rigidă, BD, din figură este susținută în poziție orizontală prin doi tiranți din oțel cu lungimile a şi respectiv b. Acceptând că aria secțiunii tirantului mai scurt este cunoscută, A_1, se cere să se determine aria secțiunii tirantului 2, astfel încât după aplicarea forței F, grinda BD să rămână în poziție orizontală. Aplicație numerică: A_1= 300 mm^2, a= 1 m, b=2 m.



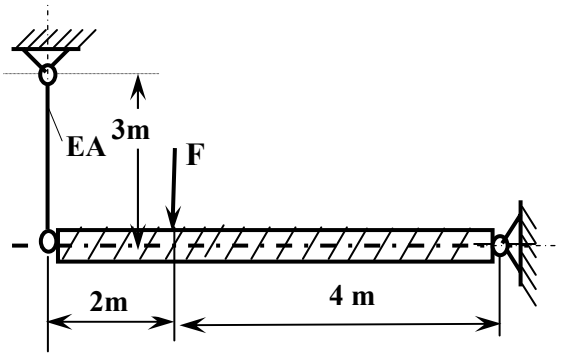
5E.2

Grinda rigidă, BD, din figură este susținută de doi tiranți din oțel cu secțiuni circulare cu lungimile L_1=1,5 m şi respectiv L_2=1 m. Cunoscând diametrele secțiunilor tiranților: d_1=40 mm şi d_2=30 mm, modulul de elasticitate E= 2×10^5 MPa, se cer: eforturile din tiranți după aplicarea forței F=20 kN şi deplasarea pe verticală a capătului D al grinzii BD.



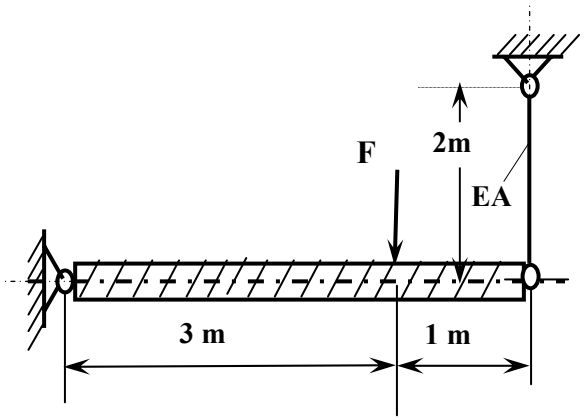
5E.3

Pentru sistemul de bare din figură se cer: a) să se determine efortul din tirant dacă F=40 kN; b) să se dimensioneze tirantul, dacă σ_a=160 MPa şi se utilizează o secțiune circulară, (d=?); c) să se calculeze deplasarea pe verticală a punctului de aplicație a forței, dacă E=$2{,}1\times10^5$ MPa.



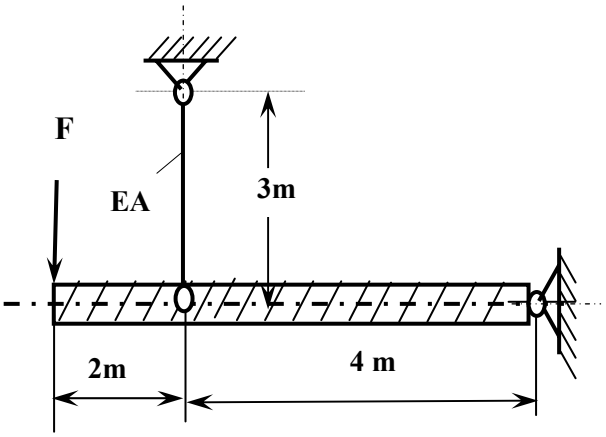
5E.4

Pentru sistemul de bare din figură se cer: a) efortul din tirant,(N=?); forța capabilă, F_{cap}, dacă σ_a=160 MPa şi tirantul are secțiune circulară cu diametrul d= 30 mm; c) să se calculeze deplasarea pe verticală a punctului de aplicație a forței, dacă E=2×10^5 MPa.



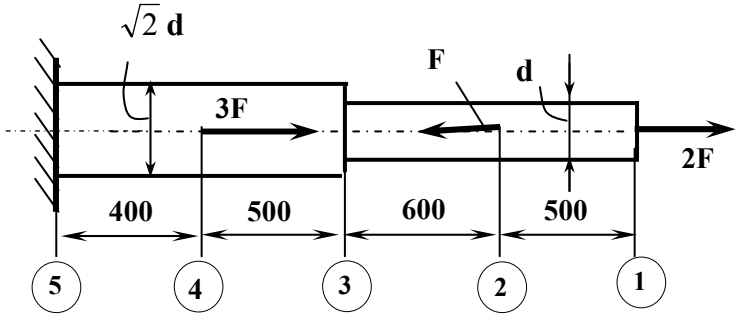
5E.5

Pentru sistemul de bare din figură se cer: a) efortul din tirant dacă F=60 kN; b) să se verifice tirantul, dacă σ_a=140 MPa şi se utilizează o secțiune circulară cu d=32 mm; c) să se calculeze deplasarea pe verticală a punctului de aplicație a forței, dacă E=$2{,}1\times10^5$ MPa.



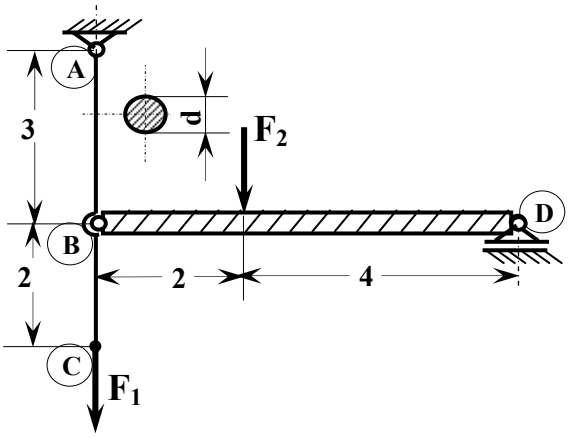
5E.6

Pentru bara de secțiune circulară din figură se cer: a) forțele axiale, N, pe fiecare tronson de bară, pentru F=20 kN; b) să se dimensioneze bara dacă σ_a=150 MPa; c) să se calculeze lungirea totală a barei,(Δl_{15}), dacă E=$2{,}1\times10^5$ MPa.



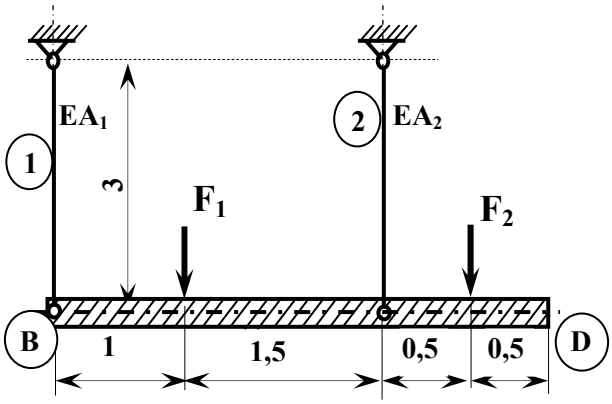
5E.7

Sistemul din figură este solicitat de forţele F_1=16 kN şi F_2=12 kN. Grinda orizontală BD este de mare rigiditate. Să se determine tensiunile din tirantul ABC şi deplasarea capătului (C) al acestuia, cunoscându-se diametrul d=30 mm, constant pe toată lungimea tirantului şi modulul de elasticitate $E=2\times10^5$ MPa. Cotele de pe desen sunt în metri.



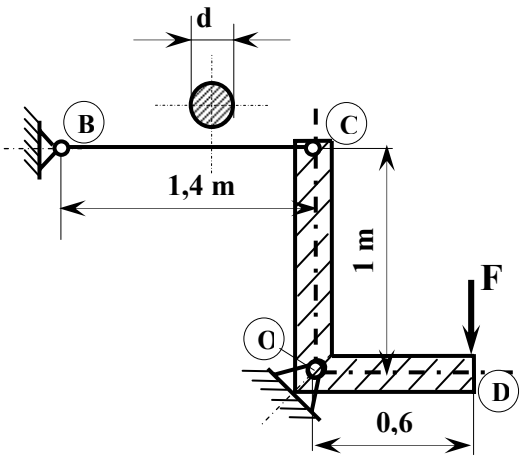
5E.8

Grinda de mare rigiditate BD este susţinută de doi tiranţi lungi de 3 m. Tirantul (1) este din oţel cu $E_1= 2\times10^5$ MPa, iar tirantul (2) din Al cu $E_2= 7\times10^4$ MPa. Ariile secţiunilor sunt identice: $A_1=A_2=650mm^2$. Pe grindă se aplică două forţe verticale F_1=30 kN şi F_2=10 kN. Să se determine: a) eforturile din tiranţi (N_1 şi N_2); b) tensiunile din tiranţi (σ_1 şi σ_2); c) deplasarea verticală a punctului de aplicatie al forţei F_2, (Δ_{F2}). Cotele de pe desen sunt în metri.



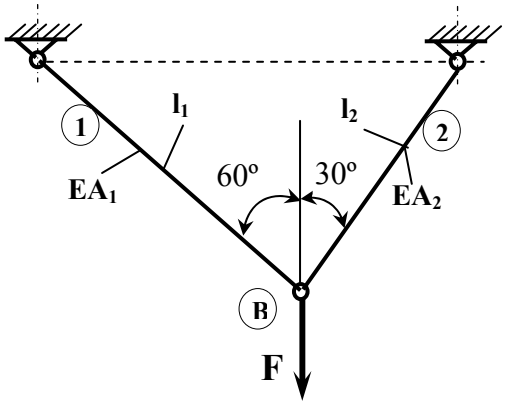
5E.9

Cornierul COD de mare rigiditate din figură este ancorat cu un tirant, BC, de secţiune circulară cu diametrul d=24 mm. În punctul D se aplică o forţă verticală F=30 kN. Cunoscând σ_a=150 MPa şi $E=2,1\times10^5$ MPa se cere verificarea tirantului şi calculul deplasării pe verticală a punctului de aplicaţie al forţei, (Δ_D). Cotele de pe desen sunt în metri.



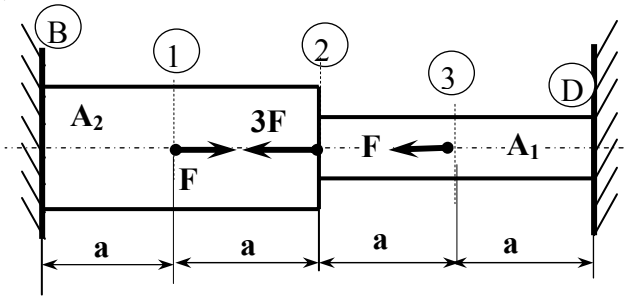
5E.10

Sistemul din figură, compus din tiranții (1) şi (2) este solicitat de forța F=20 kN aplicată în articulația comună (B). Cunoscând dimensiunile tiranților, (A_1=200 mm^2 , A_2=100 mm^2, l_1=5 m, l_2=8,66 m), şi caracteristicile de material, (σ_a=140 MPa, E=2,1×10^5 MPa), se cere verificarea tiranților şi deplasarea articulației (B).



5E.11

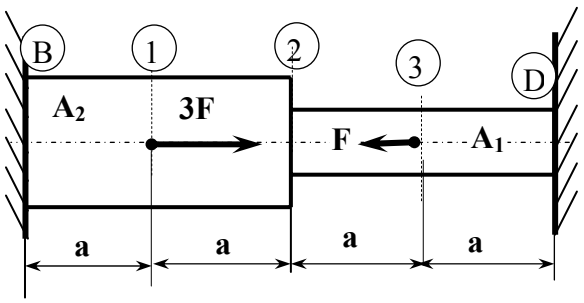
Bara de secțiune A_1pe o lungime 2×a=400 mm şi A_2=2×A_1 pe alți 2a=400 mm, este încărcată cu forțele indicate în figură, (F=100 kN). Bara este încastrată în ambele capete,(B şi D). Materialul barei este oțel cu E=2×10^5 MPa şi σ_a=160 MPa. Se cer: a) reacțiunile din încastrări, (H_B şi H_D); b) dimensionarea secțiunii barei; c) Deplasarea secțiunii (2), (Δ_2).



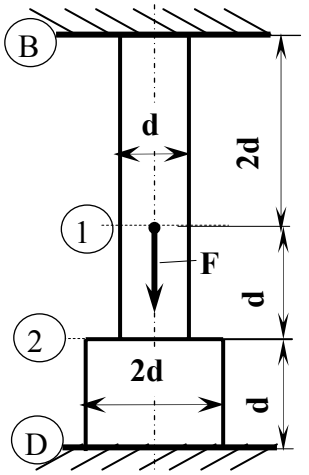
5E.12

Bara de secțiune A_1=250 mm^2 pe o lungime 2a=400 mm şi A_2=2×A_1 pe alți 2a=400 mm, este încărcată cu forțele F şi 3F indicate în figură. Bara este încastrată în ambele capete,(B şi D). Materialul barei este oțel cu E=2×10^5 MPa şi σ_a=150 MPa.

Se cer: a) reacțiunile din încastrări, (H_B şi H_D); b) forța capabilă, F_{cap}; c) Deplasarea secțiunii (2), (Δ_2).

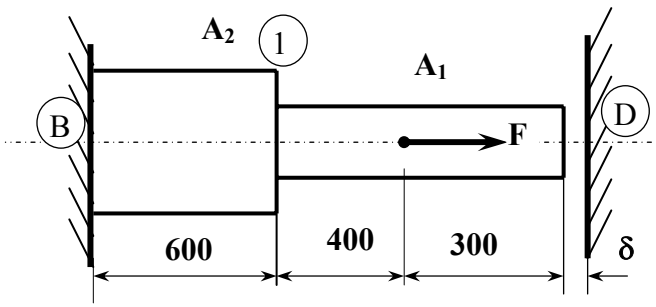


5E.13



Se dă bara cilindrică din figură, încastrată la ambele capete, (B şi D), compusă din două tronsoane având diametrele d şi 2d. Bara este încărcată cu forța F=520 kN aplicată în dreptul secțiunii (1). Să se determine reacțiunile din încastrări, (Y_B şi Y_D), şi valoarea diametrului d, dacă rezistențele admisibile sunt: la întindere $\sigma_{a,t}$=20 MPa şi la compresiune $\sigma_{a,c}$=40 MPa, iar modulul de elasticitate este E=2,1×10^5 MPa.

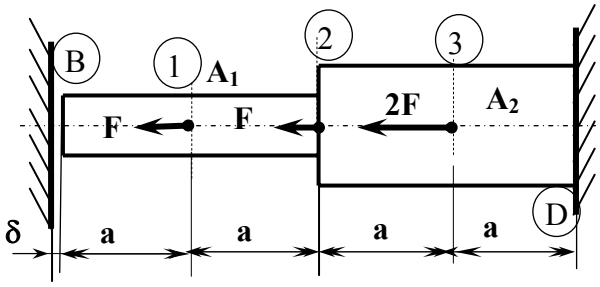
5E.14



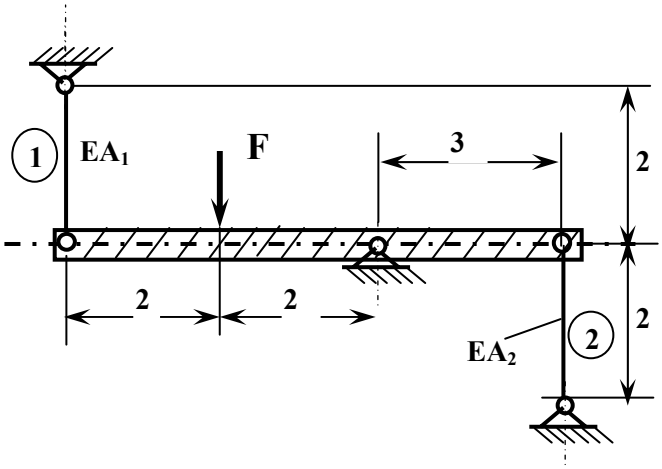
Bara de secțiune A_1=600 mm^2 pe o lungime de 700 mm şi A_2= 1000 mm^2 pe tronsonul de lungime 600 mm, este încărcată cu forța F=80 kN. Bara este încastrată în stânga, în (B), iar în dreapta are un joc δ=0,2 mm până la un perete fix (D). Materialul barei este oțel cu E=2×10^5 MPa şi σ_a=160 MPa. Se cer: a) reacțiunile din încastrare, (H_B), şi din perete, (H_D); b) verificarea barei; c) Deplasarea secțiunii (1), (Δ_1).

5E.15

Se consideră bara dreaptă din figură. După execuție se constată că lungimea totală este mai mică decât cea nominală cu δ=0,18 mm. Se cunosc: ariile A_2=1,5×A_1= 1200 mm^2, cota a=0,6 m, forța F=20 kN şi modulul de elasticitate E=2×10^5 MPa. Se cer: a) reacțiunile din încastrări, (H_B şi H_D), după aplicarea sistemului de forțe indicat pe figură; b) tensiunea maximă care apare în secțiunea barei, σ_{max}; c) Deplasarea secțiunii (2), (Δ_2).

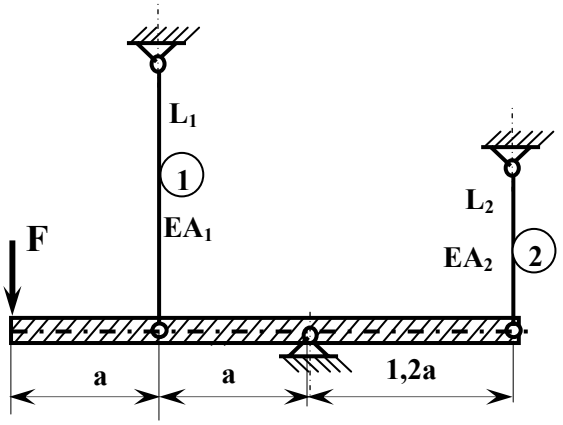


5E.16



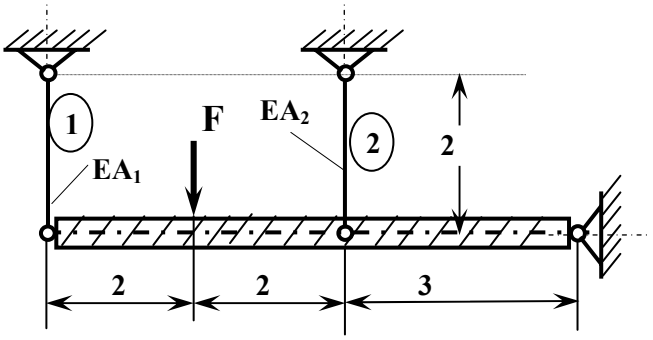
Pentru sistemul de bare articulate din figură se cer:
-eforturile din cei doi tiranți, (N_1 şi N_2);
-să se dimensioneze tiranții cunoscând: F= 120 kN; σ_a=160 MPa; $EA_1=2\times EA_2$,($A_{1,nec}$=?, $A_{2,nec}$=?);
-să se calculeze deplasarea pe verticală a punctului de aplicație al forței, dacă $E=2\times10^5$ MPa, (Δ_F=?).
Cotele de pe desen sunt în metri.

5E.17



Să se determine eforturile, (N_1 şi N_2), şi tensiunile,(σ_1 şi σ_2), din barele sistemului articulat din figura alăturată şi să se calculeze deplasarea punctului de aplicație al forței,(Δ_F). Se dau: $E=2{,}1\times10^5$ MPa, A_1=1200 mm^2, L_1=2 m, A_2=600 mm^2, L_2=1 m, a=1m, F=50 kN.

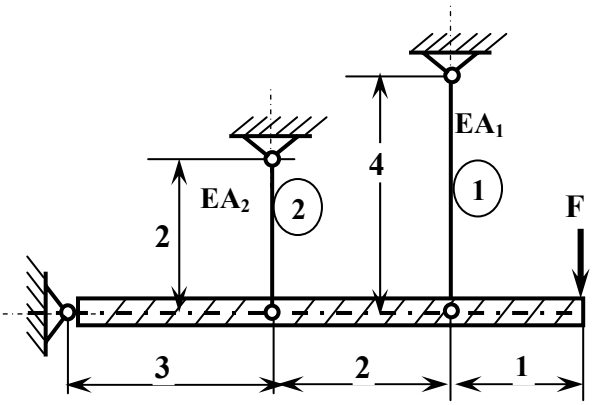
5E.18



Pentru sistemul de bare articulate din figură se cer: a) eforturile din cei doi tiranți; b) să se determine forța capabilă cunoscând: σ_a=160 MPa; $A_1=2\times A_2=1200\text{mm}^2$; c) să se calculeze deplasarea pe verticală a punctului de aplicație al forței, ($E=2\times10^5$ MPa).
Cotele de pe desen sunt în metri.

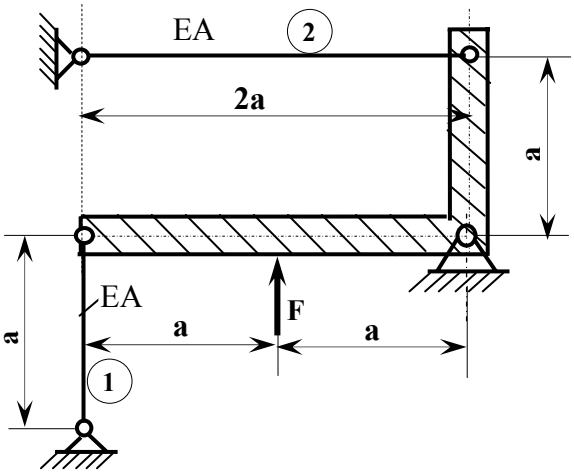
5E.19

Pentru sistemul de bare articulate din figură se cer: a) eforturile din cei doi tiranți; b) să se dimensioneze tiranții dacă: F= 120 kN; σ_a=160 MPa; $EA_1=2EA_2$;
c) să se calculeze deplasarea pe verticală a punctului de aplicație al forței, ($E=2\times10^5$ MPa). Cotele de pe desen sunt în metri. Bara orizontală este considerată nedeformabilă.



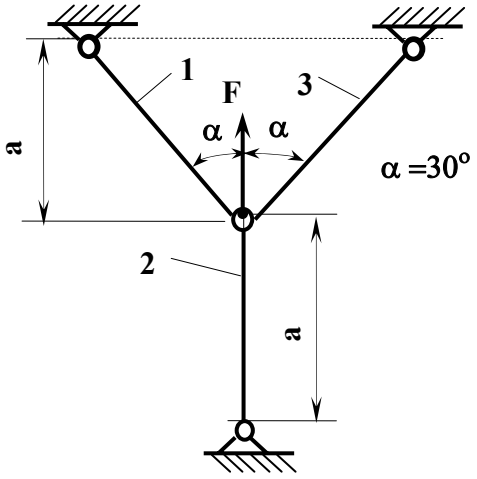
5E.20

Pentru sistemul de bare din figură, având bara cotită BCD de mare rigiditate, se cere: a) eforturile din tiranți,(N_1 şi N_2); b) tensiunile din tiranți,(σ_1 şi σ_2); c) valoarea maximă a forței ce poate fi preluată de sistem dacă σ_a=160 MPa, (F_{max}=?).



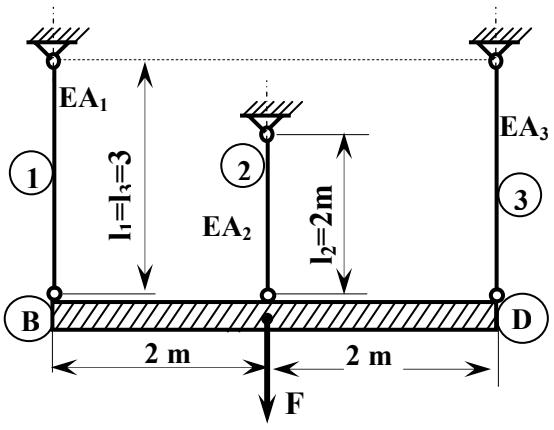
5E.21

Se dă sistemul format din trei bare articulate,(1,2 şi 3), solicitat de o forță aplicată în articulația comună. Să se determine eforturile, (N_1, N_2, N_3), din barele sistemului articulat şi să se dimensioneze barele din oțel cu secțiune circulară constantă. Se dau: F=100 kN; a=0,5 m; $E=2,1\times10^5$ MPa; σ_a=160 MPa.



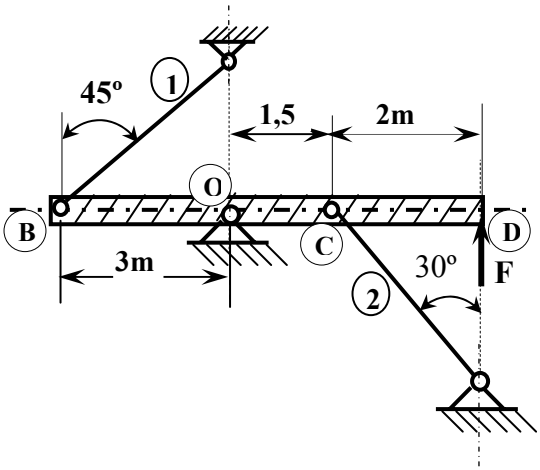
5E.22

Trei tiranți susțin o grindă de rigiditate infinită BD. Rigiditatea tiranților (1) şi (3) este aceeaşi, $E_1A_1= E_3A_3= 2\times10^5\times300$ N, iar cea a tirantului (2) este $E_2A_2= 10^5\times500$ N. Forța aplicată sistemului este F=50 kN.Să se determine: a) eforturile N_1,N_2 şi N_3; b) tensiunile din tiranți,(σ_1, σ_2 şi σ_3); c) deplsarea pe verticală a grizii BD, (Δ_v=?).



5E.23

Bara de mare rigiditate BOCD este încărcată cu forța F=80 kN şi susținută de articulația fixă O şi de tiranții (1) şi (2).Cunoscând: $3A_1= A_2=A$, $E=2\times10^5$ MPa şi σ_a=145 MPa, se cer: a) eforturile din tiranți, (N_1, N_2); b) dimensionarea tiranților, A_{nec}=?; c) deplasarea pe verticală a punctului de aplicație al forței,(Δ_F=?).

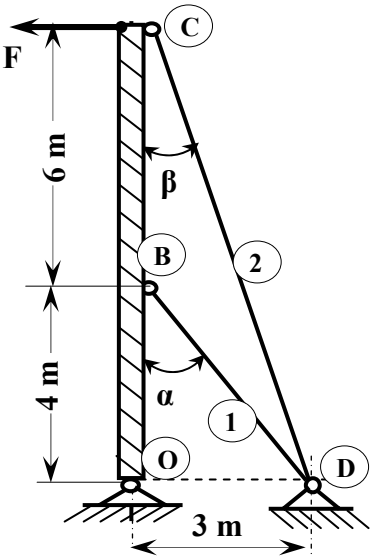


5E.24

Stâlpul OBC, considerat de rigiditate infinită, este ancorat cu două cabluri din oțel cu secțiunile: A_1,(DB), şi A_2,(DC). În articulația C, pe orizontală se aplică forța F=80 kN. Se cer: a) eforturile din cabluri, dacă $A_1=1{,}5A_2$ şi $E=2{,}1\times10^5$ MPa;

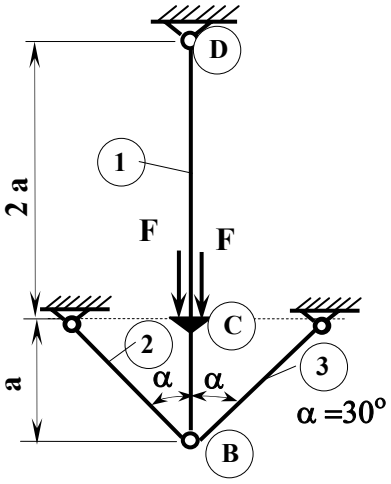
b) secțiunile A_1 şi A_2 dacă σ_a=160 MPa;

c) deplasarea pe orizontală a punctului de aplicație al forței, Δ_F.



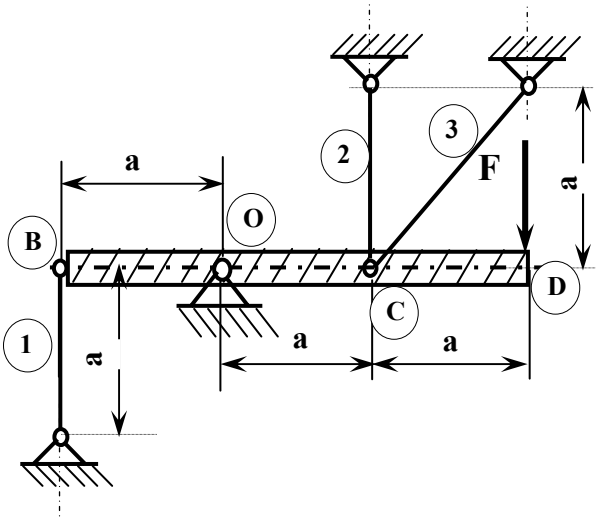
5E.25

Barele sistemului articulate din figură au aceeaşi rigiditate(EA=const.) şi sunt solicitate de forța 2F=20 kN. Cunoscând: a=1 m; A=200 mm^2 şi E=2,1×10^5 MPa, se cer eforturile din bare, (N_1^{DC},N_1^{CB},N_2,N_3), şi deplasarea articulației (B), Δ_B.



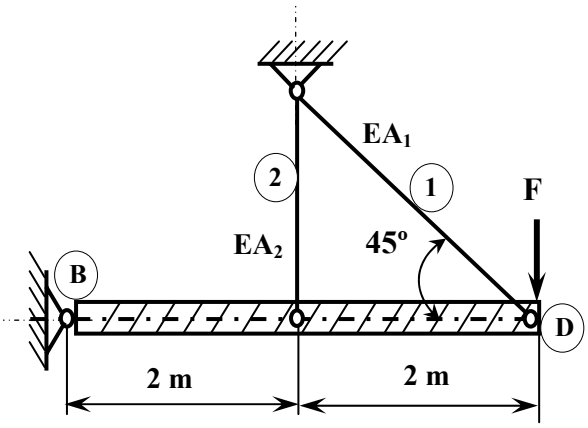
5E.26

Pentru sistemul de bare articulate din figură, având bara BOCD rigidă, se cer: a) eforturile N_1,N_2,N_3; b) forța maximă,F_{max}, care poate încărca sistemul cunoscând: σ_a=160 MPa; A_1=A_2= A_3=400 mm^2; c) deplasarea punctului de aplicație al forței,Δ_F, dacă: a=1m; E=2,1×10^5 MPa; d) eforturile N_1^{θ},N_2^{θ},N_3^{θ} dacă temperature barei (3) creşte cu θ=100ºC; (coeficientul dilatației termice liniare este: α=1,2×10^{-5} 1/ºC).

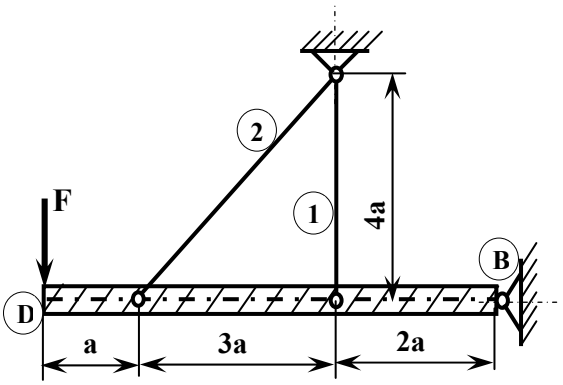


5E.27

Pentru sistemul de bare articulate din figură se cer:
- eforturile din tiranți, N_1 şi N_2;
- forța capabilă, F_{cap} dacă σ_a=150 MPa;A_1=400 şi A_2=600 mm^2;
- deplasarea pe verticală,Δ_D, a punctului de aplicație al forței, (E=2·10^5 MPa). Bara orizontală BD este considerată nedeformabilă.

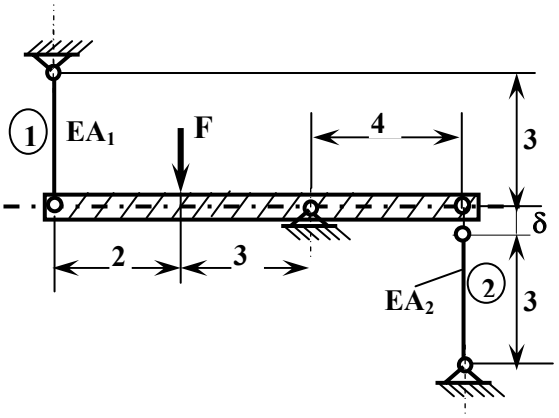


5E.28



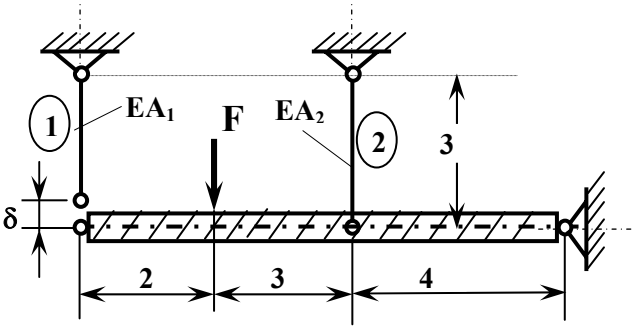
Sistemul din figură, având bara BD de rigiditate infinită, este solicitat de o forță F=120 kN. Barele (1) şi (2), articulate la capete, sunt din oțel cu: σ_a=150 MPa şi E=2,1×10^5 MPa. Se cer:
a) eforturile, N_1 şi N_2, pentru A_2=1,5×A_1; b) dimensionarea barelor (1) şi (2) utilizând secțiuni circulare; c) deplasarea pe verticală,Δ_D, a punctului de aplicație al forței, pentru a=1,2 m.

5E.29



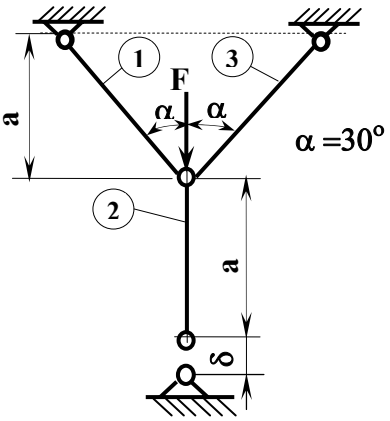
La realizarea sistemului de bare articulate din figură se constată că bara (2) este mai scurtă cu δ=0,2 mm. Montarea se face forțat. Se cer: eforturile din cei doi tiranți înainte şi după aplicarea forței, (E=2×10^5 [MPa]), F= 120 [kN]; A_1=A_2=1200 mm^2; să se calculeze deplasarea pe verticală a punctului de aplicație al forței. Cotele de pe desen sunt în metri. Bara orizontală este perfect rigidă, deci nedeformabilă.

5E.30



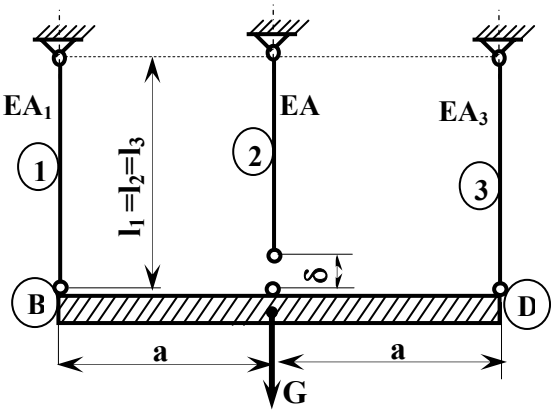
La realizarea sistemului de bare articulate din figură se constată că bara (1) este mai scurtă cu 0,2 mm. Montarea se face forțat. Se cer: eforturile din cei doi tiranți înainte şi după aplicarea forței, (E=2×10^5 MPa), F= 80 kN; A_1=A_2=1000 mm^2; să se calculeze deplasarea pe verticală a punctului de aplicație al forței. Cotele de pe desen sunt în metri. Bara orizontală este considerată nedeformabilă.

5E.31



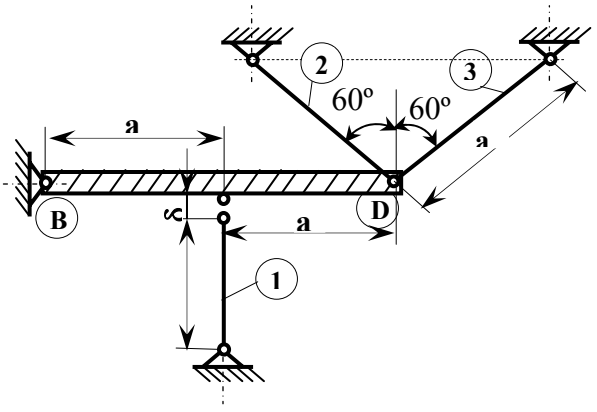
Barele sistemului articulat sunt din oțel cu $E=2\times10^5$ MPa şi $\sigma_a=150$ MPa. Barele (1) şi (3) au aceeaşi secțiune transversală: $A_1=A_3=300$ mm^2, mai mare decât bara (2) care are $A_2=200$ mm^2. Bara (2) este mai scurtă cu $\delta=1$ mm. Să se determine: eforturile, (N_1^0 ,N_2^0, N_3^0), din bare dacă F=0; eforturile, (N_1,N_2, N_3), din bare după aplicarea forței F; forța maximă care poate fi aplicată.

5E.32



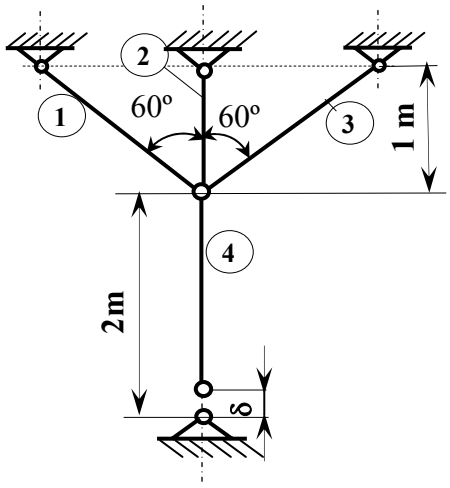
O grindă de rigiditate infinită BD, având greutatea G=30 kN, este suspendată cu trei tiranți din oțel cu secțiuni transversale egale: $A_1=A_2=A_3$. La montaj se constată că tiranții (1) şi (3) au lungimea nominală $l_1=l_3=2{,}5$ m, în timp ce tirantul din mijloc, (2), este mai scurt cu $\delta=1{,}25$ mm. Sistemul este asamblat forțat. Să se determine tensiunile din tiranți dacă: $A_1=400$ mm^2, $E=2\times10^5$ MPa.

5E.33



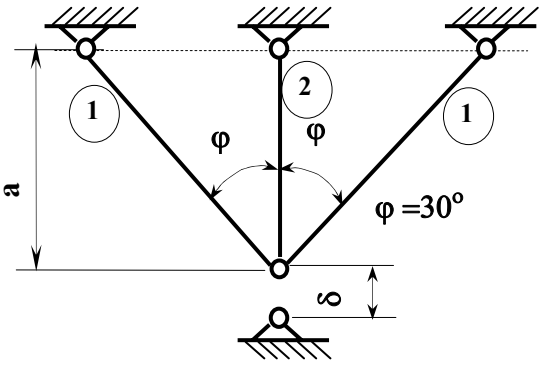
Pentru sistemul de bare din oțel să se determine: eforturile axiale,(N_1, N_2, N_3), şi tensiunile,(σ_1,σ_2,σ_3), care apar în secțiunile barelor (1),(2) şi (3), ca urmare a asamblării forțate. Bara BD este de rigiditate infinită. Să se calculeze apoi deplasarea pe verticală a articulației D,(Δ_D=?). Se dau: a=2 m; $A_1=2000$ mm^2; $A_2=A_3=1000$ mm^2; $E_1=E_2=E_3=2{,}1\times10^5$ MPa; $\delta=1$ mm.

5E.34



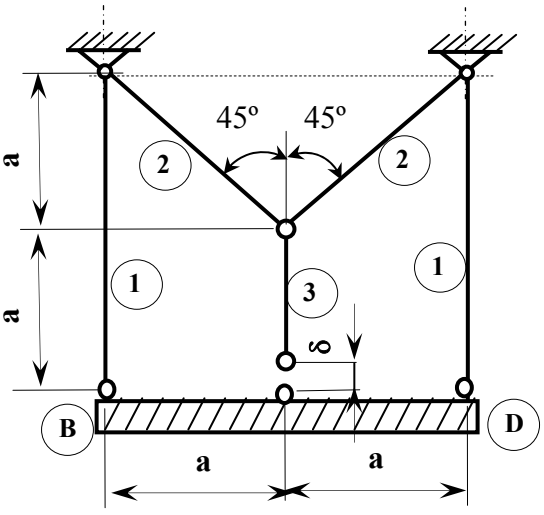
La montarea sistemului de bare articulate din figură se constată o inexactitate de execuție δ=2 mm. Sistemul se asamblează forțat. Dacă toate barele au aceeaşi secțiune A şi sunt confecționate din oțel, ($E=2{,}1\times10^5$ MPa), se cere să se determine tensiunile care apar în secțiunile celor 4 bare.

5E.35



Pentru sistemul de bare articulate din figură, se cer: a) forța necesară asamblării forțate,F_{nec}, pentru: δ=2 mm, A_1=1000,A_2=2000 mm^2, a=1500 mm, $E_1=2{,}1\times10^5$ MPa, $E=1{,}05\times10^5$ MPa; b) tensiunile din bare dacă după montare barele sunt încălzite cu $\Delta\theta$=20ºC. Coeficientii dilatației termice liniare sunt: $\alpha_1=1{,}2\times10^{-5}$ 1/ºC şi $\alpha_2=1{,}8\times10^{-5}$ 1/ºC.

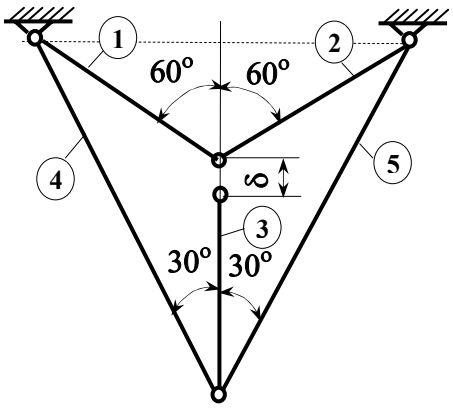
5E.36



La montarea sistemului de bare articulate din figură se constată o inexactitate de execuție δ=0,4 mm. Sistemul se asamblează forțat. Bara BD este de rigiditate infinită. Tiranții (1),(2) şi (3), sunt din oțel cu $E=2\times10^5$ MPa, şi au ariile secțiunilor: A_1=A, A_2=1,5A şi A_3=2A. Dacă a=1 m se cere să se determine tensiunile care apar în secțiunile tiranților în urma montajului forțat, (σ_1=?,σ_2=?,σ_3=?).

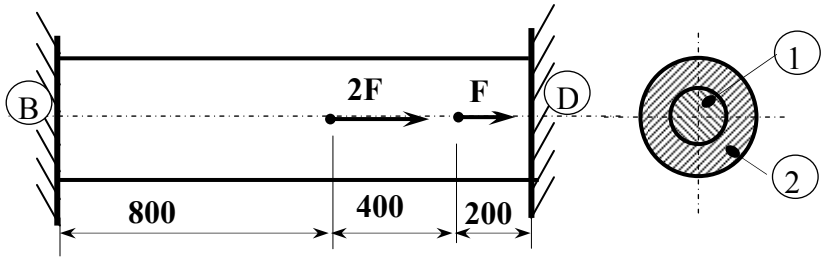
5E.37

Se asamblează sistemul de bare din figură şi se constată că bara (3) este mai scurtă cu δ=0,8 mm. Toate barele au aceeaşi rigiditate EA. Lungimea nominală a barelor este: $l_1=l_2=l_3=1,25$ m şi $l_4=l_5=2,165$ m. Sistemul se asamblează forţat. Să se determine tensiunile care apar în secţiunile tiranţilor în urma montajului forţat. Se dau: $E=2\times10^5$ MPa, $A=800$ mm^2.



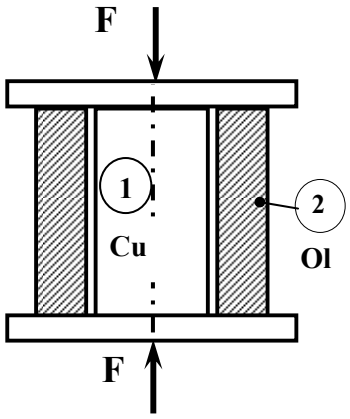
5E.38

Bara din figura de mai jos are secţiunea neomogenă cu miezul din oţel, (cu $A_1=1500$ mm^2;$E_1=2,1\times10^5$ MPa şi $\sigma_{a1}=150$ MPa), şi exteriorul din alamă, (cu $A_2=2000$ mm^2;$E_2=10^5$ MPa şi $\sigma_{a2}=100$ MPa). Să se determine: a) reacţiunile din încastrări,(H_B,H_D); b) eforturile maxime din oţel şi respective din alamă,(N_{max}^{Ol}, N_{max}^{Al}); c) forţa maximă pe care o poate suporta bara,(F_{cap}); d) deplasarea punctului de aplicaţie al forţei 2F.



5E.39

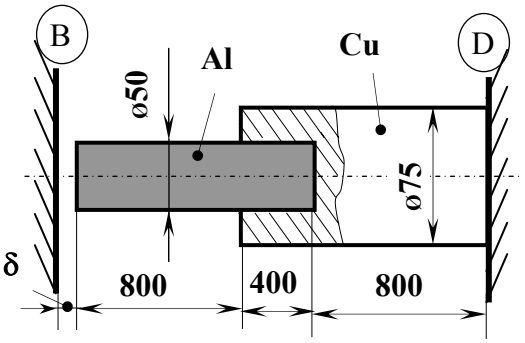
Doi cilindrii concentrici,((1) din cupru şi (2) din oţel), de aceeaşi lungime l, sunt comprimaţi, prin intermediul a două plăci rigide, cu forţele F=220 kN. Se cunosc: $A_1=1000$ mm^2;$E_1=1,15\times10^5$ MPa; $\alpha_1=1,7\times10^{-5}$ 1/ºC; $A_2=2000$ mm^2;$E_2=2,1\times10^5$ MPa; $\alpha_2=1,2\times10^{-5}$ 1/ºC. Se cer: a) tensiunile din cei doi cilindrii dacă există doar forţele F; b) tensiunile din cilindrii dacă existând forţele F ansamblul se



încălzeşte cu $\Delta\theta$=200°C,(σ_1^{θ}=?, σ_2^{θ}=?); c) care este creşterea de temperatură pentru care bara din oţel nu mai este solicitată, ($\Delta\theta$ =?).

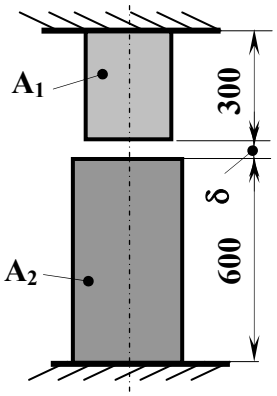
5E.40

Bara din figură este confecţionată din cupru,(Cu), şi aluminiu,(Al). Ansamblul este aşezat între doi pereţi fixi:(B) şi (D). În partea din stânga există un joc: δ=1,2 mm. Se cunosc: $E_{Cu}=2\times E_{Al}=1{,}4\times10^5$ MPa; $\alpha_{Cu}=1{,}6\times10^{-5}$ 1/ºC; $\alpha_{Al}=2{,}4\times10^{-5}$ 1/ºC. Se cere să se determine tensiunile din cele două materiale,(σ_{Cu}^{θ}=?, σ_{Al}^{θ}=?), dacă temperatura întregului ansamblu creşte cu $\Delta\theta$=90°C.



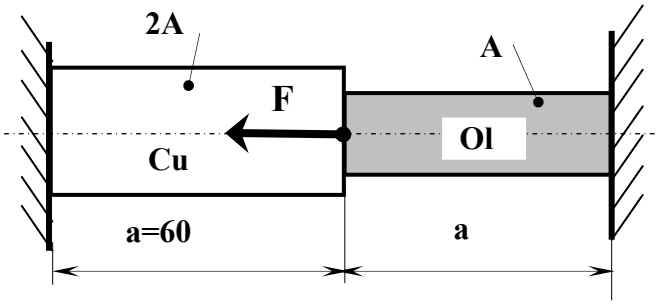
5E.41

După montarea celor două bare din oţel se constată că între ele rămâne un interstiţiu δ=1 mm. Dacă barele sunt încălzite cu $\Delta\theta$=120°C se cere să se determine tensiunile din cele două secţiuni,(σ_{A1}^{θ}=?, σ_{A2}^{θ}=?). Se cunosc: A_1=800 mm^2; A_2=1300 mm^2; $E_{Ol}=2{,}1\times10^5$ MPa; $\alpha_{Ol}=1{,}2\times10^{-5}$ 1/ºC.



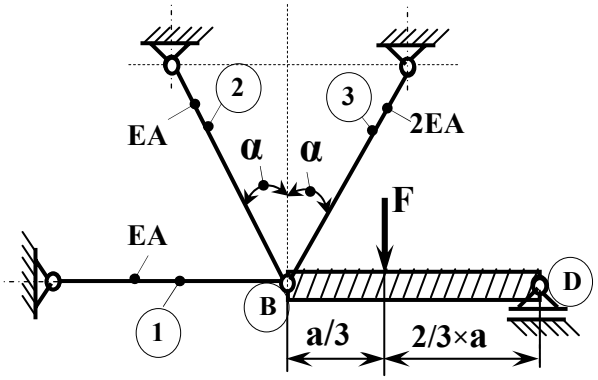
5E.42

Să se determine creşterea de temperatură necesară, $\Delta\theta$=?, pentru ca, în ansablul din figură, bara din oţel să nu mai fie solicitată. Se cunosc: F=60 kN; A=500 mm^2; $E_{Ol}=2{,}1\times10^5$ MPa; $\alpha_{Ol}=1{,}2\times10^{-5}$ 1/ºC; $E_{Cu}=1{,}15\times10^5$ MPa; $\alpha_{Cu}=1{,}7\times10^{-5}$ 1/ºC.



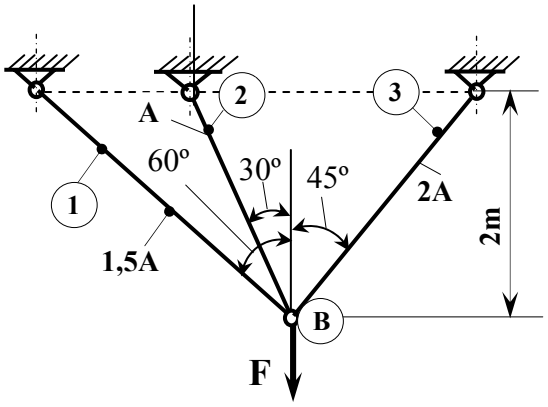
5E.43

O grindă de rigiditate infinită BD, este menţinută în poziţie orizontală de reazemul mobil (D) şi de trei tiranţi, din acelaşi material, cu aceeaşi lungime a=2 m şi cu rigidităţile indicate: EA şi 2EA. Să se determine: eforturile din tiranţi exprimate în funcţie de F şi tensiunile din tiranţi, dacă se cunosc: F=84 kN, A=400 mm^2, E=2×10^5 MPa şi α=30º.



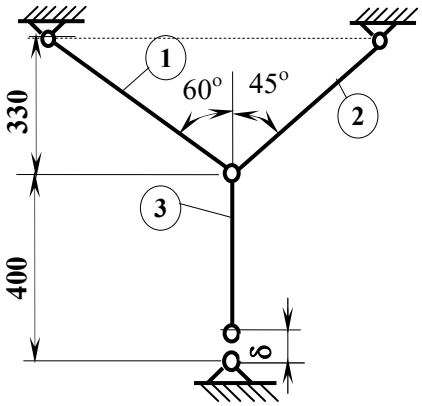
5E.44

Sistemul de trei bare plane articulate, din figură, susţine forţa F=400 kN. Tiranţii (1),(2) şi (3) sunt din oţel cu: σ_a=150 MPa, E=2,1×10^5 MPa şi α=1,1×10^{-5} 1/ºC. Secţiunile transversale sunt: A_1=1,5A; A_2=A şi A_3=2A. Se cer: a) eforturile din tiranţi la încărcarea cu F; b) dimensionarea tiranţilor,A_{nec}=?; c) deplasarea totală a articulaţiei (B); d) tensiunile din tiranţi dacă temperatura ansamblului creşte cu $\Delta\theta$=60°C,(σ_1^{θ}=?, σ_2^{θ}=?, σ_3^{θ}=?).

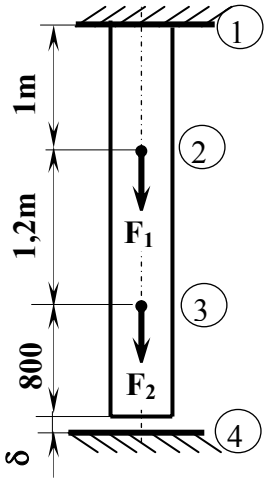


5E.45

Sistemul de bare din figură se asamblează forţat, deoarece bara (3) este mai scurtă cu δ=0,5 mm. Dacă barele au aceeaşi rigiditate, (EA=2,1×10^5 ×800 MPa×mm^2), se cere să se determine tensiunile din cele 3 bare: a) după montarea forţată; b) după montare şi încălzirea tuturor barelor cu Δθ=60ºC. Coeficientul dilataţiei termice liniare este: α=1,2×10^{-5} 1/ºC.

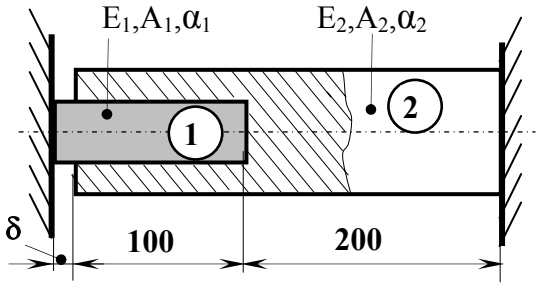


5E.46



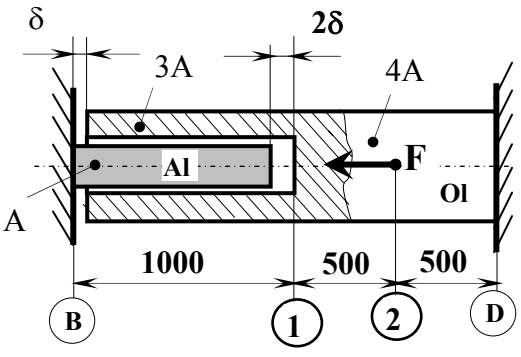
Bara de secțiune constantă A=1000 mm^2, din oțel, cu: E=2,1×10^5 MPa şi α=1,2×10^{-5} 1/ºC, este solicitată de două forțe: F_1=80 kN şi F_2. Bara este mai scurtă cu δ=1 mm. Se cer: a) să se determine valoarea forței F_2 astfel încât capătul barei să atingă peretele (4); b) să se determine eforturile şi tensiunile din fiecare tronson, dacă F_2=120 kN; c) care este variația de temperatură necesară pentru ca tensiunea maximă de întindere să fie egală cu modulul celei maxime de compresiune.

5E.47



Sistemul de bare din figură este asamblat la temperatura θ_0=20 °C. Se dau: A_1=1000 mm^2, E_1=7×10^4 MPa, α_1=2,4×10^{-5} 1/ºC, A_2=2000 mm^2, E_2=2,1×10^5 MPa, α_2=1,2×10^{-5} 1/ºC. Se cer: a) să se determine tensiunile din bare la temperatura θ_1=35 °C; b) temperatura θ_2 la care bara (2) atinge peretele din stânga; c) tensiunile din bare la temperatura $\theta_3=\theta_1+\theta_2$.

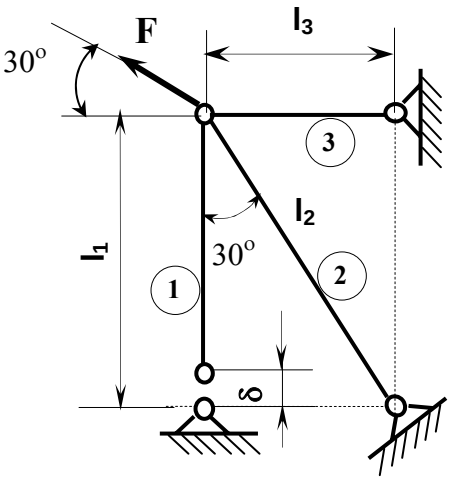
5E.48



Cilindrul din Al, cu aria A=100 mm^2, este fixat în (B) şi intră în orificiul cilindrului din oțel, fixat în (D). Lungimea barei de Al este: 1000-2δ, iar cea a celei din oțel: 2000- δ. Se cunosc: $A_{Ol,B1}$=300 mm^2, E_{Ol}=2,1×10^5 MPa, α_{Ol}=1,2×10^{-5} 1/ºC, $A_{Ol,1D}$=400 mm^2, E_{Al}=7×10^4 MPa, α_{Al}=2,4×10^{-5} 1/ºC, δ=0,15 mm. Se cer: a) tensiunile produse de forța F=36 kN; b) variația de temperatură care anulează jocul dintre cele două bare,($\Delta\theta$); c) tensiunile din bare dacă temperatura creşte cu încă 10 ºC.

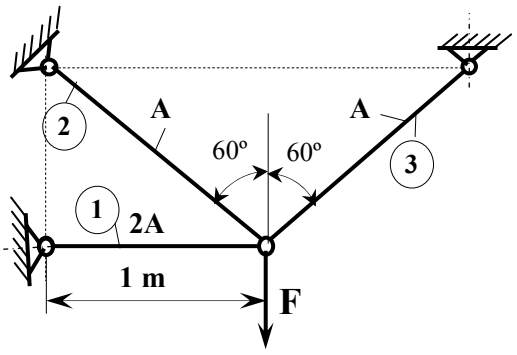
5E.49

Se dă sistemul de bare articulate din figură. Barele au aceeaşi rigiditate EA. Lungimile barelor sunt: $l_1=600\sqrt{3}$ mm, $l_2=1200$ mm şi $l_3=600$ mm. Se dau $E=2{,}1\times10^5$ MPa, A= 800 mm^2, F=42 kN, $\delta=0{,}4$ mm. Se cer: a) eforturile din bare după montarea forțată, în absența forței F; b) eforturile finale după aplicarea forței; c) să se determine valoarea forței F pentru care tirantul (2) este nesolicitat.



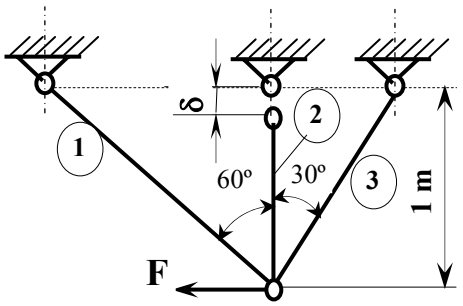
5E.50

Sistemul de 3 bare articulate din oțel, ($E=2\times10^5$ MPa), este solicitat de forța F=150 kN. Bara (1) are secțiunea dublă față de celelalte două, ($A_1=2A_2=2A_3$). Se cer: a) eforturile din bare; b) să se dimensioneze barele, pentru $\sigma_a=150$ MPa; c) să se calculeze deplasarea verticală a punctului de aplicație af forței, Δ_{Fv}.



5E.51

Se dă sistemul de 3 bare articulate din oțel, ($E=2{,}1\times10^5$ MPa, $\alpha_2=1{,}2\times10^{-5}$ 1/ºC), solicitat de forța F=80 kN, aplicată după montarea forțată datorată lungimii nominale a barei (2),(mai scurtă cu $\delta=0{,}4$ mm). Secțiunilebarelor sunt: $A_1=1500$; $A_2=1000$; şi $A_3=1200$ mm^2. Se cer: a) forța necesară pentru realizarea montării forțate,F_{nec}; b) tensiunile din bare după aplicarea sarcinii F indicate pe figură; c) tensiunile din bare produse de o creştere a temperaturii $\Delta\theta=10$ºC; d) tensiunile finale din bare.



5R. Solicitarea axială (Răspunsuri)

5R.1

$A_2= 3\times(b/a)\times A_1$; $A_2=1800$ mm^2.

5R.2

$N_1= 1{,}932$ F= 14,641 kN; $N_2= 0{,}518$ F=10,353 kN;
$\Delta_D= 0{,}1036$ mm.

5R.3

$N=0{,}6(6)F= 26{,}6(6)$ kN; $d_{nec}=14{,}567\approx 15$ mm;$\Delta_F= 1{,}437$ mm.

5R.4

$N= 0{,}75\times F$; $F_{cap}= 150796$ N; $\Delta_F=1{,}8$ mm.

5R.5

$N= 1{,}5\times F=90$ kN; $\sigma_{ef}=111{,}9$ MPa$<\sigma_a=140$ MPa$\rightarrow$Tirantul rezistă; $\Delta_F=2{,}4$ mm.

5R.6

a) $N_{12}= 40$ kN; $N_{23}= N_{34}= 20$ kN; $N_{45}= 80$ kN; b) $d_{nec}=18{,}43\approx 19$ mm; c) $\Delta l_{15}= 0{,}89$ mm.

5R.7

$\sigma_{AB}=33{,}95$ MPa; $\sigma_{BC}=22{,}635$ MPa; $\Delta_C=0{,}735$ mm.

5R.8

$N_1=16$ kN şi $N_2=24$ kN; $\sigma_1=24{,}615$ MPa şi $\sigma_2=36{,}923$ MPa; $\Delta_{F2}=1{,}825$ mm.

5R.9

N=18 kN; σ_{ef}=39,79 MPa<σ_a=150 MPa; Δ_D=0,159 mm.

5R.10

N_1=17,3 şi N_2=20 kN; σ_1=86,5 şi σ_2=100<σ_a=150 MPa; Deplasarea totală: Δ_B=4,62 mm. Deplasarea pe verticală: Δ_{Bv}=3,85 mm; deplasarea pe orizontală: Δ_{Bh}=2,55 mm.

5R.11

H_B=183,3(3) şi H_D=116,6(6) kN, ambele orientate spre dreapta; $A_{1,nec}$=885,42 mm^2, $A_{2,nec}$=1771 mm^2; Δ_2=0,15 mm spre stânga.

5R.12

H_B=2,16(6)×F şi H_D=0,16(6)×F, ambele orientate spre stânga; F_{cap}=34615,4 N; Δ_2=0,092 mm spre dreapta.

5R.13

Y_B=200 şi Y_D=320 kN, ambele orientate în sus; d_{nec}=112,84 mm; Δ_2=0,0172 mm în jos.

5R.14

H_B=62,642 kN şi H_D=17,358 kN, ambele orientate spre stânga; σ_{max}=104,4 MPa; Δ_1=0,188 mm spre dreapta.

5R.15

H_B=15,6 kN şi H_D=64,4 kN, ambele orientate spre dreapta; σ_{max}=53,6(6) MPa; Δ_2=0,222 mm spre stânga.

5R.16

$N_1=(16/41)F=0,39F=62,439$ kN; $N_2=(6/41)F=0,1463F=17,561$ kN; $A_{1,nec}=390,24$ mm^2, $A_{2,nec}=195,12$ mm^2; $\Delta_F=1,6$ mm.

5R.17

$N_1=40,984$ kN, $N_2=49,180$ kN; $\sigma_1=34,153$ MPa, $\sigma_2=-81,967$ MPa; $\Delta_F=0,65$ mm.

5R.18

$N_1=0,6542$ F; $N_2=0,14$ F; $\sigma_{max}=\sigma_1=\sigma_a=160$ MPa$\rightarrow F_{cap}=293,486$ kN; $\Delta_F=1,143$ mm.

5R.19

$N_1=(15/17)F\approx0,88235$ F$=105,882$ kN; $N_2=(9/17)F\approx0,5254$ F$=63,529$ kN; $\sigma_{max}=\sigma_2=\sigma_a=160$ MPa$\rightarrow A_{2nec}=397$ mm$^2\rightarrow A_{1nec}=794$ mm^2; $\Delta_F=3,2$ mm.

5R.20

$N_1=0,4(4)F$, $N_2=0,1(1)F$; $\sigma_1=0,4(4)F/A$, $\sigma_2=0,1(1)F/A$; $F_{max}=1440F$.

5R.21

$N_1=N_3=32,622$ kN, $N_2=43,496$ kN; $d_{nec}=22,4$ mm.

5R.22

a) $N_1=N_3=15385$ N şi $N_2=19231$ N; b) $\sigma_1=\sigma_3=51,28$ MPa şi $\sigma_2=38,46$ MPa; c) $\Delta_v=0,7692$ mm.

5R.23

a) N_1=0,8114F=64,914 kN şi N_2=1,3693F=109,541 kN; b) $A_{nec}=A_2$=1343 mm^2, A_1=447,67 mm^2 ; c) Δ_F=5,075 mm.

5R.24

a) N_1=2,858F=228,66 kN şi N_2=1,029F=87,413 kN; b) $A_{2,nec}$=952,67 mm^2, $A_{1,nec}$=1429 mm^2 ; c) Δ_F=15,875 mm.

5R.25

N_1^{DC}=0,8368F=8,368 kN; N_1^{CB}= -1,1632F= -11,632 kN; $N_2=N_3$=0,67155F=6,7155 kN; Δ_B=0,2132 mm.

5R.26

a) $N_1=N_2$=0,85F; N_3=0,424F; b) F_{max}=70,588 kN; c) Δ_F=2,196 mm; d) $N_1^{\theta}=N_2^{\theta}$=90,24 kN; N_3^{θ}= -12,835 kN.

5R.27

N_1=0,686F; N_2=1,03F; F_{cap}=87,412 kN; Δ_D=3 mm.

5R.28

N_1=0,517F=62,069 kN; N_2=1,241F=148,965 kN; A_{nec}=993,1 mm^2 → d_{nec}=35,559≈36 mm; Δ_D=6,272 mm.

5R.29

N_1=44 kN; N_2=35 kN; Δ_F=0,33 mm.

5R.30

N_1=54,157 kN; N_2=18,144 kN; Δ_F=0,4763 mm.

5R.31

a) $N_1^0=N_3^0=15262$ N, $N_2^0=26434$ N; b) $N_1=N_3= 15262+0,3815F$, $N_2= 26434-0,3391F$; c) $F_{max}=10516$ N.
$\sigma_1=\sigma_3= -8,3(3)$ MPa, $\sigma_2= 91,6(6)$ MPa.

5R.33

$N_1=100$ kN; $N_2=N_3=50$ kN; $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=50$ MPa; $\Delta_D=1$ mm.

5R.34

$\sigma_1= \sigma_3=28,57$ MPa; $\sigma_2=114,28$ MPa; $\sigma_4=142,86$ MPa.

5R.35

$F_{nec}=643,73$ kN; $\sigma_1=159,6$ MPa; $\sigma_2=102,2$ MPa.

5R.36

$\sigma_1=16,37$ MPa; $\sigma_2= -15,43$ MPa; $\sigma_3=16,37$ MPa.

5R.37

$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=30,81$ MPa; $\sigma_4=\sigma_5=17,79$ MPa.

5R.38

$H_B=F$; $H_D=2F$; $N_{max}^{Ol}=1,2233F$; $N_{max}^{Al}=0,7767F$; $F_{cap}=183,829$ kN; $\Delta_{2F}=0,571$ mm.

5R.39

a) $\sigma_1=43$ MPa; $\sigma_2=78,5$ MPa; b) $\sigma_1^{\theta}=133,27$ MPa; $\sigma_2^{\theta}=33,36$ MPa; $\Delta\theta=347,8$ºC.

5R.40

$\sigma_{Cu}^{\theta}= -56,23$ MPa; $\sigma_{Al}^{\theta}= -126,53$ MPa.

5R.41

σ_{A1}^{θ}= -92,88 MPa; σ_{A2}^{θ}= -57,16 MPa.

5R.42

$\Delta\theta$=35,982 ºC.

5R.43

$N_1 \approx 0{,}154F$=12933 N; $N_2 \approx 0{,}2309F$=19399 N; $N_3 \approx 0{,}693F$= 58197 N; σ_1=32,33 MPa; σ_2=48,5 MPa; σ_3=72,75 MPa.

5R.44

N_1=0,1793F=71,72 kN; N_2=0,3566F=142,64 kN; N_3=0,4717F= 188,68 kN; $\sigma_{max}=\sigma_2=\sigma_a$=150 MPa→ $A_{nec}=A_2$=950,93 mm^2; A_1=1426,4 mm^2; A_3=1902 mm^2; Δ_B=1,2594 mm; σ_1^{θ}= -54,43 MPa; σ_2^{θ}=81,65 MPa; σ_3^{θ}= -21,13 MPa; Tensiunile totale sunt: σ_1= -4,16 MPa; σ_2=231,65 MPa; σ_3=78,05 MPa.

5R.45

a) σ_1=52,07 MPa; σ_2=63,77 MPa; σ_3=71,13 MPa; b) σ_1^{θ}= -59,375 MPa; σ_2^{θ}= -72,75 MPa; σ_3^{θ}= -81,125 MPa .

5R.46

a) F_2=59 kN; b) N_{12}=155,33; N_{23}=75,33; N_{34}= -44,67 kN; σ_{12}= 155,33; σ_{23}= 75,33; σ_{34}= -44,67 MPa; c) din: $\sigma_{12} - \alpha \cdot E \cdot \Delta\theta = I\sigma_{34}I + \alpha \cdot E \cdot \Delta\theta \rightarrow \Delta\theta$=21,96ºC.

5R.47

a) $\sigma_{1,\theta 1}$= -38 MPa; $\sigma_{2,\theta 1}$= -19 MPa; b) $\Delta\theta_2$=41,67 $^{\circ}$C; c) $\sigma_{1,\theta 3}$= -132 MPa; $\sigma_{2,\theta 3}$= -43 MPa

5R.48

a) În oțel: $\sigma_{B-1}^{'}$= -48; $\sigma_{1-2}^{'}$= -36; $\sigma_{2-D}^{'}$=54 MPa; în Al: $\sigma_{B1}^{'}$=0; b) $\Delta\theta$=9,92 ºC; c) în oțel: $\sigma_{B-1}^{''}$= -103,3; $\sigma_{1-2}^{''}$= -79,3; $\sigma_{2-D}^{''}$=10,7 MPa; în Al: $\sigma_{B1}^{''}$= - 16,36 MPa.

5R.49

a) N_1^0=23,668 kN; N_2^0= -27,33 kN; N_3^0=13,665 kN; b) N_1^0=32,544 kN; N_2^0= -13,33 kN; N_3^0=43,04 kN; c) F= 81,99 kN.

5R.50

a) N_1= 0; N_2=N_3=F=150 kN; b) A_{nec}=1000 mm^2; c) Δ_{Fv}=1,73 mm

5R.51

a) F_{nec}^{f}=40876 N; b) σ_1^0= -55,1; σ_2^0= -7,8; σ_3^0=47,3 MPa c) σ_1^{θ}= -4,1; σ_2^{θ}=12,3; σ_3^{θ}= -8,85MPa; d) σ_1^f= -73,4; σ_2^f=47,1; σ_3^f=7,75 MPa

6. CALCULUL ÎMBINĂRILOR DE PIESE

6.1 Considerații generale. Etape de calcul

Într-o structură de rezistență, elementele sunt îmbinate (asamblate) între ele cu ajutorul unor organe de îmbinare sau asamblare.

Dacă asamblările se fac prin nituire, sudare sau lipire, ele sunt ***nedemontabile***, iar dacă se fac prin şuruburi sau pene, sunt ***demontabile***.

Un studiu mai laborios al îmbinărilor, se face la cursul de Organe de Maşini.

În cele ce urmează, se vor prezenta numai câteva noțiuni necesare la calculul de rezistență al unor îmbinări de elemente solicitate în general de forțe axiale.

Calculul îmbinărilor de piese, se face exclusiv din condiția de rezistență.

În cazul pieselor asamblate, solicitate de către forțe exterioare axiale, apar preponderent următoarele trei solicitări:

- ***solicitarea axială*** (de întindere sau compresiune),
- ***solicitarea de forfecare***,
- ***solicitarea de strivire*** (tot o compresiune).

Pentru înțelegerea corectă a modului în care apar cele trei solicitări, recomand parcurgerea de îndată a materialului predat la cursuri, sau studiul acestor solicitări din alte manuale. Prezenta lucrare, nu permite o reluare a studiului solicitărilor care apar în cazul îmbinărilor de piese, ci abordează aplicarea concretă (practică) a acestor noțiuni în calculul îmbinării elementelor de rezistență.

Relațiile de calcul care se utilizează în cazul îmbinărilor de piese, sunt prezentate în Tabelul 6.1-1. Mărimile încă necunoscute din Tabelul 6.1-1, au următoarea semnificație:

τ_{max} , τ_a - tensiune tangențială maximă, respectiv admisibilă,

T - efort tăietor,

A_f - aria suprafeței forfecate (aria de forfecare),

$A_{nec,f}$ - aria necesară a suprafeței de forfecare,

$\sigma_{max,s}$, σ_{as} - tensiunea normală maximă la strivire, respectiv tensiunea admisibilă la strivire,

A_s - aria suprafeței strivite (aria de strivire),

$A_{nec,s}$ - aria necesară a suprafeței de strivire,

N_s - efortul normal de strivire.

Tabelul 6.1-1

Tip de problemă	**Solicitarea**		
	axială	**forfecare**	**strivire**
de verificare	$\sigma_{max} = \frac{N}{A} = \ldots \leq \sigma_a$	$\tau_{max} = \frac{T}{A_f} = \ldots \leq \tau_a$	$\sigma_{max,s} = \frac{N_s}{A_s} = \ldots \leq \sigma_{as}$
de dimensionare	$A_{nec} = \frac{N}{\sigma_a} = \ldots$	$A_{nec,f} = \frac{T}{\tau_a} = \ldots$	$A_{nec,s} = \frac{N_s}{\sigma_{as}} = \ldots$
de efort capabil	$N_{cap} = A \cdot \sigma_a = \ldots$	$T_{cap} = A_f \cdot \tau_a = \ldots$	$N_{cap,s} = A_s \cdot \sigma_{as} = \ldots$

Ca şi la solicitarea axială (Cap.5), toate relaţiile din Tabelul 6.1-1, se scriu în secțiunile considerate periculoase ale elementului de rezistență din îmbinare.

Calculul de rezistență al îmbinărilor de piese, presupune parcurgerea următoarelor ***etape***:

- *Se analizează atent îmbinarea şi se stabilesc piesele (elementele de rezistență) care compun ansamblul.*
- *Se notează toate piesele îmbinării (de exemplu cu 1, 2, 3, ...) sau dacă este posibil, se dau denumiri acestor piese (bolț, ştift, şurub, pană, etc.)*
- *Se analizează atent modul în care se transmite forța exterioară prin îmbinare de la o piesă la alta. De modul de înțelegere al formei*

pieselor componente şi a modului de transmitere al forţei exterioare prin îmbinare, depinde în mare parte, corectitudinea calculului.

- *Se stabileşte tipul problemei (de verificare, dimensionare, efort capabil).*

După ce s-au parcurs aceste prime etape:

- *Se ia pe rând fiecare piesă (dacă este posibil este bine să se întocmească o schiţă cu forma sa), la care:*

- se stabilesc solicitările la care este supusă,

- se stabileşte secţiunea periculoasă pentru fiecare solicitare (fiind mai multe solicitări la o singură piesă, pot fi mai multe secţiuni periculoase),

- în secţiunile periculoase găsite, se scriu relaţiile de bază din Tabelul 6.1-1 ce corespund tipului de problemă stabilit,

- din relaţiile scrise, particularizate pentru situaţia dată, se determină mărimile necunoscute (cerute în enunţul problemei).

Observaţie: Nu se poate recomanda o anumită piesă sau solicitare cu care să se înceapă rezolvarea. Din acest motiv, este posibil ca în relaţiile de calcul scrise, să existe mai multe necunoscute şi ca urmare, ecuaţia să nu poată fi rezolvată. Nu trebuie să ne sperie o astfel de situaţie. Important este să găsim atâtea relaţii (atâtea secţiuni periculoase) câte mărimi trebuie calculate. După ce s-au scris toate relaţiile, acestea se grupează formând sisteme de ecuaţii mai mici, care permit determinarea tuturor mărimilor cerute. Exemplele care vor urma, vor confirma cele spuse mai înainte.

La piesele cilindrice (şuruburi, nituri, bolţuri, etc.), suprafaţa de strivire care intră în calcule, nu este suprafaţa efectivă de contact dintre piese, ci proiecţia suprafeţei de contact pe secţiunea longitudinală a piesei cilindrice. De multe ori, suprafaţa de strivire a pieselor cilindrice care intră în calcul se ia în mod greşit, motiv pentru care am făcut prezenta atenţionare.

6.2 Calculul îmbinărilor de piese cu grosime mică

Să se determine dimensiunile îmbinării de piese din Fig.6.2-1, ştiind că elementele ecesteia sunt realizate din acelaşi material,

pentru care se cunosc: σ_a *= 160 MPa,* τ_a *= 120 MPa,* σ_{as} *= 320 MPa. Îmbinarea este supusă acțiunii unei forțe F = 120 kN.*

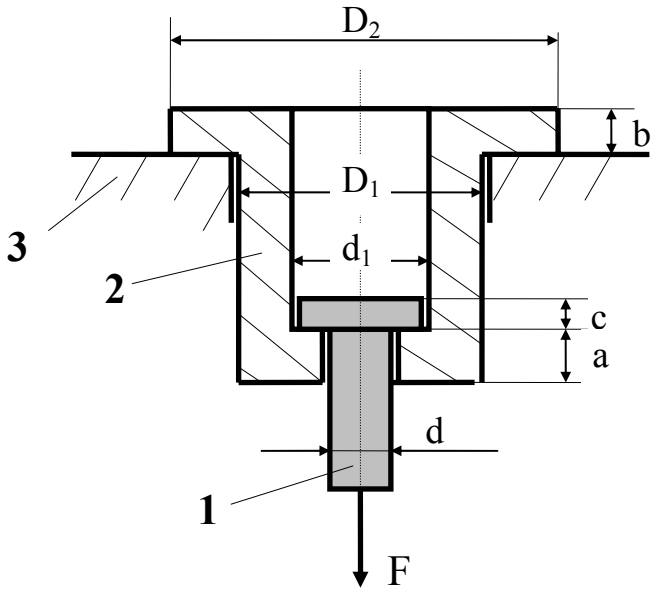


Fig.6.2-1

Rezolvare

Parcurgem etapele recomandate pentru calculul îmbinărilor (parag.6.1):

- Ansamblul este format din două piese, pe care le notăm cu 1, respectiv 2 (Fig.6.2-1). Piesa 1 este o tijă circulară cu diametrul d, care la capătul superior, are diametrul mai mare (d_1). Piesa 2 are forma unui pahar cu guler la partea superioară, iar la partea inferioară are prevăzută o gaură de diametru d, prin care trece partea mai subțire a tijei 1.
- Forma fiecărei piese, cu dimensiunile corespunzătoare este foarte uşor de imaginat.
- Forța exterioară F aplicată la capătul inferior al tijei, trage tija în jos, care cu umărul său de la partea superioară apasă pe fundul paharului (piesa 2). Mai departe forța F se transmite părții superioare a paharului prin pereții acestuia, iar gulerul paharului de la partea superioară, apasă pe suportul de sprijin 3, suport la care nu

se cunosc dimensiunile şi materialul (el nu prezintă importanță pentru calcul).

- Problema este de dimensionare.
- Luăm acum pe rând fiecare piesă:

Piesa 1 (tija - Fig.6.2-2)

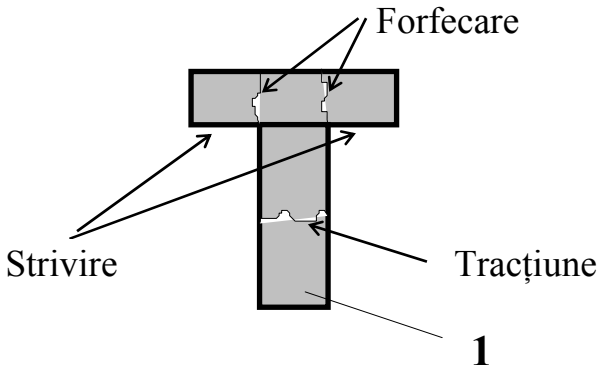


Fig.6.2-2

a) Tija 1 este solicitată la întindere (vezi Fig.6.2-2)

- Secțiunea periculoasă este oricare de pe porțiunea cu diametrul d.

- Relația de calcul este (vezi Tabelul 6.1-1):

$$\frac{\Pi \cdot d^2}{4} = \frac{F}{\sigma_a} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4 \cdot F}{\Pi \cdot \sigma_a}} = 31 \quad mm \qquad 6.2\text{-}1$$

b) Între tija 1 (partea superioară) şi fundul paharului, există o apăsare reciprocă, o solicitare de strivire. Suprafața de strivire este o suprafață inelară cu diametrul interior d şi cel exterior d_1 (Fig.6.2-2).

- Relația de calcul, este:

$$\frac{\Pi}{4}\left(d_1^2 - d^2\right) = \frac{F}{\sigma_{as}} \Rightarrow d_1 = \sqrt{d^2 + \frac{4 \cdot F}{\Pi \cdot \sigma_{as}}} = 38 \; mm \qquad 6.2\text{-}2$$

c) Porțiunea tijei cu diametrul d_1, tinde să fie forfecată de către muchiile găurii fundului paharului. Suprafața care se foarfecă, este un cilindru cu diametrul d şi înălțime c (Fig.6.2-2).

- Relația de calcul este:

$$\Pi \cdot d \cdot c = \frac{F}{\tau_a} \Rightarrow c = \frac{F}{\Pi \cdot d \cdot \tau_a} = 11 \ mm \qquad 6.2\text{-}3$$

La piesa 1, nu se mai întâlnesc alte secțiuni periculoase.
Trecem la piesa următoare: **piesa 2** (paharul - Fig.6.2-3).

Căutăm solicitări şi secțiuni periculoase (Fig.6.2-3).

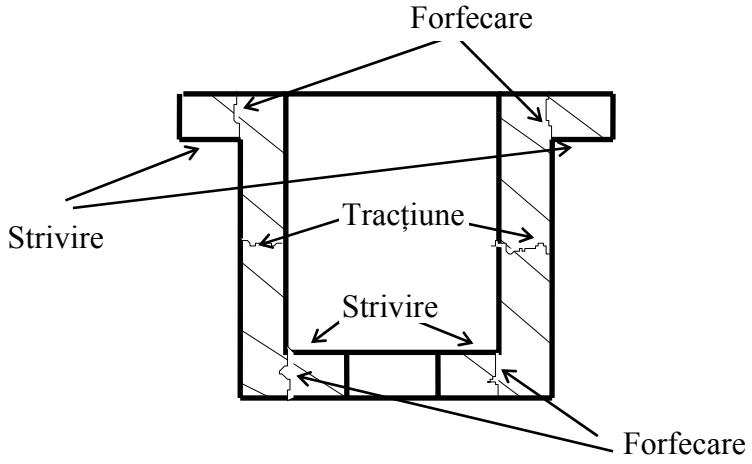


Fig.6.2-3

d) Muchiile părții superioare ale tijei 1, tind să foarfece fundul paharului. Se realizează o suprafață de forfecare cilindrică, de diametru d_1 şi înălțime a (Fig.6.2-3).

- relația de calcul este:

$$\Pi \cdot d_1 \cdot a = \frac{F}{\tau_a} \Rightarrow a = \frac{F}{\Pi \cdot d_1 \cdot \tau_a} = 9 \ mm \qquad 6.2\text{-}4$$

e) Forța F fiind orientată după axa longitudinală a paharului, supune paharul la o solicitare axială de întindere.

- Secțiunea periculoasă se află între fundul paharului şi partea lui superioară. Secțiunea supusă la întindere, are formă inelară cu diametrul interior d_1 şi cel exterior D_1 (Fig.6.2-3).

- Relația de calcul este:

$$\frac{\Pi}{4}\left(D_1^2 - d_1^2\right) = \frac{F}{\sigma_a} \Rightarrow D_1 = \sqrt{d_1^2 + \frac{4 \cdot F}{\Pi \cdot \sigma_a}} = 49 \ mm \qquad 6.2\text{-}5$$

f) Muchiile suportului 3, tind să foarfece gulerul de la partea superioară a paharului. Forma suprafeței forfecate este cilindrică, cu diametrul D_1 şi înălțime b (Fig.6.2-3).

- Relația de calcul este:

$$\Pi \cdot D_1 \cdot b = \frac{F}{\tau_a} \Rightarrow b = \frac{F}{\Pi \cdot D_1 \cdot \tau_a} = 7 \ mm \qquad 6.2\text{-}6$$

g) Între gulerul paharului şi suportul de sprijin 3, se realizează o apăsare reciprocă, o solicitare de strivire. Forma suprafeței de strivire este inelară, cu diametrul interior D_1 şi cel exterior D_2 (Fig.6.2-3).

- Relația de calcul este:

$$\frac{\Pi}{4}\left(D_2^2 - D_1^2\right) = \frac{F}{\sigma_{as}} \Rightarrow D_2 = \sqrt{D_1^2 + \frac{4 \cdot F}{\Pi \cdot \sigma_{as}}} = 54 \ mm \qquad 6.2\text{-}7$$

Nu mai sunt alte secțiuni periculoase. După cum se poate constata, s-au găsit şapte relații, care au permis calculul celor şapte dimensiuni principale ale elementelor îmbinării.

La acest exemplu, s-a reuşit scrierea relațiilor în acea ordine în care fiecare relație a conținut o singură necunoscută (celelalte mărimi din relație au fost determinate cu relațiile precedente). Dacă la rezolvarea unei probleme nu se reuşeşte la fel, nu trebuie să disperăm. Trebuie scrise toate relațiile şi apoi prin gruparea lor se vor determina toate mărimile necunoscute. Important este să găsim atâtea relații câte necunoscute sunt.

Alte câteva considerații:

- Dacă elementele unei îmbinări sunt realizate din materiale diferite, în relațiile de calcul, tensiunile admisibile σ_a, τ_a se iau cele ale materialului piesei care se calculează.

- În cazul solicitării de strivire, dacă elementele sunt din materiale diferite, în relația de calcul tensiunea admisibilă de strivire σ_{as}, se ia cea de la piesa pentru care aceasta prezintă cea mai mică valoare, $\sigma_{as} = \sigma_{as,min}$.

- În cazul problemelor de alt tip decât cel prezentat (de verificare sau efort capabil), calculul se face la fel, numai că în relațiile de

calcul, alte mărimi sunt necunoscute (tensiunile maxime, respectiv forța exterioară).

- Când se caută secțiunile periculoase ale unui element de rezistență dintr-o îmbinare, este bine să ne imaginăm că acel element este realizat din cauciuc (este uşor să ni-l imaginăm cum se deformează şi unde s-ar rupe), iar celelalte cu care vine în contact sunt din oțel.

6.3 Calculul îmbinărilor nituite

Înainte de a trece la calculul propriuzis al unor îmbinări nituite, ne oprim puțin asupra unor aspecte, cu toate că ele sunt cunoscute din lecturarea unor materiale de specialitate. Repetarea unora dintre ele, nu poate fi decât benefică.

Pentru început se abordează ***îmbinarea nituită dintre două plăci subțiri*** (platbande). La fiecare nit, se transmit câte două forțe egale şi de sens opus: una de la o platbandă iar cealaltă de la platbanda a doua. Se apreciază că toate niturile dintr-o astfel de îmbinare se comportă la fel. Astfel, în cazul a ***n*** nituri, asupra fiecărui nit, acționează câte două forțe egale şi de sens contrar, numite forțe pe nit, F_{nit} (Fig.6.3-1):

$$F_{nit} = \frac{F}{n} \qquad 6.3\text{-}1$$

Forțele F_{nit}, tind să foarfece nitul după planul k-k de separație al celor două platbande.

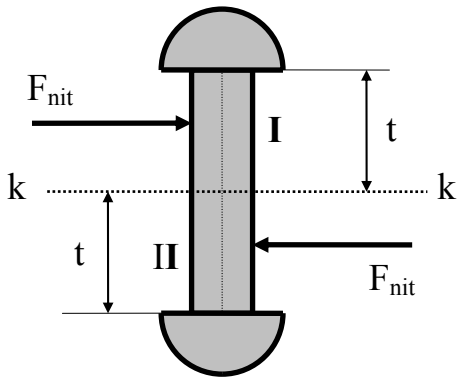


Fig.6.3-1

Diametrul **d** al tijei niturilor, se poate stabili prin calcul sau se alege de obicei în raport cu grosimea **t** a pieselor care se nituiesc ($d \cong 2t$). În acest ultim caz, la îmbinarea nituită, se calculează numărul de nituri necesar îmbinării.

Pentru calculul la strivire (sau presiunea pe gaură), suprafața de strivire nu se consideră suprafața semicilindrică efectivă de contact dintre nit şi platbandă, ci proiecția acestei suprafețe pe secțiunea longitudinală a nitului, suprafață de formă dreptunghiulară şi având o latură egală cu diametrul **d** al nitului iar cealaltă latură, egală cu grosimea **t** a platbandei care transmite presiunea (forța) pe tija nitului.

Platbandele care participă la îmbinare, prezintă secțiunea periculoasă acolo unde aria netă a secțiunii transversale a platbandei are valoarea cea mai mică. Aria netă este aria care participă la transmiterea forței (fără golurile produse de găurile pentru introducerea niturilor).

În cazul ***îmbinărilor nituite prin intermediul ecliselor***, forța se transmite prin intermediul primului grup de nituri de la o platbandă la cele două eclise, iar apoi de la acestea din urmă prin intermediul celui de-al doilea grup de nituri, la cea de-a doua platbandă.

Notând cu **n** numărul niturilor pentru transmiterea forței F de la o platbandă la eclise, rezultă că fiecare nit preia de la platbandă o sarcină egală cu F / n. Această sarcină este echilibrată de sarcinile F / 2n, care se transmit la nit prin intermediul ecliselor (Fig.6.3-2).

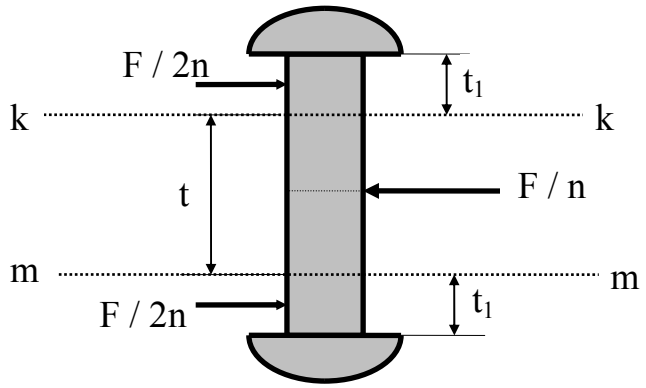


Fig.6.3-2

În acest caz de îmbinare, tija nitului este supusă la forfecare, în două secțiuni (k – k şi m – m).

Se consideră că forța tăietoare $F_{nit} = F / n$, se repartizează în mod egal la cele două secțiuni k-k şi m-m.

Forța F_{nit} striveşte şi porțiunea de mijloc a nitului la fel ca şi porțiunea inferioară şi superioară a acestuia. Porțiunea cea mai periculoasă este acea porțiune la care suprafața de strivire este mai mică.

Există elemente de construcție la care niturile prezintă mai mult de două suprafețe de forfecare. Metodele de calcul ale niturilor cu mai multe suprafețe de forfecare nu diferă de cele care se vor prezenta în acest paragraf.

În cazul platbandelor, pentru stabilirea secțiunilor periculoase, trebuie avut în vedere faptul că la nivelul primului rând de nituri dinspre forța F, valoarea efortului axial N este cea mai mare, ea scăzând spre celelalte rânduri de nituri ca urmare a transmiterii acesteia de la platbandă prin nituri la eclise. La nivelul ecliselor însă, efortul axial N este maxim la nivelul de separare dintre cele două platbande (pentru o eclisă, N = F / 2).

Exemplul nr.1. *Să se verifice elementele îmbinării nituite din Fig.6.3-3, realizate din acelaşi material, pentru care se cunosc: F = 40 kN, d = 10 mm, b = 40 mm, t = 10 mm,* σ_a *= 160 MPa,* τ_a *= 130 MPa,* σ_{as} *= 240 MPa.*

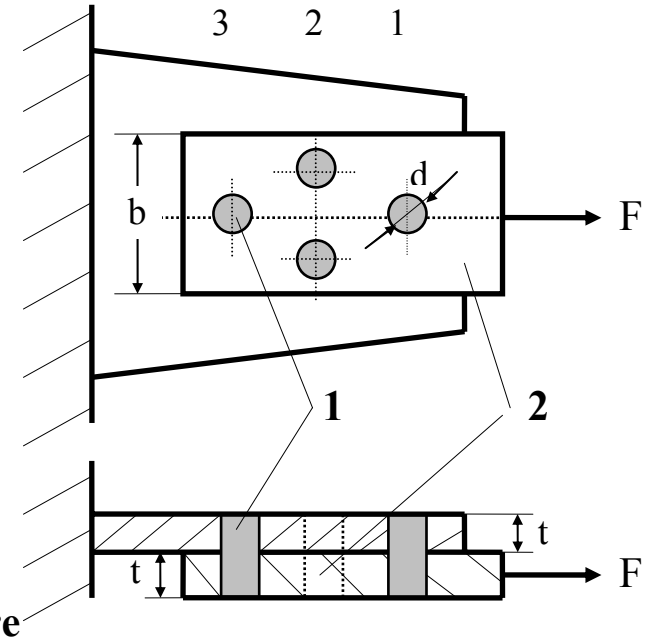


Fig.6.3-3

Rezolvare

- La îmbinare participă patru nituri. Forța repartizată pe un nit, este:

$$F_{nit} = \frac{F}{n} = \frac{F}{4} = 10\ KN$$

- Sunt două elemente de rezistență care ne interesează şi pentru care avem dimensiunile: nitul (notat cu **1**) şi o platbandă (notată cu **2**). Pentru cealaltă platbandă nu este cunoscută lățimea, dar din desen se vede că lățimea acesteea este mai mare decât lățimea **b** a piesei **2**. Din acest motiv, această platbandă (cu lățimea variabilă) este mai puțin periculoasă decât platbanda **2**.
- Problema este de verificare.
- Luăm pe rând fiecare element din îmbinare şi îl calculăm.

Piesa 1 (sau nitul).

a) Nitul este solicitat la forfecare, prezentând o singură suprafață de forfecare şi anume la nivelul de separație dintre cele două platbande.

- Relația de calcul, este:

$$\tau_{max} = \frac{F_{nit}}{A_f} = \frac{F_{nit}}{\frac{\Pi \cdot d^2}{4}} = \frac{4 \cdot F_{nit}}{\Pi \cdot d^2} = 127\ MPa < \tau_a \qquad 6.3\text{-}2$$

b) Nitul este solicitat la strivire. Cum grosimea celor două platbande este aceeaşi, suprafața de strivire periculoasă este oricare dintre nit şi cele două platbande.

- Relația de calcul, este:

$$\sigma_{max,s} = \frac{F_{nit}}{A_s} = \frac{F_{nit}}{t \cdot d} = 100\ MPa < \sigma_{as} \qquad 6.3\text{-}3$$

Pentru nit nu mai există alte secțiuni periculoase.

Piesa 2 (platbanda).

c) Platbanda este solicitată la întindere. În secțiunea 1 (la primul rând de nituri) prezintă arie netă mai mare (o singură gaură) dar aici şi efortul axial N, este mai mare. Din acest motiv, o verificăm la nivelul 1, dar şi la nivelul 2 (vezi Fig.6.3-3).

- La nivelul 1, relația de calcul, este:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A_{net}} = \frac{F}{(b-d)\cdot t} = 133 \ MPa < \sigma_a \qquad 6.3\text{-}4$$

- La nivelul 2, relația de calcul, este:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A_{net}} = \frac{F-F_{nit}}{(b-2\cdot d)\cdot t} = 150 \ MPa < \sigma_a \qquad 6.3\text{-}5$$

La nivelul 2 (al doilea rând de nituri), efortul axial este $N=F-F_{nit}$ mai mic cu F_{nit} care s-a transmis prin nitul de la nivelul 1 (primul rând de nituri) de la o platbandă (platbanda 1) la cealaltă. La fel, la nivelul 3 (ultimul rând de nituri), efortul axial este:

$$N = N_3 = F - 3\ F_{nit} \qquad 6.3\text{-}6$$

deoarece până la ultimul rând de nituri, forța F s-a micşorat cu $3F_{nit}$, care s-a transmis prin primele trei nituri de la nivelul 1 şi 2.

La nivelul 3, tensiunea normală maximă, este:

$$\sigma_{max} = \frac{N_3}{A_{net}} = \frac{F-3\cdot F_{nit}}{(b-d)\cdot t} = 33{,}3 \ MPa < \sigma_a \qquad 6.3\text{-}7$$

Calculul efectuat asupra acestei îmbinări, arată că toate elementele îmbinării îndeplinesc condițiile cerute prin enunțul problemei.

Exemplul nr.2. *Să se verifice elementele îmbinării dintre două platbande, realizată prin intermediul a două eclise aşa cum se arată în Fig.6.3-4 şi pentru care se cunosc: F = 200 kN, b_p = 200 mm, b_e = 160 mm, t_p = 12 mm, t_e = 7 mm, d = 20 mm, σ_a = 160 MPa, σ_{as} = 320 MPa, τ_a = 100 MPa.*

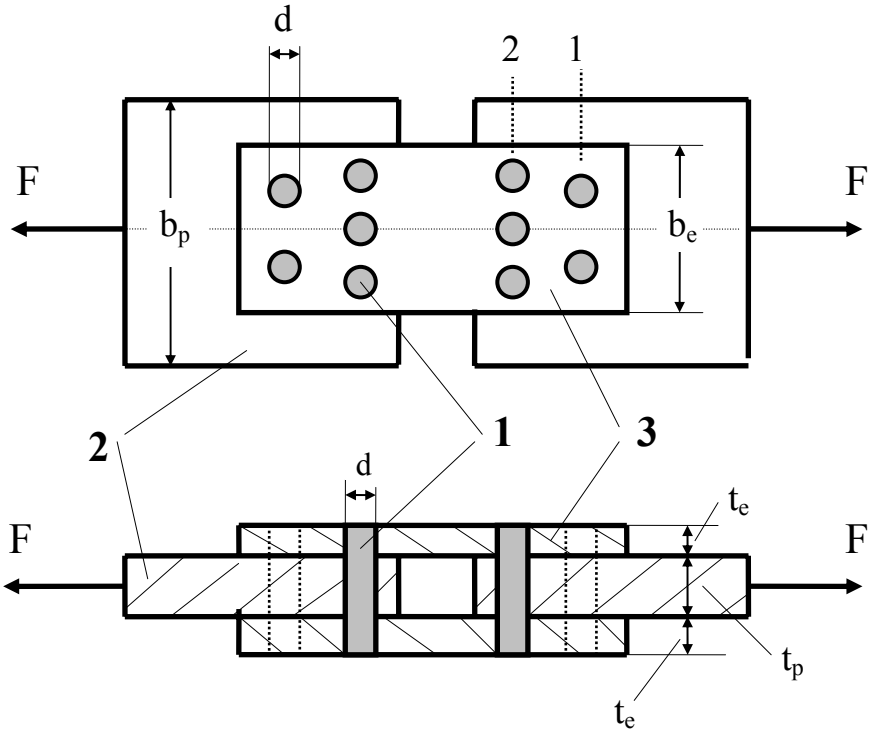


Fig.6.3-4

Rezolvare

Elementele care necesită calcul, sunt: nitul (piesa 1), platbanda (piesa 2) şi eclisa (piesa 3).

Calculăm pe rând fiecare piesă componentă.

Piesa 1 (nitul).

Forța pe nit F_{nit}, este:

$$F_{nit} = \frac{F}{n} = \frac{F}{5} = 40 \ KN \qquad 6.3\text{-}8$$

Atenție: *Forța F se împarte la 5, nu la 10 cum greşit se procedează de cele mai multe ori. Forța F se transmite de la platbandă la eclise prin 5 nituri (acesta este un grup de elemente, nituri) şi apoi de la eclise la platbanda a doua din nou prin 5 nituri (alt grup de elemente, nituri).*

a) Nitul este solicitat la forfecare şi prezintă două suprafețe de forfecare, la nivelul dintre platbandă şi cele două eclise.

- Relația de calcul este:

$$\tau_{max} = \frac{F_{nit}}{2 \cdot A_f} = \frac{F_{nit}}{2\frac{\Pi \cdot d^2}{4}} = 63{,}8 \ MPa < \tau_a \qquad 6.3\text{-}9$$

b) Nitul este solicitat la strivire, suprafața de strivire este între nit şi platbandă şi între nit şi cele două eclise. Strivirea mai puternică are loc între nit şi platbandă (lungimea de contact este t_p = 12 mm) şi nu între nit şi eclise, unde lungimea de contact este 2 t_e = 2 7 = 14 mm.

- Relația de calcul, este:

$$\sigma_{\max,s} = \frac{F_{nit}}{A_s} = \frac{F_{nit}}{d \cdot t_p} = 166{,}16 \ MPa < \sigma_{as} \qquad 6.3\text{-}10$$

Piesa 2 (platbanda).

c) Platbanda este solicitată la întindere. Efectuăm calculul atât la nivelul primului rând de nituri (nivelul 1) cât şi la nivelul 2 (al doilea rând de nituri, unde sunt trei nituri pe un rând).

- Relația de calcul, la nivelul primului rând de nituri (unde sunt două nituri pe rând), este:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A_{net}} = \frac{F}{\left(b_p - 2 \cdot d\right) \cdot t_p} = 104 \ MPa < \sigma_a \qquad 6.3\text{-}11$$

- La nivelul celui de-al doilea rând de nituri, relația de calcul, este:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A_{net}} = \frac{F - 2 \cdot F_{nit}}{\left(b_p - 3 \cdot d\right) \cdot t_p} = 71{,}42 \ MPa < \sigma_a \qquad 6.3\text{-}12$$

Piesa 3 (eclisa).

Eclisa este solicitată la întindere de către forța F / 2 = 100 kN, (Fig.6.2-5).

- La nivelul 2 (al doilea rând de nituri), relația de calcul este:

$$\sigma_{max} = \frac{\frac{F}{2}}{A_{net}} = \frac{\frac{F}{2}}{(b_e - 3 \cdot d) \cdot t_e} = 142{,}8 \ MPa < \sigma_a \qquad 6.3\text{-}13$$

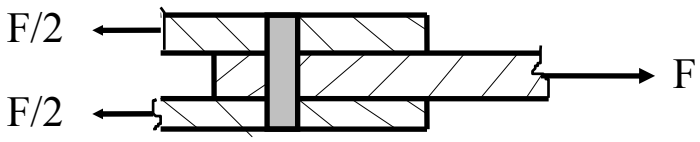


Fig.6.3-5

- La nivelul primului rând de nituri (nivelul 1), relația de calcul, este:

$$\sigma_{max} = \frac{\frac{F}{2} - 3 \cdot \frac{F}{2} \cdot \frac{1}{5}}{(b_e - 2 \cdot d) \cdot t_e} = 47{,}62 \ MPa < \sigma_a \qquad 6.3\text{-}14$$

6.4 Calculul îmbinărilor sudate

Calculul îmbinărilor sudate ca şi cel al îmbinărilor nituite, se face convențional, considerând distribuția uniformă a tensiunilor în secțiunile de calcul. În acelaşi timp, acesta este într-o strânsă concordanță cu tehnologia de sudare.

După poziția relativă a pieselor care se îmbină, sudurile se clasifică, în :

- ***suduri cap la cap***,
- ***suduri de colț***, care în funcție de orientarea pe care o au față de direcția de solicitare (direcția forței), pot fi:
  - ***frontale***,
  - ***laterale***.

La sudurile cap la cap (Fig.6.4-1) elementele sudurii sunt:

- *grosimea de calcul a cordonului de sudură* **a**, egală cu grosimea celei mai subțiri plăci din îmbinarea sudată,

$$a = t_{min} \qquad 6.4\text{-}1$$

- *lungimea de calcul* $\mathbf{l_c}$ şi care este egală cu lățimea plăcii din care se scad zonele de la capetele cordonului, considerând că la fiecare capăt, pe o lungime aproximativ egală cu grosimea de calcul **a**, fuziunea materialului de adaos cu cel de bază este imperfectă:

$$l_c = b - 2a \qquad 6.4\text{-}2$$

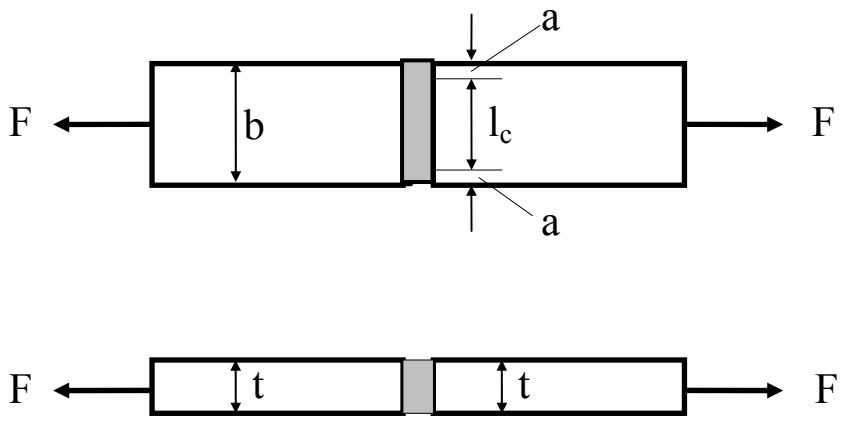


Fig.6.4-1

Sudura cap la cap, este solicitată la întindere, pentru care aria de calcul A_c, are expresia:

$$A_c = l_c\, a = (b - 2\, a)\, a = (b - 2\, t_{min})\, t_{min} \qquad 6.4\text{-}2$$

În cazul sudurii cap la cap cu cordon de sudură oblic (Fig.6.4-2), sudura este solicitată atât la întindere cât şi la forfecare, de către eforturile:

- la întindere:

$$N = F \sin \alpha \qquad 6.4\text{-}3$$

- la forfecare:

$$T = F \cos \alpha \qquad 6.4\text{-}4$$

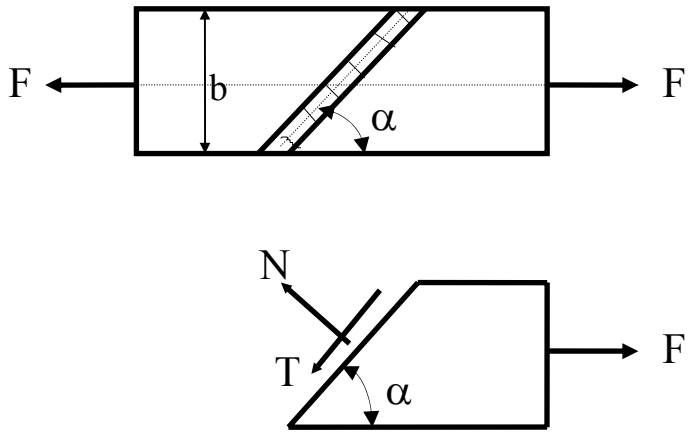


Fig.6.4-2

Aria de calcul A_c la sudura cap la cap cu cordon oblic, este:

$$A_c = a \cdot l_c = a \cdot \left(\frac{b}{\sin\alpha} - 2 \cdot a\right) = t_{min} \cdot \left(\frac{b}{\sin\alpha} - 2 \cdot t_{min}\right) \qquad 6.4\text{-}5$$

Pentru sudurile de colț, elementele caracteristice ale cordonului de sudură, sunt (Fig.6.4-3):

- grosimea de calcul **a**, care este egală cu înălțimea triunghiului înscris în secțiunea cordonului de sudură:

$$a \cong 0{,}7\ t_{min} \qquad 6.4\text{-}6$$

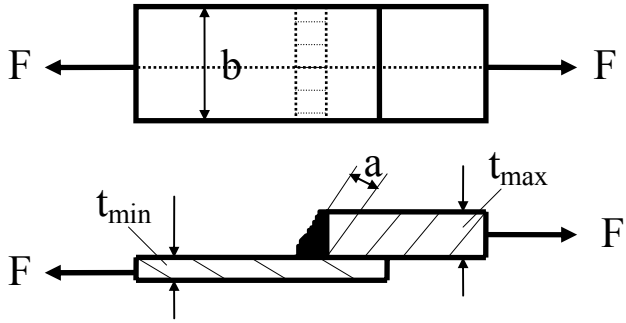


Fig.6.4-3

- *lungimea de calcul* l_c, este egală cu lungimea b (sau l) a cordonului de sudură, din care se scad zonele de la capetele

cordonului de sudură, considerând că la fiecare capăt, pe o lungime aproximativ egală cu grosimea de calcul **a**, fuziunea materialului de adaos cu cel de bază, este imperfectă:

$$l_c = l - 2\ a = l - 2\ \ 0{,}7\ t_{min} = l - 1{,}4\ t_{min} \qquad 6.4\text{-}7$$

Aria de calcul la forfecare, la sudura de colț, este:

$$A_c = a \cdot l_c = 0{,}7\ t_{min}\ (l - 2\ \ 0{,}7\ t_{min}) = \\ = 0{,}7\ t_{min}\ (l - 1{,}4\ t_{min}) \qquad 6.4\text{-}8$$

Exemplul nr.1. *Să se calculeze forța pe care o poate suporta îmbinarea din Fig.6.4-4, pentru care se cunosc: b_e = 130 mm, t_e = 12 mm, b_p = 170 mm, t_p = 18 mm, l = 100 mm, σ_a = 140 MPa, τ_{as} = 100 MPa. Se consideră că materialul platbandelor, ecliselor şi a celui de adaos, prezintă aceeaşi rezistență admisibilă.*

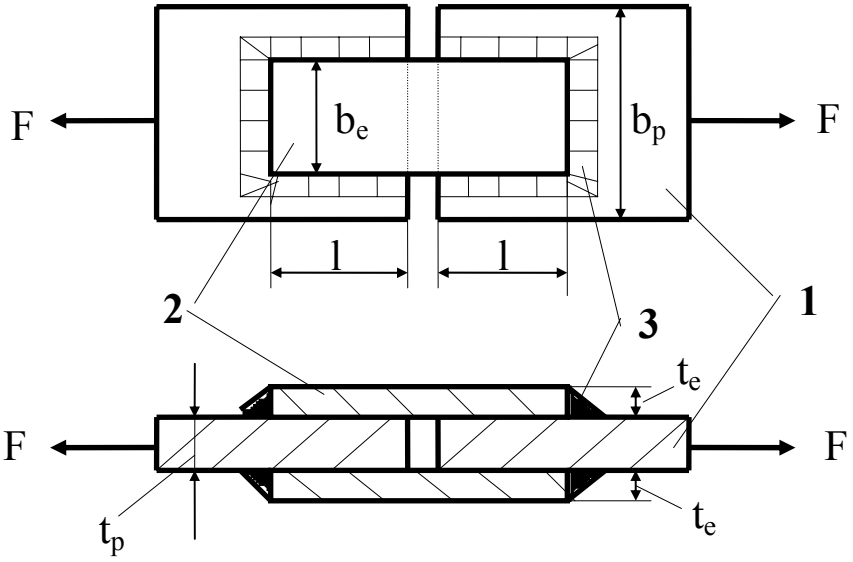


Fig.6.4-4

Rezolvare

- Există trei elemente de calcul pentru această îmbinare (s-au notat cu 1, 2, 3-Fig.6.4-4):

- platbanda (piesa 1),
- eclisa (piesa 2),
- cordonul de sudură (piesa 3).

Să calculăm acum pe rând, fiecare element al îmbinării.

Calculul platbandei (piesa 1).

a) Platbanda este solicitată la întindere. Secțiunea periculoasă este oricare secțiune cuprinsă între capătul în care acționează forța F şi capătul de îmbinare prin sudură cu eclisa.

- Relația de calcul, este:

$$N_{cap} = A_p \, \sigma_a = b_p \, t_p \, \sigma_a = F_1$$

de unde:

$$F_1 = b_p \, t_p \, \sigma_a = 428{,}4 \text{ kN} \qquad 6.4\text{-}9$$

Platbanda nu mai prezintă altă secțiune periculoasă.

Calculul eclisei (piesa 2).

b) Eclisa este solicitată la întindere. Secțiunea periculoasă este la nivelul de separare dintre cele două platbande, unde efortul axial transmis printr-o singură eclisă este egal cu F / 2.

- Relația de calcul, este:

$$N_{cap} = b_e \cdot t_e \cdot \sigma_a = \frac{F_2}{2}$$

de unde:

$$F_2 = 2 \, b_e \, t_e \, \sigma_a = 436{,}8 \text{ kN} \qquad 6.4\text{-}10$$

Eclisa nu mai prezintă altă secțiune periculoasă.

Calculul cordonului de sudură (piesa 3).

Sudura este una de colț, prezentând pe o singură parte, două cordoane transversale şi două longitudinale. Solicitarea cordoanelor de sudură este cea de forfecare. Mărimile ce trebuie determinate în vederea efectuării calculului, sunt:

- grosimea cordonului de sudură,

$$a = 0{,}7 \, t_{min} = 0{,}7 \, t_e \qquad 6.4\text{-}11$$

- lungimea de calcul $\mathbf{l_c}$ a cordonului de sudură, este,

$$l_c = 2\,(l + b_e + l - 2\,a) =$$
$$= 2\,(2\,l + b_e - 1{,}4\,t_e) \qquad 6.4\text{-}12$$

În relația 6.4-12, factorul 2 din fața parantezei, se datorează faptului că există două cordoane de sudură identice, care preiau forța F: unul la partea superioară şi unul pe partea inferioară a îmbinării.

Cu relațiile 6.4-11 şi 6.4-12, se obține aria de forfecare de calcul A_c:

$$A_c = a\,l_c = 0{,}7\,t_e\,2\,(2\,l + b_e - 1{,}4\,t_e) \qquad 6.4\text{-}13$$

- Relația de calcul pentru efortul capabil, este:

$$T_{cap} = A_c\,\tau_a = 1{,}4\,t_e\,(2\,l + b_e - 1{,}4\,t_e)\,\tau_a = F_3$$

de unde,

$$F_3 = 1{,}4\,t_e\,(2\,l + b_e - 1{,}4\,t_e)\,\tau_a = 502{,}4\ \text{kN} \qquad 6.4\text{-}14$$

Nu mai există altă solicitare pentru cordonul de sudură.

Pentru a fi asigurată condiția de rezistență a îmbinării, forța capabilă este dată de valoarea cea mai mică dintre cele obținute prin calcul (vezi rel. 6.4-9, 6.4-10 şi 6.4-14):

$$F_{cap} = \min\,(F_1, F_2, F_3) = 428{,}4\ \text{kN} \qquad 6.4\text{-}15$$

După cum se poate constata, elementul cel mai periculos de la această îmbinare, este platbanda (piesa 1).

În cazul problemelor de dimensionare, se impune fie grosimea cordonului de sudură **a** în funcție de grosimea elementelor care se îmbină şi atunci se calculează lungimea acesteea, fie se impune constructiv lungimea cordonului şi se calculează grosimea acestuia.

Schimbarea tipului problemei, nu complică cu nimic calculul elementelor îmbinate prin sudură.

La elementele îmbinate prin sudură, pentru care direcția de aplicație a forței nu este o axă de simetrie a sistemului, problema constă în primul rând, în determinarea eforturilor (axiale sau tăietoare) din cordoanele de sudură. Determinarea acestor eforturi, este o problemă de statică, pe care noi am lămurit-o în alt capitol. După determinarea eforturilor din cordoanele de sudură, calculul sudurilor este identic cu cel prezentat.

6.5 Calculul îmbinării pieselor de lemn

Tensiunile normale axiale, de forfecare şi de strivire, se întâlnesc şi în cazul îmbinării pieselor de lemn.

Lemnul este un material anizotrop, care prezintă rezistențe diferite în funcție de direcția pe care o au forțele exterioare față de fibre.

În Tabelul 6.5-1, se prezintă rezistențele admisibile pentru două specii de lemn (pin şi stejar), la diferite solicitări. Rezistențele admisibile (tensiunile admisibile) ale lemnului în îmbinări, depind de specia lemnului şi de natura construcției.

Tabelul 6.5-1

Tipul solicitării		**Tensiunea admisibilă [MPa]**	
		Pin	**Stejar**
Întindere	σ_a	10	13
Compresiune paralelă cu fibrele şi strivirea capetelor	σ_{ac}	12	15
Strivire în îmbinări paralele cu fibrele	σ_{as}	8	11
Strivire normală pe fibre (pe o lungime > 100 mm)	$\sigma_{as90}{}^0$	2,4	4,8
Forfecare paralelă cu fibrele	τ_{af}	0,5...1	0,8...1,4
Forfecare în îmbinări normal pe fibre	$\tau_{a90}{}^0$	0,6	0,8
Încovoiere	σ_{ai}	12	15
Forfecare din încovoiere	τ_{ai}	2	2,8

Abaterile în plus sau în minus față de cele prezentate în Tabelul 6.5-1 cu 25...30 %, depind de calitatea lemnului, de gradul de umiditate, de condițiile de solicitare ale construcției etc.

În cazul strivirii sau forfecării sub un unghi α față de direcția fibrelor, tensiunea admisibilă are o valoare intermediară între σ_{as} şi $\sigma_{as90}{}^0$ (sau τ_{af} şi $\tau_{a90}{}^0$) şi se determină cu o relație convențională, de forma:

$$\sigma_{a,\alpha} = \frac{\sigma_{as}}{1+\left[\frac{\sigma_{as}}{\sigma_{as90^0}}-1\right]sin^3\alpha} \qquad 6.5\text{-}1$$

Când forțele de forfecare acționează într-un plan tangențial înclinat sub unghiul α față de direcția fibrelor, tensiunea admisibilă se determină cu aceeaşi relație, în care σ_{as} se înlocuieşte cu τ_a.

Exemplu. *Să se dimensioneze elementele îmbinării din lemn de pin din Fig.6.5-1. Dimensiunile celor două bare care se îmbină sunt 150 x 200 mm.*

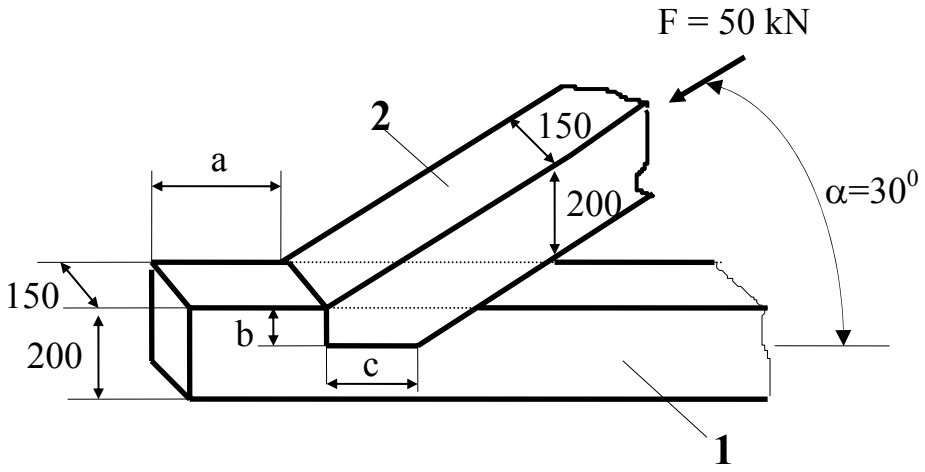


Fig.6.5-1

Rezolvare

- Există două elemente (două bare): una orizontală (notată 1) şi una înclinată (notată 2). Forța F la nivelul îmbinării dintre cele două bare, prezintă două componente:

  - una orizontală, F_1.

$$F_1 = F \cos 30^0 = 43{,}3 \text{ kN} \qquad 6.5\text{-}2$$

  - una verticală, F_2:

$$F_2 = F \sin 30^0 = 25 \text{ kN} \qquad 6.5\text{-}3$$

Calculăm acum fiecare bară.

Calculul barei orizontale (piesa 1)

a) Această bară este solicitată la forfecare de către forța F_1, secțiunea periculoasă fiind pe porțiunea de lungime **a**.

- Relația de calcul, este:

$$A_{nec,f} = \frac{T}{\tau_{af}} \Rightarrow a \cdot 150 = \frac{F_1}{\tau_{af}} \Rightarrow$$
$$a = \frac{F_1}{150 \cdot \tau_{af}} = \frac{43,3 \cdot 10^3}{150 \cdot 1} = 289 \ mm \qquad 6.5\text{-}4$$

b) Tot forța F_1, produce o strivire a secțiunii verticale a chertării barei orizontale.

- Relația de calcul, este:

$$A_{nec,s} = \frac{N}{\sigma_{as}} = \frac{F_1}{\sigma_{as}} = 150 \cdot b \Rightarrow$$
$$b = \frac{F_1}{150 \cdot \sigma_{as}} = \frac{43,3 \cdot 10^3}{150 \cdot 8} = 36 \ mm \qquad 6.5\text{-}5$$

c) Bara orizontală este supusă strivirii şi de către forța F_2, pe suprafața dreptunghiulară, de dimensiune 150 x **c.**

- Relația de calcul, este:

$$A_{nec,s} = \frac{N}{\sigma_{as90^0}} = \frac{F_2}{\sigma_{as90^0}} = 150 \cdot c \Rightarrow$$
$$c = \frac{F_2}{\sigma_{as90^0} \cdot 150} = \frac{25 \cdot 10^3}{2,4 \cdot 150} = 70 \ mm \qquad 6.5\text{-}6$$

Se poate constata că această suprafață, este mai periculoasă decât aceeaşi suprafață, dar aparținând barei înclinate, deoarece pentru bara înclinată, $\sigma_{a,\alpha} > \sigma_{as90}{}^0$.

Calculul barei înclinate (piesa 2)

d) Bara înclinată, pe suprafața verticală de contact cu bara orizontală este solicitată la strivire, de către forța F_1. Aici are loc o strivire în secțiune, sub unghiul $\alpha = 30^0$ față de direcția fibrelor. Tensiunea admisibilă în acest caz, determinată pe baza relației 6.5-1, este:

$$\sigma_{a,\alpha} = \frac{8}{1+\left[\frac{8}{2,4}-1\right] sin\, 30^0} = 6,3\ \ MPa \qquad 6.5\text{-}7$$

Suprafața de strivire, este un dreptunghi cu dimensiunile **b** şi 150 mm.

- Relația de calcul este:

$$A_{nec,s} = \frac{N}{\sigma_{a,\alpha}} = \frac{F_1}{\sigma_{a,\alpha}} = 150 \cdot b \Rightarrow$$

$$b = \frac{F_1}{150 \cdot \sigma_{a,\alpha}} = \frac{43,3 \cdot 10^3}{150 \cdot 6,3} = 46\ \ mm \qquad 6.5\text{-}8$$

Se constată că dimensiunea **b**, rezultă din condiția de rezistență la strivire a barei înclinate, unde s-a obținut, b = 46 mm.

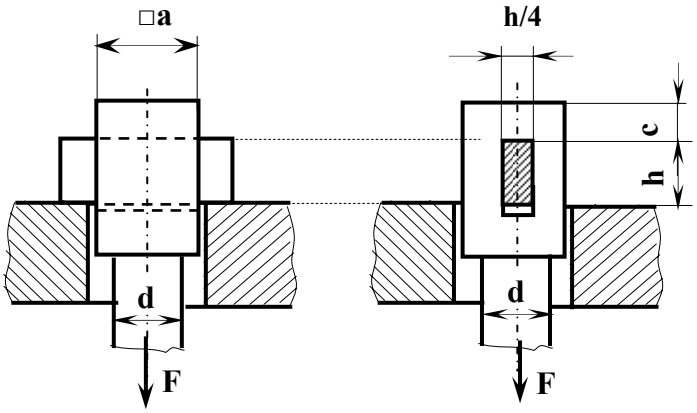
Pentru îmbinarea din Fig.6.5-1, au rezultat dimensiunile:

a = 289 mm
b = 46 mm 6.5-9
c = 70 mm.

6E. Calculul îmbinărilor de piese (Probleme propuse)

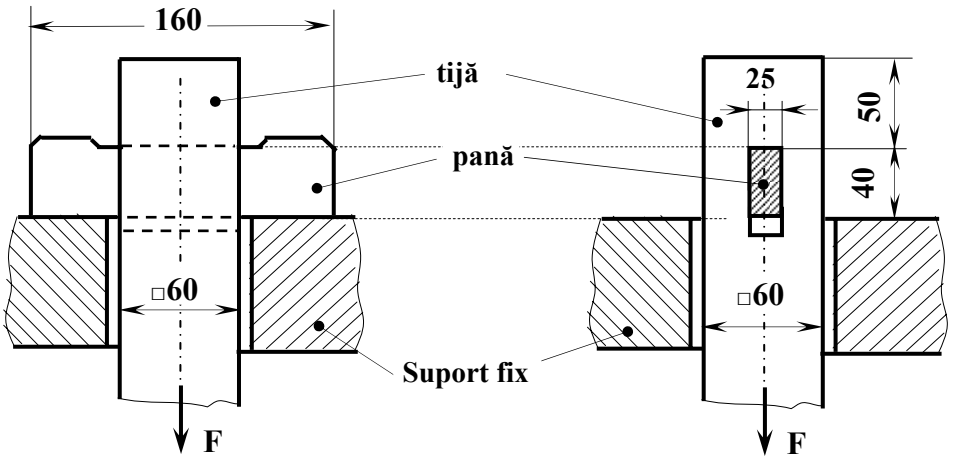
6E.1

Îmbinarea din figură trebuie să reziste solicitărilor produse de o forță F = 120 kN. Să se dimensioneze elementele înbinării, (tijă, pană, suport), dacă ele sunt confecționate din oțel, cu următoarele rezistențe admisibile: σ_{at} = 140 MPa, σ_{as}= 280 MPa, τ_{af} = 90 MPa. Se cer deci: d_{nec}, a_{nec}, h_{nec} şi $c_{nec.}$ Corpul tijei este cicular, (cu diametrul d), iar capul tijei este cu secțiune patrată.



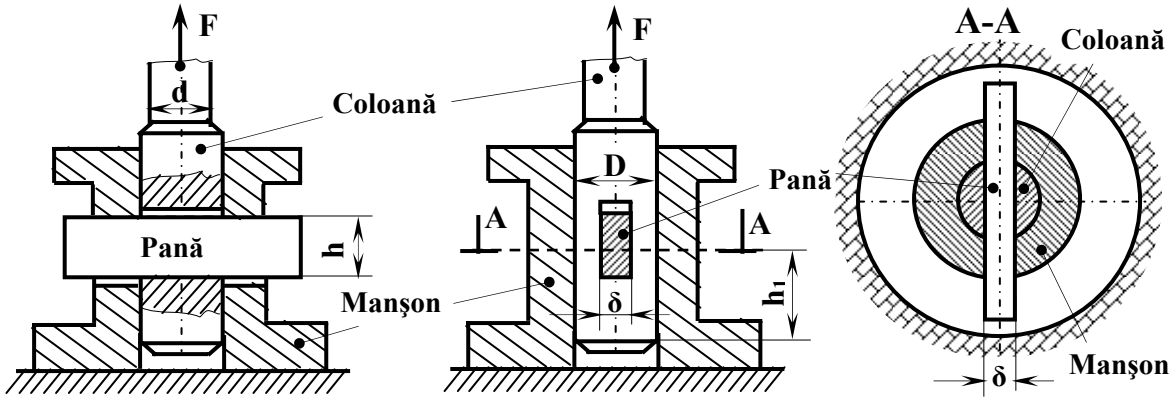
6E.2

Îmbinarea din figură trebuie să reziste solicitărilor produse de o forță F = 80 kN. Să se verifice elementele înbinării, (tijă, pană, suport), confecționate din Ol 37-STAS 500-72, care are următoarele rezistențe admisibile: σ_{at} = 140 MPa, σ_{as}= 280 MPa, τ_{af} = 90 MPa.



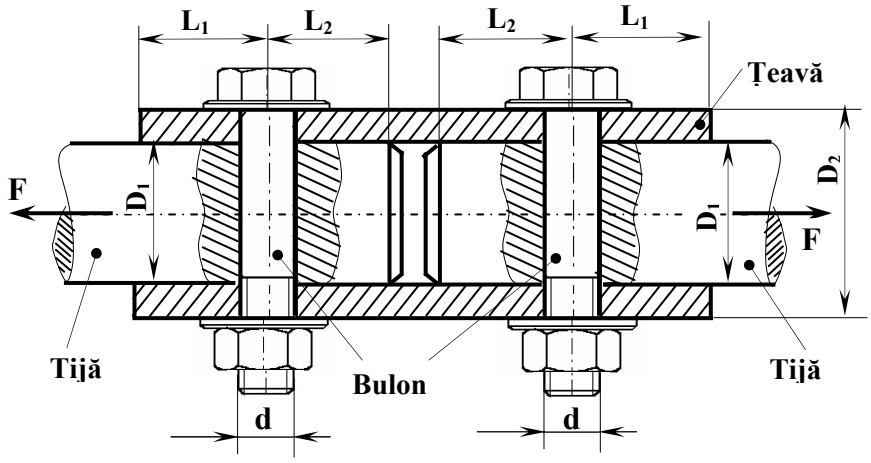
6E.3

Îmbinarea coloanelor unei freze cu placa de bază se realizează prin intermediul unei pene şi a unui manşon ca în figură. Să se determine dimensiunile necesare pentru elementele înbinării, (d, D, h, h_1, δ), dacă forța care acționează pe o coloană, (tijă), este F= 300 kN. Rezistențele admisibile sunt: σ_{at} = 60 MPa, σ_{as}= 120 MPa, τ_{af} = 40 MPa, pentru coloană, şi σ_{at} = 60 MPa, σ_{as}= 120 MPa, τ_{af} = 60 MPa, pentru pană. Grosimea penei se acceptă ca fiind δ=D/4.



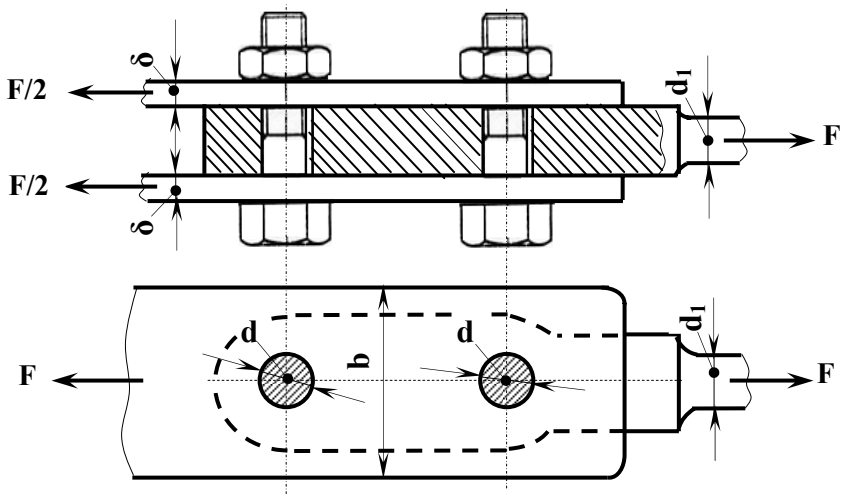
6E.4

Îmbinarea din figură trebuie să reziste solicitărilor produse de o forță F = 50 kN. Să se dimensioneze elementele înbinării, (bulon, tijă, țeavă cu D_2/D_1 =1,5), confecționate din Ol 37-STAS 500-72, care are următoarele rezistențe admisibile: σ_{at} = 140 MPa, σ_{as}= 280 MPa, τ_{af} = 90 MPa. Se cer: d_{nec}, $D_{1,nec}$, $D_{2,nec}$,$L_{1,nec}$, $L_{2,nec.}$



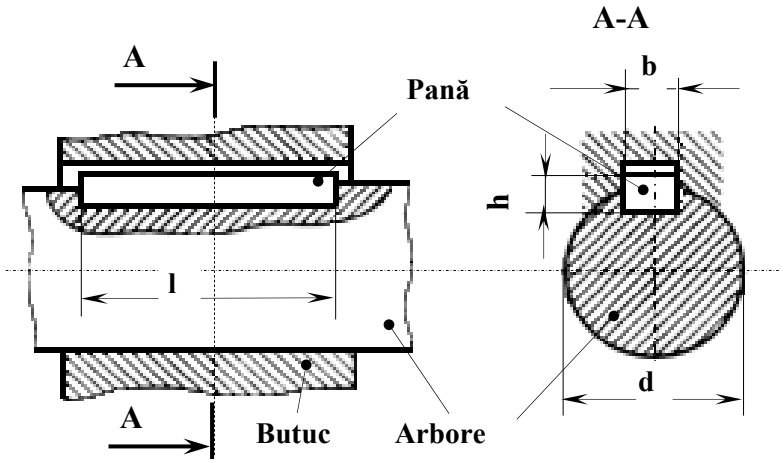
6E.5

Îmbinarea din figură este solicitată de forțele F=460 kN. Să se calculeze dimensiunile: d, d_1, b şi δ,dacă toate elementele îmbinării sunt confecționate din oțel, cu următoarele rezistențe admisibile: la întindere:σ_{at} = 140 MPa; la strivire: σ_{as}= 280 MPa; la forfecare: τ_{af} = 90 MPa.



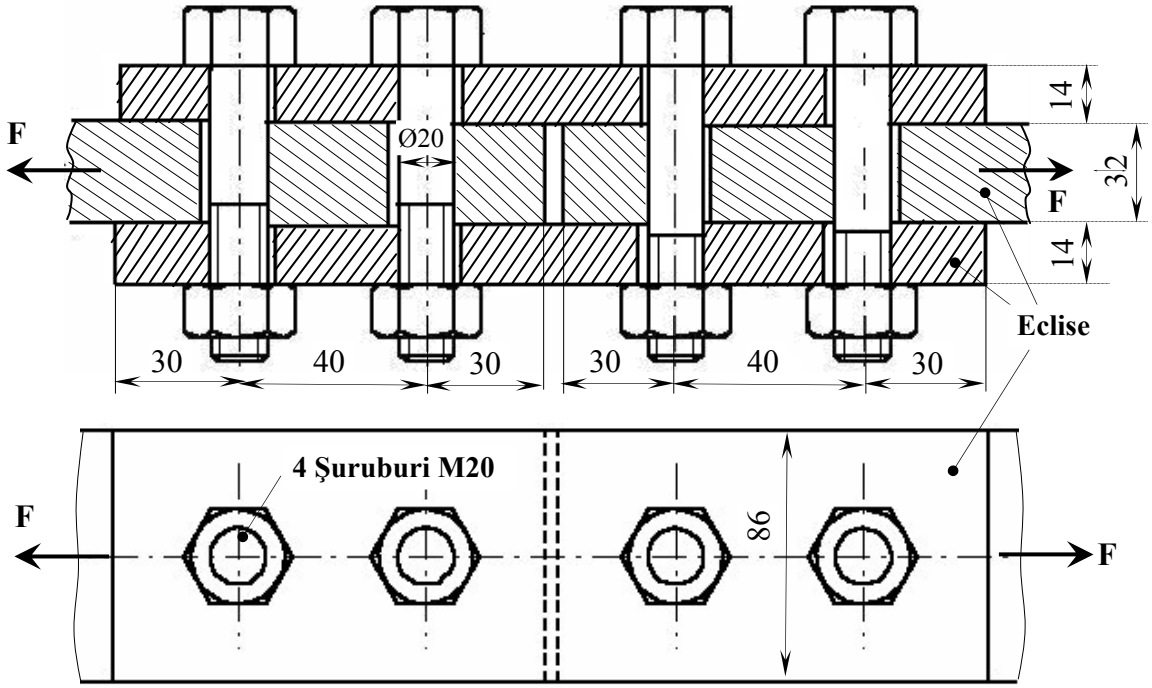
6E.6

Arborele cu diametrul d=60 mm trebuie să transmită un moment de torsiune M_t=2 kNm. Pentru diametrul dat STAS-ul impune b=18 şi h=11mm. Cunoscând rezistențele admisibile: la strivire: σ_{as}= 220 MPa şi la forfecare: τ_{af} = 90 MPa, se cere să se determine lungimea necesară a penei şi să se verifice pana la forfecare.

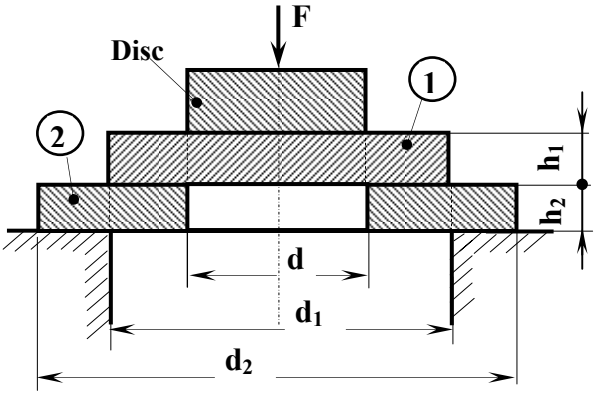


6E.7

Îmbinarea cu eclise din figură este solicitată la întidere de forţele F. Orificiile de trecere pentru cele 4 şuruburi au diametrele ø21 mm. Să se determine valoarea maximă a forţei pe care o suportă elementele îmbinării, confecţionate din oţel, cu următoarele rezistenţe admisibile: la întindere: σ_{at} = 140 MPa; la strivire: σ_{as}= 280 MPa; la forfecare: τ_{af} = 90 MPa.



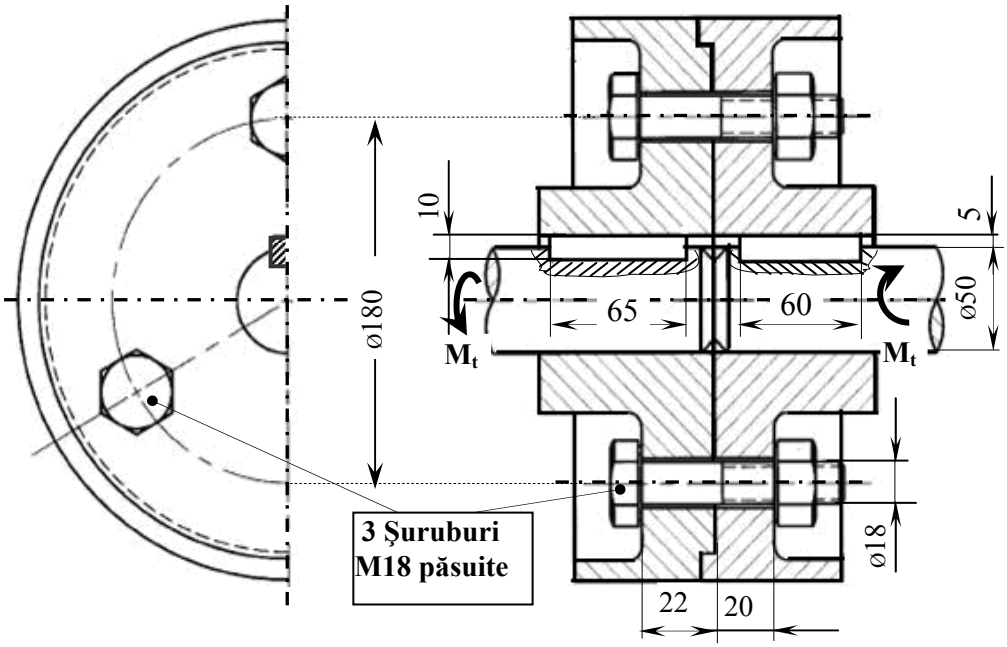
6E.8



Piesele (1) şi (2), din fontă, de formă cilindrică, sunt solicitate de o forţă F=200 kN. Forţa se aplică printr-un disc masiv. Să se determine diametrele d,d_1 şi d_2, şi grosimile h_1 şi h_2, astfel încât să nu se depăşească rezistenţa la forfecare: τ_{af}=80 MPa şi presiunea maxim admisă la strivire: σ_{as}=160 MPa. Piesa (2) este susţinută de un suport fix.

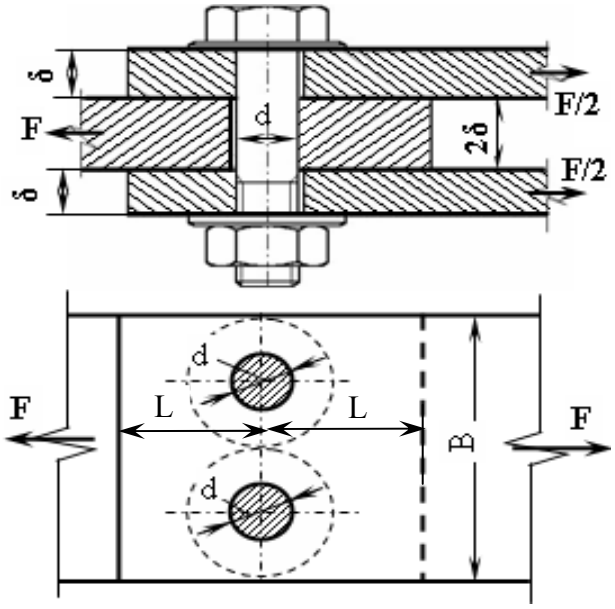
6E.9

Cuplajul din figură, cu trei şuruburi păsuite, transmite un moment de torsiune M_t=2 kNm. Cunoscând dimensiunile indicate pe desen în mm, precum şi lăţimea penelor paralele, cu care sunt fixate semicuplele, b=16 mm, se cere verificarea ansamblului. Se dau rezistenţele admisibile: la strivire: σ_{as}= 280 MPa şi la forfecare: τ_{af} = 90 MPa. Obs.:dimensiunile semicuplelor nu sunt egale.



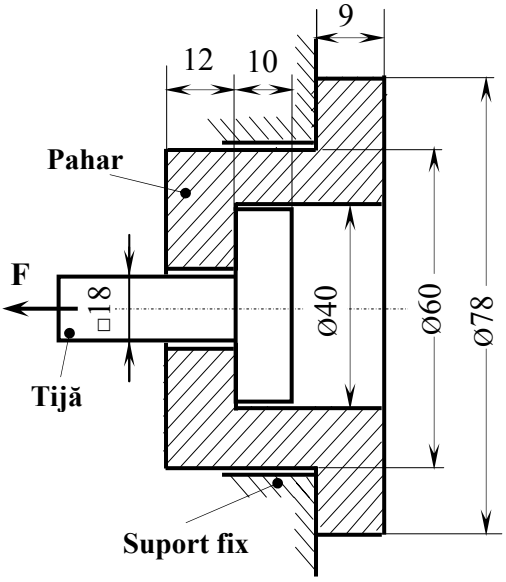
6E.10

Îmbinarea cu eclise din figură este solicitată la întidere de forţele F=120 kN. Să se determine dimensiunile necesare pentru elementele îmbinării, (d, δ, B, L), confecţionate din oţel, cu următoarele rezistenţe admisibile: la întindere:σ_{at} = 160 MPa; la strivire: σ_{as}= 280 MPa; la forfecare: τ_{af} = 120 MPa.



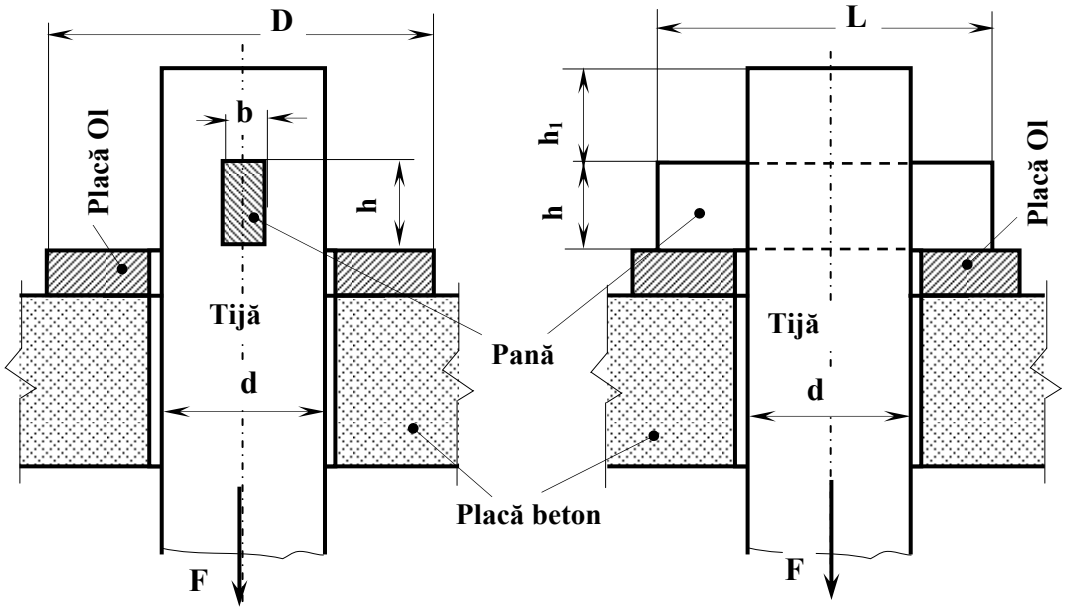
6E.11

Să se verifice elementele înbinării din figură, ştiind că acestea sunt realizate din acelaşi material pentru care se cunosc rezistenţele admisibile: la întindere, (σ_{at}=160 MPa), la forfecare, (τ_{af}=120 MPa), şi la strivire, (σ_{as}=240 MPa). Forţa care solicită înbinarea este F=42 kN. Cotele trecute pe schiţă sunt în milimetri.



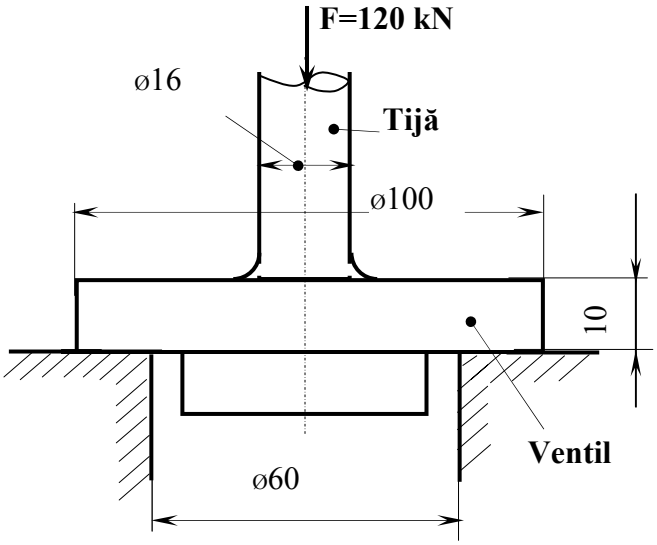
6E.12

O tijă din Ol 37, de secţiune circulară, este solicitată la întindere de forţa F=110 kN. Tija este fixată la partea superioară prin intermediul unei pene cu secţiune dreptunghiulară: b×h. Pana se sprijină pe o placă circulară din oţel, iar aceasta pe un support masiv din beton. Se acceptă b=0,3·d. Se cere să se calculeze dimensiunile: d, b, h, h_1, L şi D. Se cunosc rezistenţele admisibile: pentru Ol: σ_{at} = 150, σ_{as}= 300, τ_{af} =0,6×σ_{at} =90 MPa; pentru beton: σ_{as}= 8 MPa.



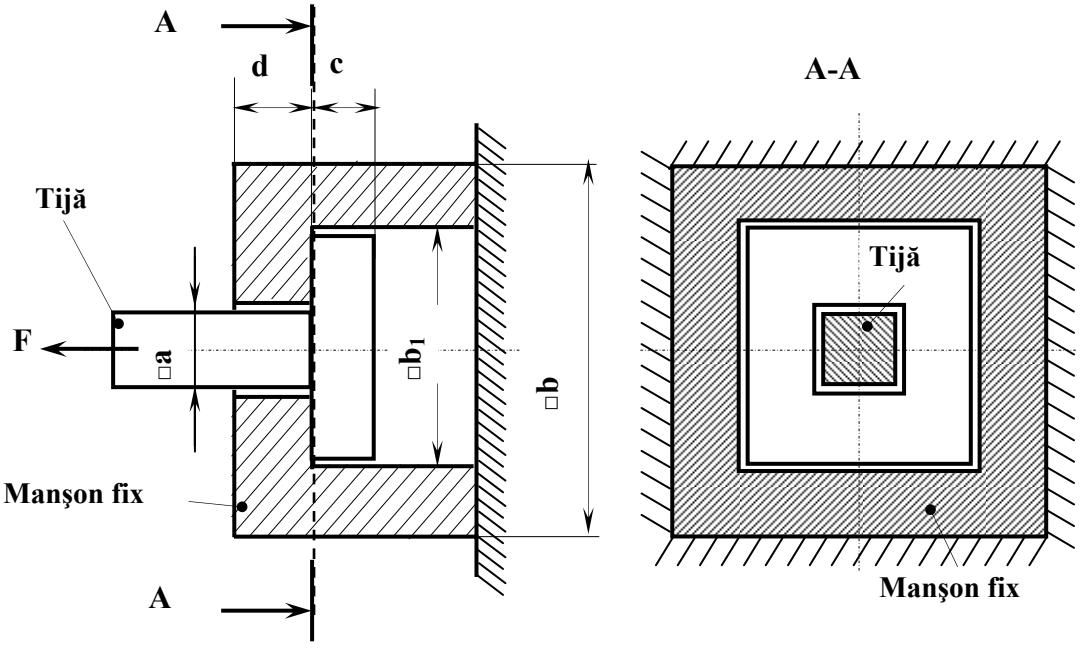
6E.13

Ventilul unei supape are forma şi dimensiunile din figură. Să se verifice supapa dacă tensiunile admisibile sunt: pentru compresiune: σ_{ac} = 160 MPa; pentru strivire: σ_{as}= 320 MPa şi pentru forfecare: τ_{af} = 100 MPa. Se consideră că tija supapei nu poate flamba fiind ghidată pe aproape întreaga ei lungime.



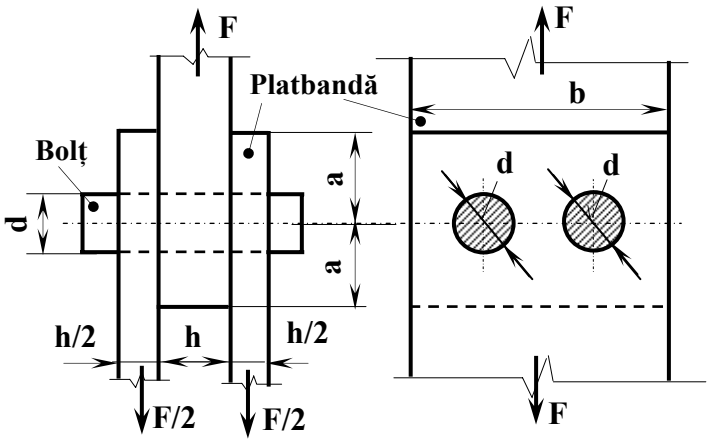
6E.14

Pentru îmbinarea din figură, compusă dintr-o tijă şi un manşon confecţionate din oţel, se cere să se facă dimensionarea elementelor înbinării, (a_{nec}, c_{nec}, d_{nec}, $b_{1,nec}$, b_{nec}=?), dacă se cunosc rezistenţele admisibile: la întindere, (σ_{at}=120 MPa), la forfecare, (τ_{af}=40 MPa), şi la strivire,(σ_{as}=240 MPa). Mărimea forţei este F=80 kN.



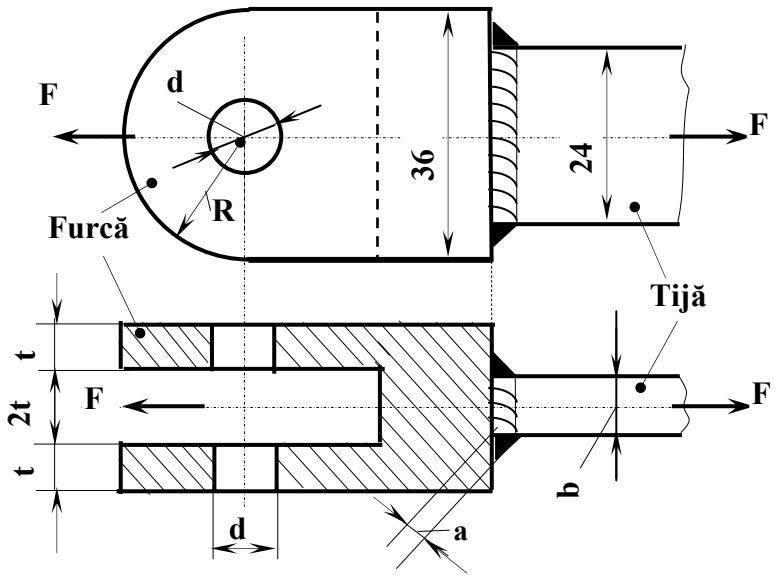
6E.15

Îmbinarea a trei platbenzi este realizată cu două bolțuri cu diametrul d. Dacă se cunoaşte mărimea forței, F=100 kN, şi rezistențele admisibile: la întindere, (σ_{at}=120 MPa), la forfecare, (τ_{af}=80 MPa), şi la strivire, (σ_{as}=240 MPa), se cere să se facă dimensionarea elementelor înbinării, (d_{nec}, h_{nec}, l_{nec}, b_{nec}=?).



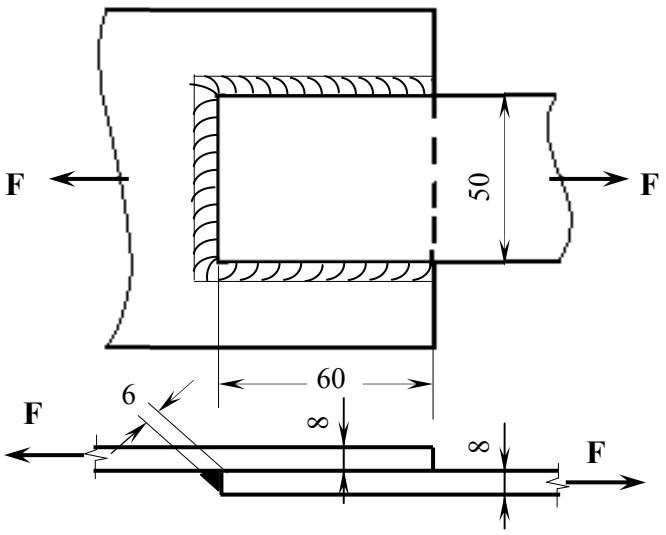
6E.16

Ansamblul din figură, realizat dintr-o furcă sudată de o tijă, transmite o forță F=18 kN. Dimensiunile secțiunii tijei sunt: h=24 mm şi b=8 mm. Grosimea cordonului de sudură este: a=5 mm. Dacă materialul pieselor are rezistențe admisibile: σ_{at} = 160 MPa, σ_{as}= 320 MPa, τ_{af} = 120 MPa, iar dimensiunile cotate sunt: t=6, d=9, R=18 mm, se cere verificarea îmbinării.



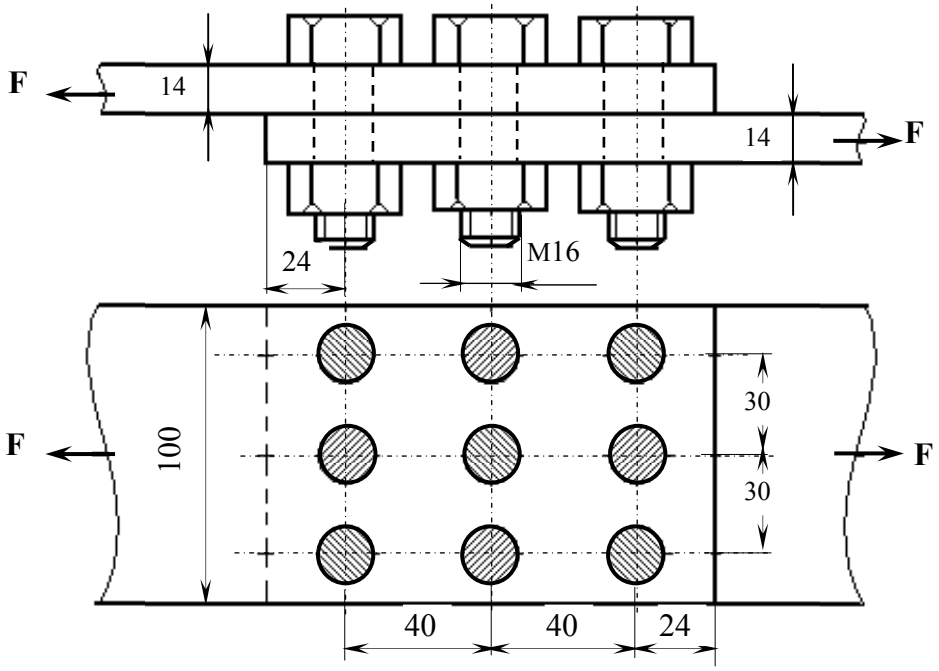
6E.17

Se dă asamblarea a două platbenzi sudate ca în figură. Să se determine valoarea maximă a forței F, dacă rezistențele admisibile ale platbenzilor sunt: la întindere: σ_{at}=120 MPa; la forfecare: τ_{af}=80 MPa, iar pentru cordonul de sudură, cu grosimea 6 mm, rezistența admisibilă la forfecare este 0,7 din cea a platbenzilor, ($\tau_{af,s}$=56 MPa).



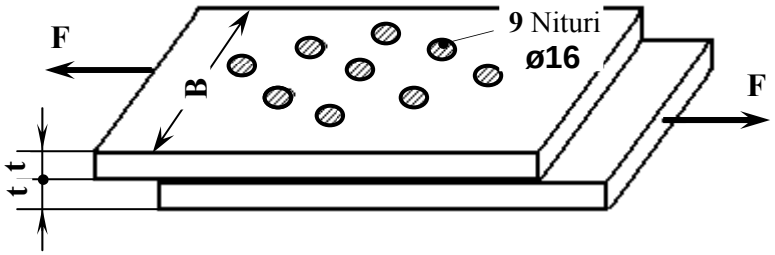
6E.18

Să se verifice asamblarea cu 9 şuruburi M16, care suportă forța F=80 kN, dacă se cunosc rezistențe admisibile: la întindere: σ_{at} = 140 MPa; la strivire: σ_{as}= 280 MPa; la forfecare: τ_{af} = 90 MPa. Să se precizeze apoi numărul de şuruburi suficient pentru preluarea forței F.



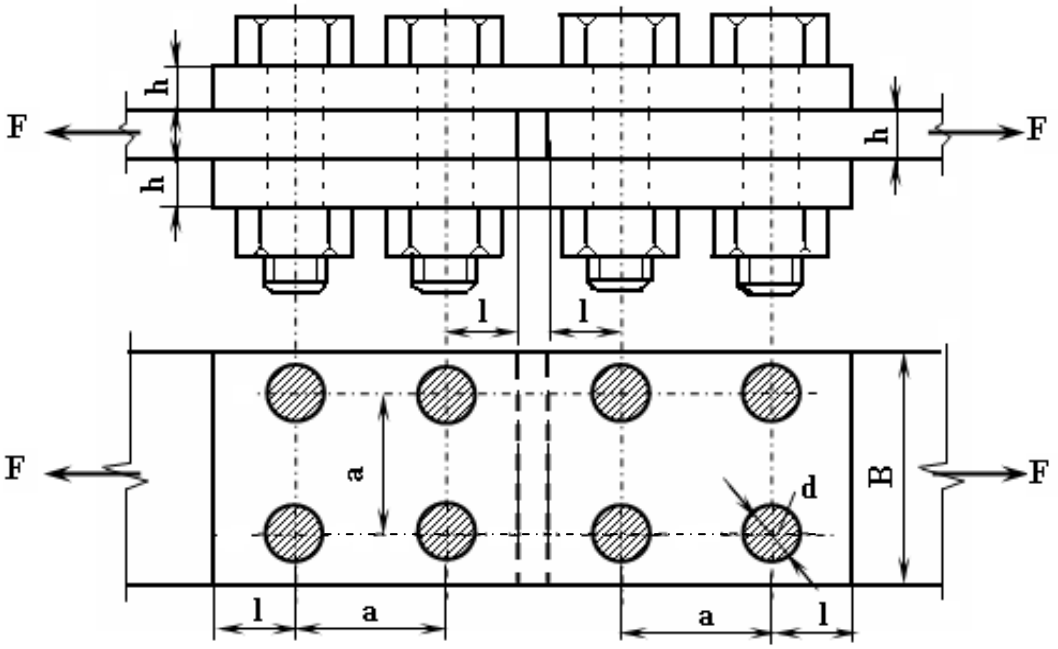
6E.19

Două platbenzi sunt asamblate prin 9 nituri ø16 şi solicitate de o forță F. Cunoscînd rezistențele admisibile: - pentru nituri: la strivire: σ_{as}= 180 MPa şi la forfecare: τ_{af} = 110 MPa; -pentru platbenzi: la tracțiune: σ_{at} = 140 MPa, la strivire: σ_{as}= 170 MPa şi la forfecare τ_{af} = 90 MPa, se cere determinarea forței maxim admise. Se dau: B=150 mm şi t=14 mm.



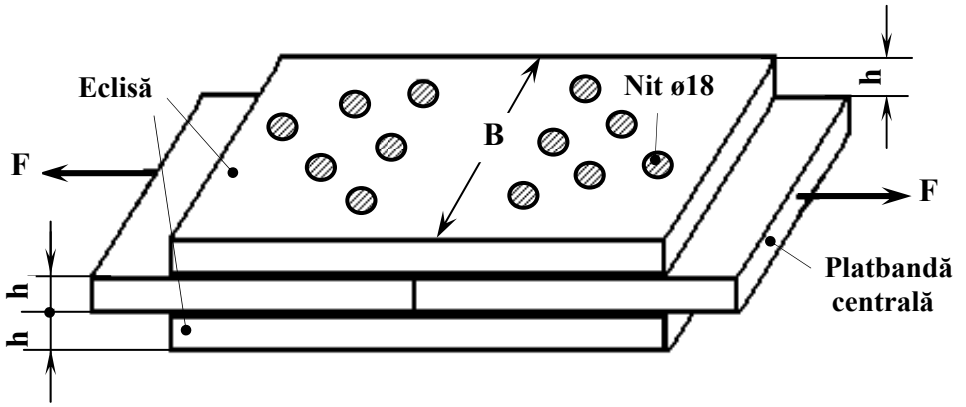
6E.20

Să se determine sarcina capabilă să încarce asamblarea cu 8 şuruburi M20, dacă rezistențele admisibile pentru toate elementele îmbinării sunt: la întindere: σ_{at} = 160 MPa; la strivire: σ_{as}= 300 MPa; la forfecare: τ_{af} = 110 MPa. Dimensiunile indicate au valorile: h=16, d=l=20, a=30 şi B=160 mm. Obs.: în zonele de forfecare tijele şuruburilor nu sunt filetate.



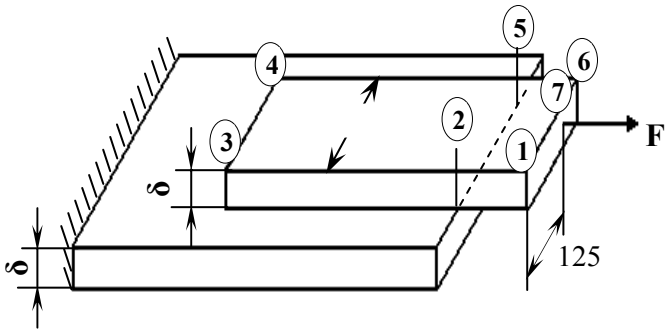
6E.21

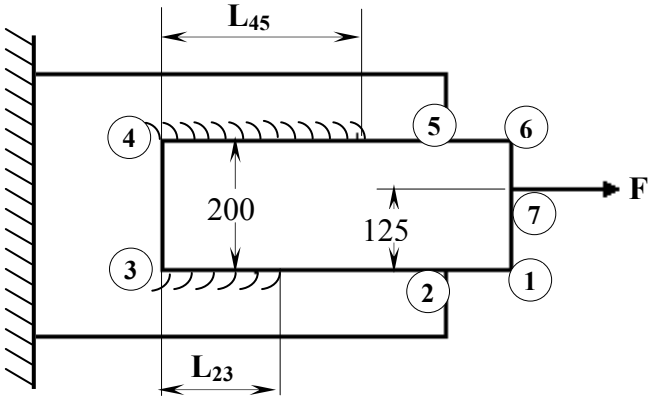
Două platbenzi, cu grosimea h=20 şi lăţimea B=170 mm, sunt asamblate prin nituire cu două eclise de aceleaşi dimensiuni. Se utilizează 12 nituri ø18. Îmbinarea este solicitată de o forţă F= 230 kN. Cunoscînd rezistenţele admisibile, aceleaşi pentru toate elementele îmbinării: la tracţiune: σ_{at} = 140 MPa; la strivire: σ_{as}= 180 MPa şi la forfecare: τ_{af} = 90 MPa, se cere verificarea asamblării.



6E.22

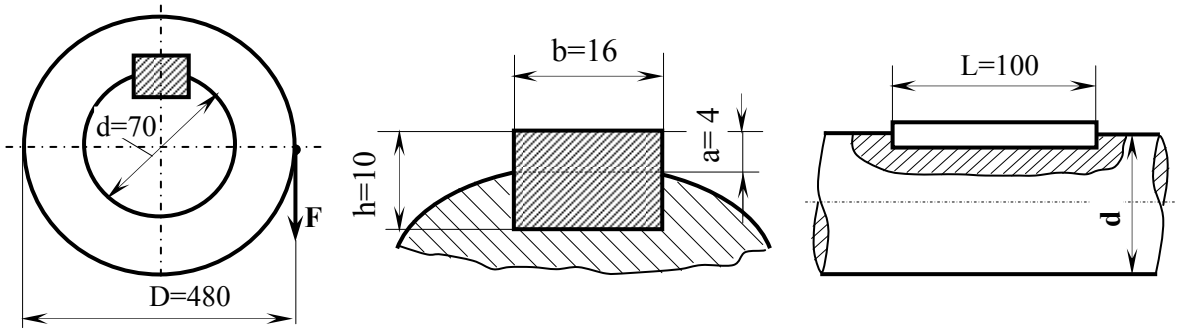
O platbandă, cu lăţimea B=200 mm şi grosimea δ=8 mm, este sudată de o tablă cu aceeaşi grosime. Grosimea cordonului realizat este a=6 mm. Forţa F=160 kN este aplicată excentric la 125 mm de latura (1-3). Se dau: - pentru sudură: $\sigma_{at,s}$ = 140 MPa şi $\tau_{af,s}$ = 90 MPa; - pentru materialul de bază: σ_{at}= 160 MPa şi τ_{af} = 80 MPa. Se cer: a) lungimile cordoanelor de sudură pe cele două laturi: L_{23} şi L_{45}; b) lungimea cordonului suplimentar pentru ca rezistenţele sudurii şi materialului de bază să fie egale. Tablele se suprapun pe o lungime de 300 mm.





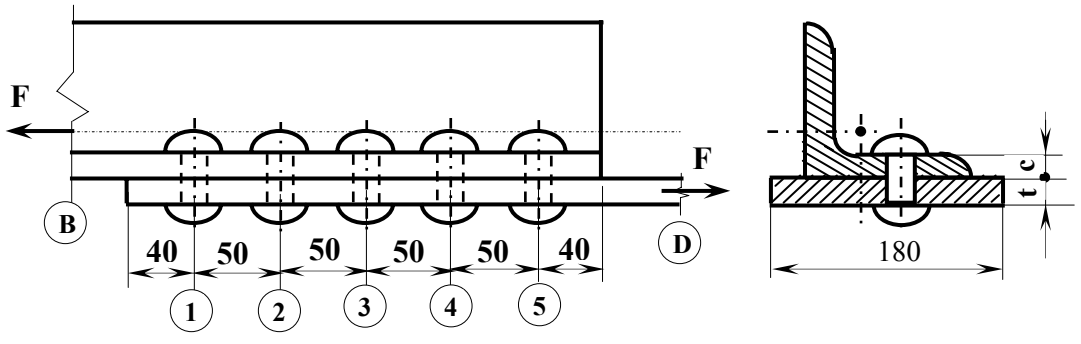
6E.23

Să se verifice pana paralelă care fixează pe arboreal de diametru d=70 mm o roată cu diametrul D=480 mm. La periferia roții lucrează forța tangențială F=10 kN. Pana utilizată este conform STAS 1006-70, are dimensiunile: b=16; h=10 şi L=100 mm, şi este confecționată din oțel Ol 50. Rezistențele admisibile sunt: la forfecare: τ_{af}=80 MPa şi la strivire: σ_{as}=240 MPa.



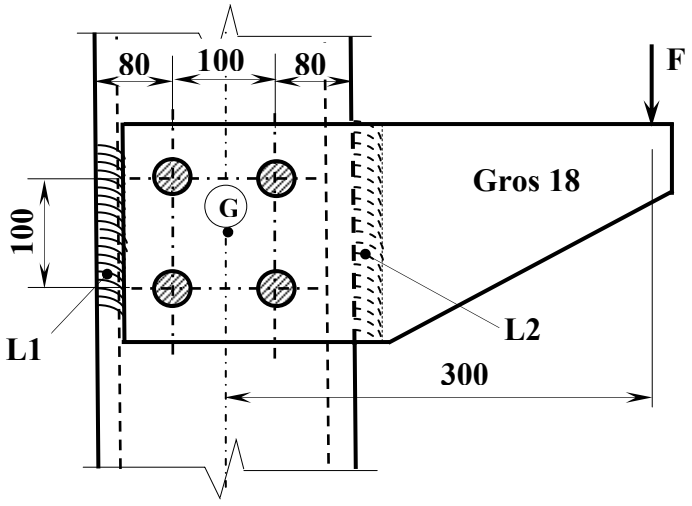
6E.24

Să se dimensioneze îmbinarea dintre un profil cornier 120×120×13 şi o platbandă 180×14, ambele confecționate din Ol 37, şi să se stanilească eforturile transmise de la cornier la platdandă pe fiecare troson între secțiunile (1) şi (D). Dimensiunile indicate pe desen sunt în mm. Se dau: t=14 mm, c=13 mm, σ_{at} = 140 MPa, τ_{af} = 112 MPa, σ_{as}= 280 MPa, aria cornierului: A_1=2970 mm^2. Pe baza recomandărilor din literature de specialitate pentru grosimea minimă a elementelor nituite se adoptă d_{nit}=d=23 mm, (pentru grosimea minimă h=13 mm).



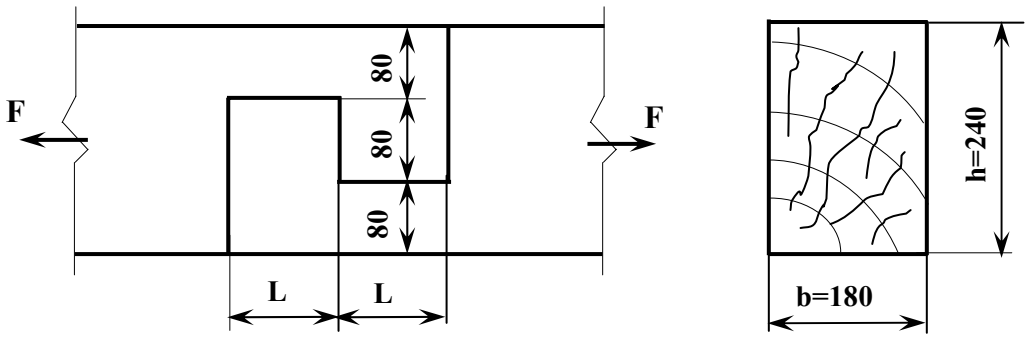
6E.25

Să se calculeze forța maximă pe care o poate suporta o consolă din tablă de 18 mm grosime, solidarizată de un profil U26, în două variante: a) consola este nituită cu 4 nituri ø18 mm, (grosimea profilului este de 10 mm); b) consola este sudată cu două cordoane cu grosime a=7 mm de lungimi: L1=134 mm şi L2=174 mm. Se cunosc rezistențele admisibile: pentru nituri şi materialul de bază: la forfecare: τ_{af} = 112 MPa, la strivire: σ_{as}= 280 MPa; pentru sudură: la forfecare: τ_{af}= 91 MPa.



6E.26

Două grinzi din lemn sunt îmbinate ca in figură. Să se calculeze lungimea L necesară şi să se verifice apoi la strivire. Se dau rezistențele admisibile: la întindere: σ_{at} = 10 MPa; la strivire: σ_{as}= 20 MPa; la forfecare, în lungul fibrelor: τ_{af} = 4 MPa.



6R. Calculul îmbinărilor de piese (Răspunsuri)

6R.1

Aria pentru tracțiune corp tijă este: $A=\pi d^2/4 \rightarrow d_{nec}= 33$ mm; Aria pentru forfecare pană: $A=2\cdot h\cdot h/4 \rightarrow h_{nec}=51,6\approx 52$ mm; Aria pentru strivire pană: $A=a\cdot h/4 \rightarrow a_{nec,s}=32,97\approx 33$ mm; Aria pentru tracțiune cap tijă: $A=a(a-h/4) \rightarrow a_{nec,t}=36,5\approx 37$ mm; Se adoptă a=37 mm; Aria de forfecare cap tijă: $A=2\cdot c\cdot a \rightarrow c_{nec}=18,1\approx 19$ mm.

6R.2

Aria pentru tracțiune corp tijă este: $A=60\cdot(60-25)=2100$ mm$^2 \rightarrow \sigma_{ef,t} = 38,09 < \sigma_{at} = 140$ MPa; Aria pentru forfecare pană: $A=2\cdot 40\cdot 25=2000$ mm$^2 \rightarrow \tau_{ef,f}=40 < \tau_{af}=90$ MPa; Aria pentru strivire pană: $A=25\cdot 60=1500$ mm$^2 \rightarrow \sigma_{ef,s}=53,33 < \sigma_{as}=280$ MPa; Aria de forfecare cap tijă: $A=2\cdot 50\cdot 60=6000$ mm$^2 \rightarrow \tau_{ef,f}=13,33 < \tau_{af}=90$ MPa.

6R.3

Aria pentru tracțiune corp coloană este: $A_1=\pi d^2/4 \rightarrow d_{nec}= 79,8\approx 80$ mm; Aria pentru tracțiune cap tijă: $A_2= \pi D^2/4-D\cdot\delta$; Aria pentru strivire pană: $A_3= D\cdot\delta \rightarrow D\cdot\delta_{nec}=2500$ mm$^2 \rightarrow D_{nec}=97,72\approx 100$ mm$\rightarrow \delta_{nec}= 25$ mm; Aria pentru forfecare pană: $A_4=2\cdot h\cdot\delta \rightarrow h_{nec}=100$ mm; Aria de forfecare cap coloană: $A_5=2\cdot D\cdot h_1 \rightarrow h_{1,nec}=37,5\approx 38$ mm.

6R.4

Aria de forfecare a unui bulon este: $A_1=2\cdot \pi d^2/4 \rightarrow d_{nec}=18,8 \approx 20$ mm; Aria pentru tracțiune corp tijă este: $A_2=\pi D^2_1/4- d\cdot D_1 \rightarrow D_{1,nec}= 39,05$ mm; Aria pentru strivire tijă-bulon: $A_3=d\cdot D_1 \rightarrow D_{1,nec}=40$ mm; $\rightarrow D_{1,ef}=40$ mm; Aria de forfecare cap tijă: $A_4=2\cdot L_2\cdot D_1 \rightarrow L_{2,nec}=6,944\approx 7$ mm. Aria pentru tracțiune țeavă: $A_5= \pi D^2_2/4- \pi D^2_1/4- d(D_2-D_1) \rightarrow D_{2,nec,t}=69,6$; Aria pentru strivire țeavă-bulon: $A_6=d\cdot(D_2-D_1) \rightarrow D_{2,nec}=44,46$ mm; $\rightarrow$ Se adoptă $D_{2,ef}=70$ mm; Aria de forfecare teavă: $A_7=2\cdot(D_2-D_1)\cdot L_1 \rightarrow L_{1,nec}=9,26\approx 10$ mm.

6R.5

Aria pentru tracțiune corp tijă este: $A_1=\pi d^2_1/4 \rightarrow d_{1nec}= 61,8\approx 62$ mm; Aria pentru forfecare şuruburi: $A_2=4\cdot\pi d^2/4 \rightarrow d_{nec}=38,54\approx 40$ mm; Aria pentru strivire şuruburi-eclise laterale: $A_3=4\cdot d\cdot\delta \rightarrow \delta_{nec,s}=21,875\approx 22$ mm; Aria pentru tracțiune eclise: $A_4= \delta\ (b-d) \rightarrow b_{nec,t}=176,36\approx 180$ mm.

6R.6

Forța care solicită pana este: $F=2M_t/d=133,33$ kN; Aria de strivire între pană şi arbore este: $A_s=5\times l \rightarrow l_{nec}=121,2\approx 122$ mm; Aria de forfecare pană este: $A_f=l\times b \rightarrow \tau_f = 60,72 < \tau_{af} = 90$ MPa.

6R.7

Aria pentru forfecare şuruburi: $A_1=2\cdot 2\cdot\pi 20^2/4=1256,64\ mm^2 \rightarrow F_{1cap}=113,098$ kN; Aria pentru strivire şuruburi-eclise laterale: $A_2=4\cdot 20\cdot 14=1120\ mm^2 \rightarrow F_{2cap}=313,6$ kN; Aria pentru tracțiune eclisă laterală: $A_3=14\cdot(86-21)=910\ mm^2 \rightarrow F_{3cap}=127,4$ kN; Aria pentru forfecare eclisă laterală: $A_4=2\cdot 2\cdot 70\cdot 14=3920\ mm^2 \rightarrow F_{4cap}=352,8$ kN; $F_{cap}=\min(F_{1cap},F_{2cap},F_{3cap},F_{4cap})=113$ kN

6R.8

Aria pentru strivire disc-piesa (1) este: $A_1=\pi d^2/4 \rightarrow d_{nec}= 39,89\approx 40$ mm; Aria pentru forfecare piesă (1): $A_2= \pi d\cdot h_1 \rightarrow h_{1,nec}= 20$ mm; Aria pentru strivire între pisele (1) şi (2): $A_3= \pi(d_1)^2/4 - \pi d^2/4 \rightarrow d_{1,nec}=56$ mm; Aria pentru forfecare piesă (2): $A_4= \pi d_2\cdot h_2 \rightarrow h_{2,nec}= 14$ mm; Aria de strivire piesă (2)- support fix: $A_5= \pi(d_2)^2/4 - \pi(d_1)^2/4 \rightarrow d_{2,nec}=69$ mm.

6R.9

Forțele care solicită şuruburile şi respectiv pana sunt: $F_s=M_t/(3\cdot 90)=7407,407$ N şi $F_p= M_t/25= 80$ kN. Fiecare şurub este solicitat, de F_s, la: - forfecare,după aria $A_f= \pi\cdot 18^2/4=254,47\ mm^2 \rightarrow \tau_{ef,f}=29,11 < \tau_{af}=90$ MPa; -la strivire cu semicupla din dreapta, pe aria

$A_s=18\cdot20=360$ mm$^2\rightarrow$ $\sigma_{ef,s}=20,58<\sigma_{as}=280$ MPa. Cea mai solicitată pană este cea din dreapta. Aria pentru forfecare pană: $A_f=16\cdot60=960$ mm$^2\rightarrow$ $\tau_{ef,f}=83,3(3)<\tau_{af}=90$ MPa; aria pentru strivire pană: $A_s=5\cdot60=300$ mm$^2\rightarrow\sigma_{ef,s}=266,6(6)<\sigma_{as}=280$ MPa.

6R.10

Aria de forfecare a şuruburilor este: $A_1=2\cdot2\cdot\pi d^2/4\rightarrow d_{nec}=17,84\approx18$ mm; Aria pentru strivire şuruburi eclisă centrală: $A_2=2d\cdot\delta\rightarrow\delta_{nec}=11,9\rightarrow\delta_{ef}=12$ mm; Aria pentru tracţiune eclisă centrală este: $A_3=2\delta(B-2d)\rightarrow B_{nec}=98,5\rightarrow B_{ef}=100$ mm; Aria de forfecare eclisă centrală: $A_4=4\cdot L\cdot\delta\rightarrow L_{nec}=20,83\approx21$ mm.

6R.11

Elementele îmbinării suportă următoarele solicitări: Tija: -tracţiune corp tijă: $A_1=18^2=324$ mm$^2\rightarrow\sigma_{ef,1}=129,63<\sigma_{at}=160$ MPa; -forfecare cap tijă: $A_2=4\cdot18\cdot10=720$ mm$^2\rightarrow\tau_{ef,2}=58,33<\tau_{af}=120$ MPa; -strivire cap tijă-pahar: $A_3=\pi\cdot40^2/4-18^2=932,64$ mm$^2\rightarrow\sigma_{ef,3}=45,03<\sigma_{as}=280$ MPa; Paharul: -forfecare: $A_4=\pi\cdot40\cdot12=1508$ mm$^2\rightarrow\tau_{ef,4}=27,85<\tau_{af}=120$ MPa; -tracţiune: $A_5=\pi\cdot60^2/4-\pi\cdot40^2/4=1570,8$ mm$^2\rightarrow\sigma_{ef,5}=26,74<\sigma_{at}=160$ MPa; -forfecare: $A_6=\pi\cdot60\cdot9=1696,46$ mm$^2\rightarrow\tau_{ef,6}=24,76<\tau_{af}=120$ MPa; -strivire: $A_7=\pi\cdot78^2/4-\pi\cdot60^2/4=1950,93$ mm$^2\rightarrow\sigma_{ef,7}=21,53<\sigma_{as}=280$ MPa.

6R.12

Solicitările sunt: -tracţiune tijă: $A_1=\pi d^2/4-d\cdot b\rightarrow d_{nec}=38,87\approx40$ mm; -forfecare pană: $A_2=2\cdot h\cdot b\rightarrow h_{nec}=50,92\approx51$ mm; -strivire pană-tijă: $A_3=b\cdot d=480$ mm$^2\rightarrow\sigma_{ef,3}=229,17<\sigma_{as}=300$ MPa; - forfecare cap tijă: $A_4=2\cdot h_1\cdot d\rightarrow h_{1nec}=15,2(7)\approx16$ mm; -strivire pană-placă Ol: $A_5=b\cdot(L-d)\rightarrow L_{nec}=70,5(5)\approx71$ mm; - strivire placă Ol- placă beton: $A_6=\pi D^2/4-\pi d^2/4=F/\sigma_{as,beton}\rightarrow D_{nec}=138,23\approx140$ mm.

6R.13

Solicitările la care trebuie să reziste ventilul sunt: -compresiune tijă: $A_1= \pi \cdot 16^2/4=201,06$ mm$^2 \rightarrow \sigma_{ef,1}=99,47 < \sigma_{ac}=160$ MPa; -forfecare ventil: $A_2= \pi \cdot 60 \cdot 10= \pi \cdot 600$ mm$^2 \rightarrow \tau_{ef,2}=10,61 < \tau_{af}=100$ MPa; -strivire ventil: $A_3= \pi \cdot 100^2/4- \pi \cdot 60^2/4=5026,55$ mm$^2 \rightarrow \sigma_{ef,7}=4 < \sigma_{as}=320$ MPa.

6R.14

Dimensiunile rezultă din condițiile de rezistență scrise pentru solicitările: - tracțiune corp tijă: $A_1=a^2 \rightarrow a_{nec}= 25,82 \approx 26$ mm; - forfecare tijă: $A_2= 4a \cdot c \rightarrow c_{nec}= 19,23 \approx 20$ mm; - strivire între tijă şi manşon: $A_3= b_1^2 - a^2 \rightarrow b_{1,nec}=31,77 \approx 32$ mm; - forfecare manşon: $A_4= 4b_1 \cdot d \rightarrow d_{nec}= 15,625 \approx 16$ mm; - tracțiune manşon: $A_5= b^2 - b_1^2 \rightarrow b_{nec}=41,11 \approx 42$ mm.

6R.15

Dimensiunile rezultă din condițiile de rezistență scrise pentru solicitările: - forfecare bolț: $A_1=4\pi d^2/4 \rightarrow d_{nec}= 19,95 \approx 20$ mm; - strivire platbandă-bolț: $A_2=2 \cdot h \cdot d \rightarrow h_{nec}=10,42 \approx 11$ mm; -forfecare platbandă: $A_3=4h \cdot a \rightarrow a_{nec}=28,41 \approx 29$ mm; -tracțiune platbandă: $A_4=h \cdot (b-2d) \rightarrow b_{nec}=115,76 \approx 116$ mm.

6R.16

Solicitările care apar sunt: - tracțiune corp tijă: $A_1=8 \cdot 24=192$ mm$^2 \rightarrow \sigma_{ef,1}=93,75 < \sigma_{at}=160$ MPa; -forfecare sudură: $A_2=5 \cdot (2 \cdot 8+2 \cdot 24)=320$ mm$^2 \rightarrow \tau_{ef,2}=56,25 < \tau_{af}=120$ MPa; -tracțiune furcă: $A_3= 2 \cdot (2R-d) \cdot t=324$ mm$^2 \rightarrow \sigma_{ef,3}=55,55 < \sigma_{at}=160$ MPa; - forfecare furcă: $A_4 \approx 4 \cdot R \cdot t=432$ mm$^2 \rightarrow \tau_{ef,4}=41,67 < \tau_{af}=120$ MPa; - strivire furcă-bolț: $A_5= 2 \cdot d \cdot t=108$ mm$^2 \rightarrow \sigma_{ef,5}=166,66 < \sigma_{as}=320$ MPa; forfecare bolț: $A_6= 2 \cdot \pi \cdot d^2/4=127,23$ mm$^2 \rightarrow \tau_{ef,4}=141,47 > \tau_{af}=120$ MPa$\rightarrow$Bolțul cu d=9 mm nu ar rezista la forfecare.

6R.17

F_{cap}=45024 N, (rezultă din condiția de rezistență la forfecare a cordonului de sudură). Obs.: lungimea cordonului: 2×(60-2×6)+(50-2×6)=134 mm.

6R.18

Pentru platbenzi: la întindere: A_t= 728 mm^2→ σ_t= 110< σ_a=140 MPa; la forfecare: A_f= 8736 mm^2→ τ_f= 9,16< τ_{af}=90 MPa; la strivire: A_s= 2304 mm^2→ σ_s= 40< σ_{as}=280 MPa; Pentru şuruburi: la forfecare: A_f= 1810 mm^2→ τ_f= 44,21< τ_{af}=90 MPa. Numărul de şuruburi suficient este: 5.

6R.19

Pentru forfecare nituri: $F_{1,cap}$=199 kN; pentru strivire platbenzi: $F_{2,cap}$=342,72 kN; pentru tracțiune platbenzi: $F_{3,cap}$=199,92 kN; F_{cap}= min($F_{1,cap}$; $F_{2,cap}$;$F_{3,cap}$)=199 kN.

6R.20

Pentru forfecare şuruburi: $F_{1,cap}$=276,46 kN; pentru strivire platbandă centrală-şuruburi: $F_{2,cap}$=384 kN; pentru tracțiune platbandă centrală: $F_{3,cap}$=268,8 kN; pentru forfecare platbandă centrală: $F_{4,cap}$=352 kN; F_{cap}= min($F_{1,cap}$; $F_{2,cap}$;$F_{3,cap}$; $F_{4,cap}$)= 268,8 kN.

6R.21

Pentru nituri: la forfecare: A_f= 3053,63 mm^2→ τ_f= 75,32< τ_{af}=90 MPa; la strivire: A_s= 2160 mm^2→ σ_s= 106,48< σ_{as}=180 MPa. Pentru platbenzile centrale: la întindere: $A_{t,min}$= 2320 mm^2→ σ_t= 99,14< σ_a=140 MPa.

6R.22

a) Lungimea totală a cordonului este: L_{23}+ L_{45}=F/(a×$\tau_{af,s}$)= 296 mm. L_{23} se determină din condiția de echilibru static: L_{23}× a×$\tau_{af,s}$×125

-F×75=0; rezultă: L_{23}= 111mm; apoi L_{45}=296-111=185 mm. b) Lungimea suplimentară este: L_{nec}-(L_{23}+ L_{45})=178 mm. L_{nec} rezultă din: L_{nec}× a×$\tau_{af,s}$=B×δ× σ_{at}, ca fiind: 474 mm.

6R.23

Pana este solicitată de o forță F_1=F×D/d=68,57 kN. Pentru forfecare: A_f= L×b= 1600 mm^2→ τ_f= 42,85< τ_{af}=80 MPa; pentru strivire: $A_{s,min}$= L×a= 400 mm^2→ σ_s= 171,425< σ_{as}=240 MPa.

6R.24

Se determină capacitatea portantă a îmbinării F_{cap} ca fiind valoarea minimă a forței preluate de cornier sau de platbandă: F_{cap} =307,72 kN,(din condiția de rezistență la tracțiune); se determină sarcina capabilă pe un nit: $F_{1,cap}$=46,533 kN, (valoarea minimă dintre sarcinile capabile pe nit la forfecare şi strivire); Numărul de nituri: n_{nec}= F_{cap}/ $F_{1,cap}$=6,61→n_{ef}=7. Rezultă că trebuiesc încă două nituri astfel încât lungimea suprapusă creşte de la 280 mm la 380 mm. Forțele transmise la platbandă sunt: N_{B1}=0; N_{12}=43,96=F/7; N_{23}=87,92=2F/7; N_{34}=131,88= 3F/7; N_{45}=175,84=4F/7; N_{56}=219,8=5F/7; N_{67}=263,76=6F/7; N_{7D}=307,72=F.

6R.25

a) $F_{cap,nit}$=28,5 kN, (din condiția de rezistență la forfecare); Efectul lui F asupra fiecărui nit este: Q=F/4 +3/2×F=7/4×F; Egalând Q cu $F_{cap,nit}$ rezultă: F_{cap}=16,285 kN; (Q se obține astfel: F se reduce în (G) la o forță şi un moment 300F care trebuie preluate de 4 nituri);

b) Cordoanele pot prelua: T_1= 76,44 şi respectiv T_2=101,92 kN; forța care solicită cordonul de lungime L1 este: Q_1=0,68 F, (170 F/250), iar cea pentru cordonul L2 este: Q_2=F+Q_1= 1,68 F; din T_1=Q_1 rezultă $F_{1,cap}$=112,4 kN, iar din T_2=Q_2 rezultă $F_{2,cap}$=60,667 kN; F_{cap}= min($F_{1,cap}$, $F_{2,cap}$)=60,667 kN.

6R.26

F_{cap}=144 kN, din condiția de rezistență la întindere; din condiția de rezistență la forfecare, (τ_{af}·L·b= F_{cap}), rezultă: L=200 mm; Strivirea se produce pe aria: A_s=80·180=14400 mm^2 → $\sigma_{s,ef}$= 10< σ_{as}=20 MPa.

7. CALCULUL LA ÎNCOVOIERE SIMPLĂ AL BARELOR DREPTE PLANE

7.1 Consideraţii generale. Etape de calcul

Dacă într-o secţiune transversală a unui element de rezistenţă, există un singur efort şi acesta este un moment încovoietor, în secţiunea respectivă se realizează o ***solicitare de încovoiere pură***.

Dacă pe lângă momentul încovoietor există şi efort tăietor, solicitarea este de ***încovoiere simplă*** sau ***încovoiere cu forţă tăietoare***.

Calculul la încovoiere simplă al barelor drepte, se face cu acceptarea următoarelor ipoteze simplificatoare:

- Secţiunile trasversale care au fost plane înainte de deformare (solicitare), rămân plane şi în timpul solicitării.

- Fibrele longitudinale nu acţionează unele asupra altora şi ca urmare sub acţiunea tensiunii normale, suferă o întindere sau o comprimare simplă.

- Deformaţiile fibrelor nu depind de poziţia lor pe lăţimea secţiunii. Prin urmare, tensiunile, care variază pe înălţimea secţiunii, rămân aceleaşi pe lăţime.

- Grinda are cel puţin un plan de simetrie şi toate forţele exterioare se găsesc în acest plan.

- Raportul dintre dimensiunile grinzii este astfel încât aceasta se încovoaie fără să se voaleze sau să se răsucească. Se ştie că atunci când raportul dintre înălţimea secţiunii transversale (dreptunghiulare) **h** a grinzii şi deschiderea acesteia **l** este **h** / **l** <1 / 5, aceasta nu mai lucrează ca o grindă, iar modul de calcul este altul.

Tensiunea normală σ, produsă de momentul încovoietor M_{iz} (orientat după direcţia principală de inerţie Gz) într-un punct al unei secţiuni situat la distanţa y de axa neutră (care este Gz - Fig.7.1-1), se calculează cu relaţia (relaţia lui Navier):

$$\sigma = \pm \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y \qquad 7.1\text{-}1$$

unde:

I_z - momentul de inerție al secțiunii, față de axa neutră Gz.

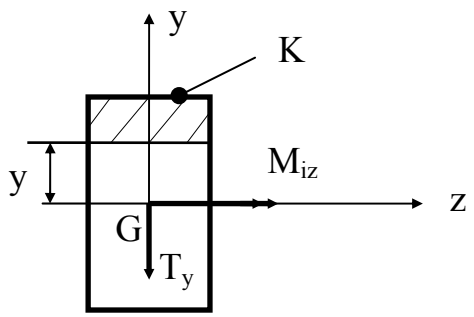


Fig.7.1-1

În relația 7.1-1, se pune semnul + (plus) pentru tensiunea normală a punctelor situate în zona întinsă şi semnul – (minus) pentru tensiunea normală a punctelor situate în zona comprimată a secțiunii.

Tensiunea tangențială τ, produsă de efortul tăietor T_y (sau mai simplu T), într-un punct al secțiunii situat la distanța y de axa neutră (Fig.7.1-1), se calculează cu relația (relația lui Jurawki):

$$\tau = \pm \frac{T \cdot S_z}{I_z \cdot b} \qquad 7.1\text{-}2$$

unde:

S_z - momentul static, calculat față de axa neutră Gz a acelei porțiuni din suprafața secțiunii, situată între cota y (care conține punctul) şi marginea secțiunii (suprafața haşurată din Fig.7.1-1),

b - lățimea secțiunii, la nivelul y la care se calculează tensiunea,

I_z - momentul de inerție al secțiunii față de axa neutră Gz.

Semnul lui τ, este funcție de semnul efortului tăietor T_y. În lungul unei secțiuni, tensiunea tangențială τ are un singur semn: plus sau minus.

Tensiunile normale σ şi cele tangențiale τ, dintr-un punct situat într-o secțiune solicitată la încovoiere simplă, dau naştere la ***tensiuni normale principale***, care se determină cu relația:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \qquad 7.1\text{-}3$$

Direcțiile principale ale tensiunilor normale principale, rezultă din relația (asemănătoare cu cea de la direcțiile principale de inerție):

$$tg2\alpha = -\frac{2\cdot\tau}{\sigma} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2} arctg\left(-\frac{2\cdot\tau}{\sigma}\right)$$
$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\Pi}{2} \qquad 7.1\text{-}4$$

Dacă analizăm relația 7.1-1, rezultă că:

- M_{iz} şi I_z sunt mărimi care depind de poziția secțiunii grinzii aleasă pentru calcul (locul de pe grindă),
- y este o mărime care depinde de poziția punctului în care se calculează tensiunea (poziția punctului în secțiune).

La fel pentru relația 7.1-2, putem concluziona:

- T_y şi I_z depind de poziția secțiunii pe grindă,
- S_z şi b, depind de poziția pe secțiune a punctului în care se calculează tensiunea.

Calculul la încovoiere al barelor drepte, poate fi făcut atât din condiția de rezistență cât şi din cea de rigiditate.

În cele ce urmează, se prezintă relațiile de calcul utilizate la încovoiere simplă, pentru condiția de rezistență. Calculul deformațiilor produse la încovoiere simplă, face obiectul unui capitol separat, care este tratată într-o altă lucrare.

Relațiile de calcul pentru încovoierea simplă, condiția de rezistență, sunt prezentate în Tabelul 7.1-1.

Tabelul 7.1-1

Tipul problemei	**Solicitarea**	
	Încovoiere pură	**Forfecare**
Problemă de verificare	$\sigma_{max} = \frac{M_{iz}}{W_{z,min}} \le \sigma_a$	$\tau_{max} = \frac{T\cdot S_z}{I_z\cdot b} \le \tau_a$
Problemă de dimensionare	$W_{z,min.nec} = \frac{M_{iz}}{\sigma_a} = \ldots$	–
Problemă de efort capabil	$M_{iz,cap} = W_{z,min}\sigma_a = \ldots$	–

La încovoierea simplă, nu se fac calcule de dimensionare sau efort capabil din condiția de rezistență la forfecare, deoarece tensiunile tangențiale τ produse de efortul tăietor T, sunt mult mai mici la aceste elemente de rezistență, decât tensiunile normale σ, produse de momentul încovoietor M_{iz}. În general, se face calculul la încovoiere pură, urmat eventual de un calcul al tensiunilor tangențiale maxime (calcul de verificare) produse de forfecare.

În cazul solicitării de ***încovoiere pură***, ***etapele*** de calcul pe care propun a fi urmate, sunt următoarele:

- *Se stabilesc solicitările la care este supus elementul de rezistență, precum şi secțiunea cea mai solicitată (periculoasă), pentru fiecare solicitare. Stabilirea solicitărilor şi a secțiunilor periculoase, se poate face corect, numai după trasarea diagramelor de eforturi (vezi trasarea diagramelor de eforturi, Cap.3).*

  Să presupunem că a rezultat o solicitare de încovoiere simplă.
- *Se stabileşte direcția principală de inerție după care este orientat momentul încovoietor, putând rezulta M_{iz} sau M_{iy}. În exemplul nostru, considerăm că a rezultat M_{iz}.*
- *Pentru secțiunea periculoasă stabilită, se calculează momentul de inerție față de direcția principală după care este orientat momentul încovoietor. În cazul nostru, rezultă I_z (vezi Cap.4 unde se calculează momentele de inerție).*
- *După calculul lui I_z, pentru aceeaşi secțiune periculoasă, se determină $W_{z,min}$ (vezi Cap.4).*
- *Se stabileşte tipul problemei (verificare, dimensionare, efort capabil) şi condiția impusă (în acest caz, evident, condiția de rezistență).*
- *Se scrie relația (din Tabelul 7-1-1) corespunzătoare tipului de problemă, stabilit.*
- *Din relația scrisă şi particularizată cu datele problemei, se determină mărimea necunoscută (mărimea cerută): tensiune maximă, dimensiunea secțiunii transversale sau sarcina maximă admisă.*

După efectuarea calculului la încovoiere pură, dacă se consideră necesar, se calculează tensiunea tangențială maximă. Pentru aceasta se parcurg următoarele ***etape****:*

- *Se stabileşte secţiunea periculoasă pentru solicitarea de forfecare (produsă de efortul tăietor T).*
- *Se stabilesc punctele din secţiunea periculoasă în care se produc tensiunile tangenţiale maxime.*
- *Se scrie relaţia de calcul (din Tabelul 7.1-1 pentru solicitarea de forfecare) şi se calculează valoarea maximă a tensiunii tangenţiale.*

Observaţie: De cele mai multe ori, tensiunea tangenţială este maximă în axa neutră de la încovoierea pură. Cu toată această constatare generală, se impune stabilirea punctelor din secţiune, unde se produc tensiunile tangenţiale maxime. În acest scop, este bine să se revadă modul de variaţie în lungul secţiunii, a tensiunilor tangenţiale, la barele cu grosime mare. Să nu se uite, că valoarea tensiunii tangenţiale este mult influenţată de mărimea **b**, aflată la numitorul relaţiei pentru calculul tensiunii tangenţiale (rel.7.1-2). Unde dimensiunea **b** a secţiunii transversale se modifică, tensiunea tangenţială prezintă o discontinuitate (salt).

7.2 Exemplu de calcul

Pentru grinda de oţel cu forma secţiunii transversale şi încărcarea din Fig.7.2-1a, se cere:

a) dimensionarea secţiunii transversale (t = ?) pentru σ_a *= 150 MPa;*

b) diagramele de variaţie în secţiunea $B_{dreapta}$ *ale tensiunilor* σ *şi* τ*;*

c) tensiunile normale principale maxime şi direcţiile principale în punctul M, punct situat în secţiunea $2_{stânga}$*.*

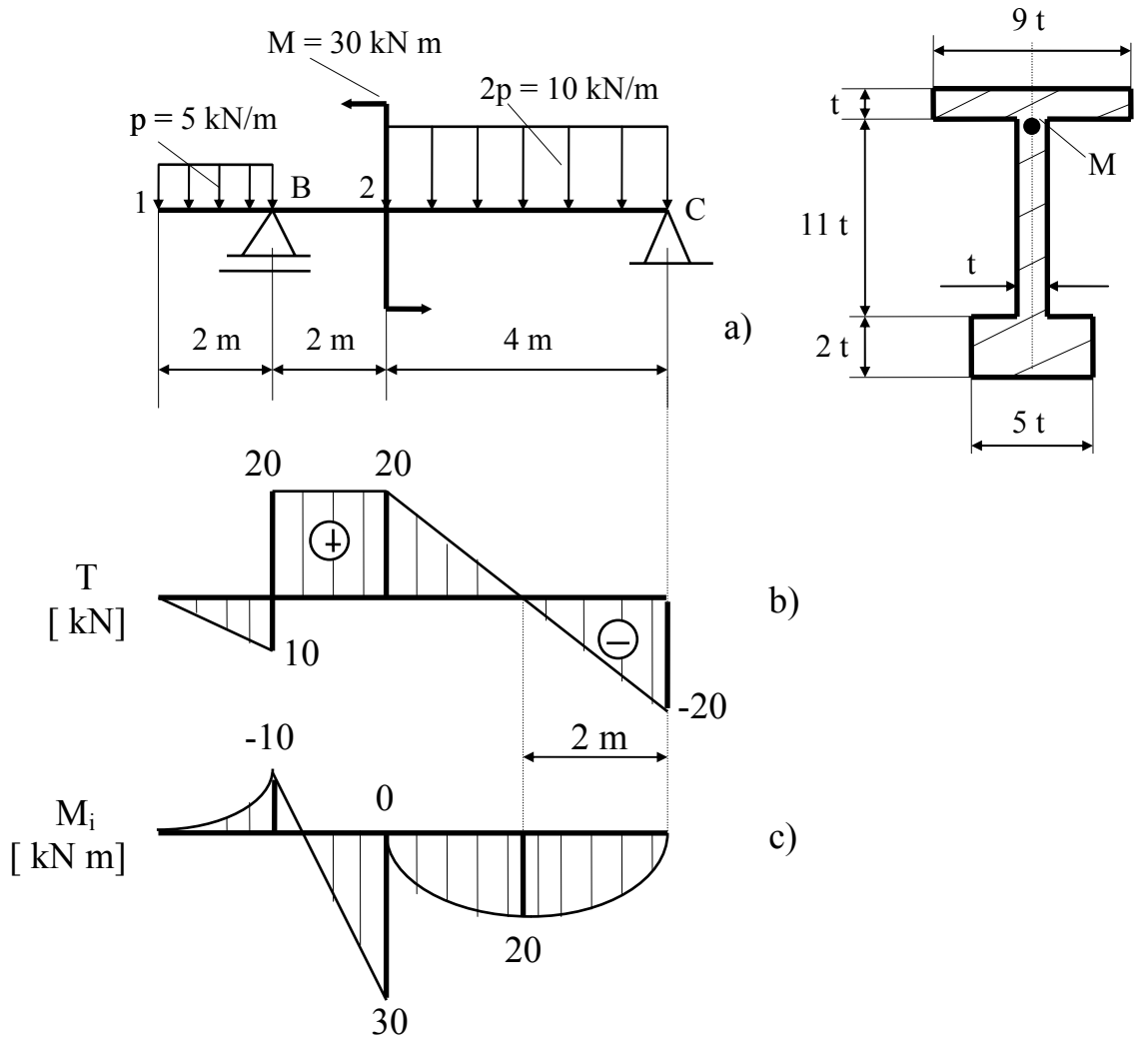


Fig.7.2-1

Rezolvare

Parcurgem etapele pe care le-am prezentat în paragraful 7.1.

- Stabilim solicitările la care este supusă grinda. Pentru a nu greşi, se trasează diagramele de eforturi. În acest exemplu, există următoarele eforturi: efort tăietor T (T_y) şi moment încovoietor M_{iz}. Diagramele de variație ale celor două eforturi existente, sunt prezentate în Fig.7.2-1b,c. De aici, rezultă că această grindă este solicitată la forfecare şi încovoiere, deci la încovoiere simplă (sau încovoiere cu forță tăietoare). Efortul tăietor acționează pe direcția principală y, iar momentul încovoietor pe direcția principală z.
- Stabilim secțiunile periculoase. Grinda prezintă secțiune constantă în lungul său. Rezultă că secțiunea periculoasă pentru fiecare solicitare, este acolo unde efortul prezintă valorile cele mai mari (valori maxime). Astfel pentru grinda analizată, rezultă:

- la solicitarea de forfecare există mai multe secțiuni periculoase: toate secțiunile de pe intervalul A-2 şi secțiunea B în care efortul tăietor are valoarea cea mai mare (T = 20 kN),

- la solicitarea de încovoiere există o singură secțiune periculoasă şi aceasta este secțiunea 2 fața din stânga, față pe care acționează momentul încovoietor maxim $M_{iz,\ max} = 30$ kNm. Atenție, în aceeaşi secțiune 2, dar pe fața din dreapta, există $M_{iz} = 0$.

a) Efectuăm la început calculul la solicitarea de încovoiere.

- Forma secțiunii periculoase la încovoiere (secțiunea 2 fața din stânga) este prezentată în Fig.7.2-1a. Pentru această secțiune se calculează caracteristicile geometrice (vezi Cap. 4). Au rezultat următoarele valori:

$$y_G = 7{,}13 \text{ t}$$
$$I_z = 857 \text{ t}^4$$
$$W_{z,\ min} = 120{,}19 \text{ t}^3$$

- Problema este de dimensionare, iar condiția impusă este cea de rezistență (se dă σ_a),

- Relația de calcul (din Tabelul 7.1-1) pentru problema de dimensionare la încovoiere, este:

$$W_{z,min.nec} = \frac{M_{iz}}{\sigma_a} = \dots \qquad 7.2\text{-}2$$

iar particularizată pentru problema noastră, rezultă:

$$\frac{M_{iz,max}}{\sigma_a} = 120{,}19 \cdot t^3 \qquad 7.2\text{-}3$$

de unde:

$$t = \sqrt[3]{\frac{M_{iz,max}}{120{,}19 \cdot \sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{30 \cdot 10^6}{120{,}19 \cdot 150}} = 12 \ mm \qquad 7.2\text{-}4$$

S-a obținut astfel t =12 mm, rezultând în continuare dimensiunile secțiunii transversale ale grinzii din Fig.7.2-1a.

Cu aceasta, calculul la încovoiere prevăzut la punctul a) al problemei, s-a încheiat.

b) Pentru rezolvarea acestui punct, trebuie trasate diagramele de variație ale tensiunilor normale şi tangențiale, dar în secțiunea $B_{dreapta}$ (B_{dr}). Este necesară precizarea feței secțiunii, deoarece după cum se poate constata, în secțiunea B, efortul tăietor T prezintă două valori: pe fața din stânga T = 10 kN, iar pe fața din dreapta, T = 20 kN. Pentru momentul încovoietor, nu este necesară precizarea feței secțiunii, deoarece pe ambele fețe ale secțiunii B, acesta prezintă aceeaşi valoare, M_{iz} = 10 kNm.

Din relația 7.1-1, rezultă că tensiunea normală σ produsă de M_{iz}, are o variație liniară în lungul secțiunii (**y** este mărimea variabilă din secțiune), iar din relația 7.1-2, rezultă că tensiunea tangențială τ produsă de efortul tăietor $T \equiv T_y$ are o variație parabolică în lungul secțiunii ($\mathbf{S_z}$ şi **b** sunt mărimile variabile din secțiune). Se mai precizează, că acolo unde are loc o variație a lui **b**, în diagrama τ are loc un salt.

Acestea fiind precizate, se poate trece acum la calculul valorilor tensiunilor σ şi τ în secțiunea $B_{dr.}$, precum şi la reprezentarea variației acestora în lungul secțiunii.

Variația tensiunilor σ şi τ, este prezentată în Fig.7.2-3. În Fig.7.2-3, sunt evidențiate salturile din diagrama τ, la nivelul variației dimensiunii **b** (lățimii secțiunii).

Rămâne de calculat acum, valorile tensiunilor la nivelurile caracteristice. Nivelurile caracteristice la care trebuie calculate valorile tensiunilor sunt prezentate în Fig.7.2-3 şi acestea sunt: 1-1, 2-2, 3-3, 4-4, 5-5.

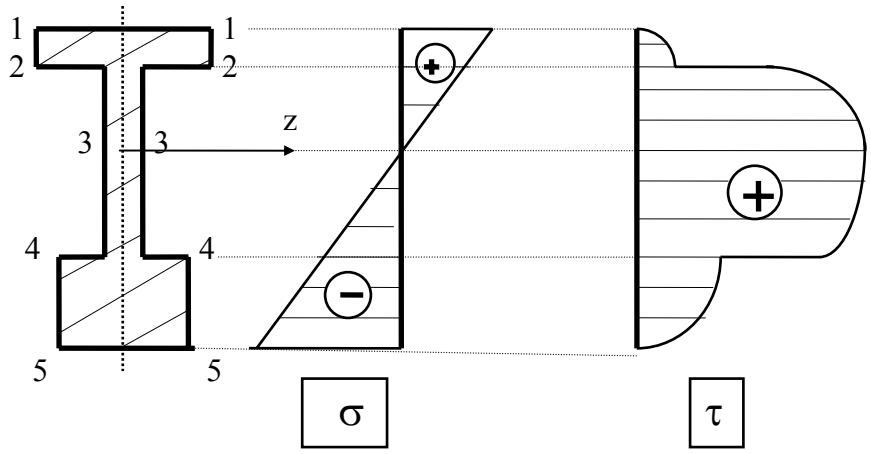


Fig.7.2-3

Pentru tensiunea normală σ, trebuie calculate numai valorile maxime, valori care se ating în fibrele extreme (la nivelurile 1-1 şi 5-5).

Rezultă, astfel:

$$\sigma_{Bdr1-1} = \frac{M_{iz,Bdr}}{I_{z,Bdr}} y_{1-1} = \frac{10 \cdot 10^6}{857 \cdot 12^4} 6{,}87 \cdot 12 = 46{,}39 \ \ MPa$$

$$\sigma_{Bdr5-5} = \frac{M_{iz,Bdr}}{I_{z,Bdr}} y_{5-5} = \frac{10 \cdot 10^6}{857 \cdot 12^4} 7{,}13 \cdot 12 = -48{,}14 \ \ MPa$$

Aceste valori sunt trecute în diagrama σ din Fig.7.2-4.

Atenție: $\sigma_{Bdr5\text{-}5}$ este negativ, deoarece este situat sub axa neutră Gz, iar această zonă este comprimată (vezi diagrama M_i din Fig.7.2-1c, unde diagrama indică fibra întinsă, deasupra).

Pentru tensiunea tangențială τ, aceasta trebuie calculată la mai multe niveluri:

$$\tau_{Bdr1-1} = \frac{T_{Bdr} \cdot S_{z1-1}}{I_{zBdr} \cdot b_{1-1}} = \frac{20 \cdot 10^3}{857 \cdot 12^4} \frac{0}{9 \cdot 12} = 0$$

$$\tau_{Bdr2-2} = \frac{T_{Bdr} \cdot S_{z2-2}}{I_{zBdr} \cdot b_{2-2}} = \frac{20 \cdot 10^3}{857 \cdot 12^4} \frac{(9t \cdot t)\left(6{,}87t - \frac{t}{2}\right)}{9 \cdot 12} = 1{,}032 \ MPa$$

La acest nivel (2-2) trebuie calculat şi pentru punctele la care b=t.

$$\tau_{Bdr2-2} = \frac{T_{Bdr} \cdot S_{z2-2}}{I_{zBdr} \cdot b_{2-2}} = \frac{20 \cdot 10^3}{857 \cdot 12^4} \frac{(9t \cdot t)\left(6{,}87t - \frac{t}{2}\right)}{t} = 9{,}29\ MPa$$

$$\tau_{Bdr3-3} = \frac{T_{Bdr} \cdot S_{z3-3}}{I_{zBdr} \cdot b_{3-3}} = \frac{20 \cdot 10^3}{857 \cdot 12^4} \frac{S_{z2-2} + 5{,}87t \cdot t\frac{5{,}87}{2}t}{t} = 12{,}083\ MPa$$

$$\tau_{Bdr5-5} = \frac{T_{Bdr} \cdot S_{z5-5}}{I_{zBdr} \cdot b_{5-5}} = \frac{20 \cdot 10^3}{857 \cdot 12^4} \frac{0}{5 \cdot t} = 0$$

$$\tau_{Bdr4-4} = \frac{T_{Bdr} \cdot S_{z4-4}}{I_{zBdr} \cdot b_{4-4}} = \frac{20 \cdot 10^3}{857 \cdot 12^4} \frac{(5t \cdot 2t)(7{,}13t - t)}{5 \cdot t} = 2{,}05\ MPa$$

Se calculează la nivelul 4-4 şi pentru punctele la care $b_{4\text{-}4}$ = t =12 mm.

$$\tau_{Bdr4-4} = \frac{T_{Bdr} \cdot S_{z4-4}}{I_{zBdr} \cdot b_{4-4}} = \frac{20 \cdot 10^3}{857 \cdot 12^4} \frac{S_{z4-4} + 5{,}13t \cdot t \cdot \frac{5.14 \cdot t}{2}}{t} = 10{,}25\ MPa$$

Valorile calculate pentru τ, sunt trecute în diagrama τ din Fig.7.2-4.

Din calculele făcute, se poate constata că valoarea maximă a tensiunii tangențiale este mică, τ_{max} = 12,083 MPa (este şi tensiunea maximă de pe toată grinda) în comparație cu tensiunea normală maximă σ_{max} = 150 MPa (la această valoare s-a făcut dimensionarea), motiv pentru care la elementele de rezistență cu grosime mare, de cele mai multe ori, calculul la forfecare se neglijează.

La punctul c) al problemei, se cer tensiunile normale principale maxime şi direcțiile principale în punctul M, situat în secțiunea $2_{stânga}$.

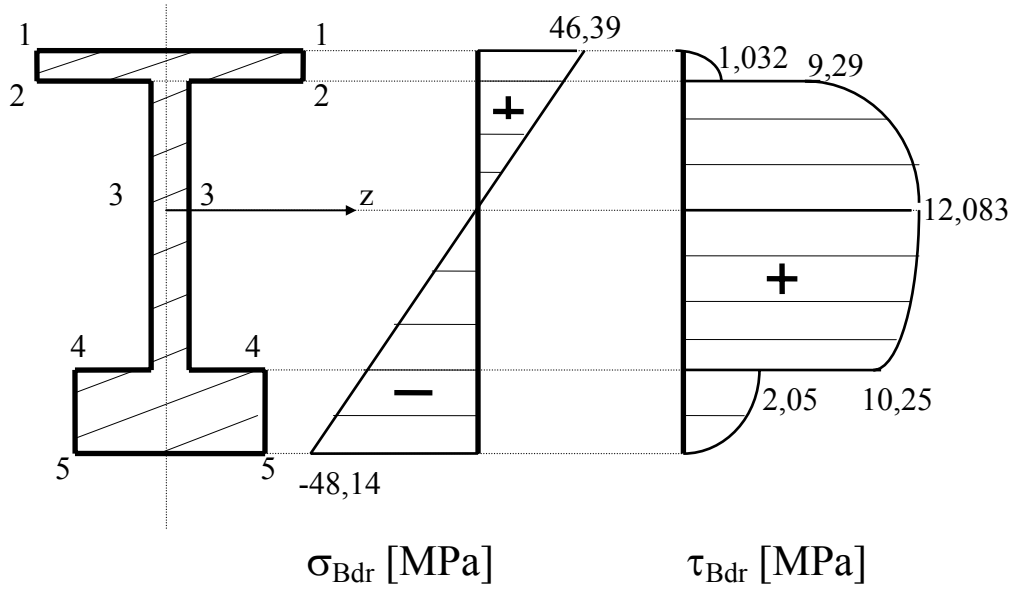


Fig.7.2-4

La început se calculează tensiunea normală σ şi cea tangențială maximă τ_{max} din acest punct:

$$\sigma_{M,2st.} = \frac{M_{iz,2st.}}{I_{z,2st.}} y_M = -\frac{30 \cdot 10^6}{857 \cdot 12^4} 5{,}87 \cdot 12 = -118{,}9 \ \ MPa$$

$$\tau_{M,2st.} = \frac{T_{2st.} \cdot}{I_{z,2st.}} \frac{S_{z,M}}{b_M} = \frac{20 \cdot 10^3}{857 \cdot 12^4} \frac{9t\left(6{,}87t - \frac{t}{2}\right)}{t} = 9{,}29 \ \ MPa$$

Pentru calculul tensiunilor normale principale, se utilizează relația 7.1-3:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = -\frac{118{,}9}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(-118{,}9)^2 + 4 \cdot (9{,}29)^2} =$$
$$= -59{,}42 \pm 60{,}17 \quad MPa$$

de unde rezultă tensiunile normale principale:

$\sigma_1 = 0{,}75$ MPa
$\sigma_2 = -119{,}59$ MPa

Direcțiile principale, se determină cu relația 7.1-4:

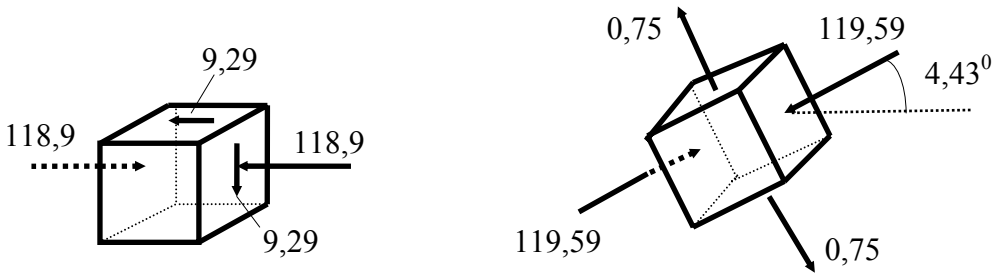
$$tg2\alpha = -\frac{2\tau}{\sigma} = -\frac{2\cdot 9{,}29}{-118{,}9} = 0{,}156$$

de unde se obține:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} arctg 0{,}156 = 4{,}43^0$$

$$\alpha_2 = 90^0 + 4{,}43^0 = 94{,}43^0$$

În Fig.7.2-5a, sunt prezentate tensiunile normale şi tangențiale pe un element de volum decupat din jurul punctului M, precum şi pe acesta, orientat după direcțiile principale (Fig.7.2-5b).



[MPa]

a) b)

Fig.7.2-5

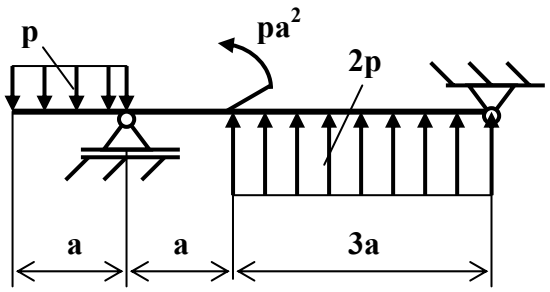
7E. Calculul la încovoiere simplă al barelor drepte plane (Probleme propuse)

7E.1

Pentru grinda cu încărcarea şi forma secțiunii prezentate în Fig.7E.1, se cere:

a) dimensionarea secțiunii (t = ?) pentru σ = 120 MPa
b) tensiunea tangențială maximă în punctul K

Se cunosc: p = 4 kN/m, a = 0,5 m



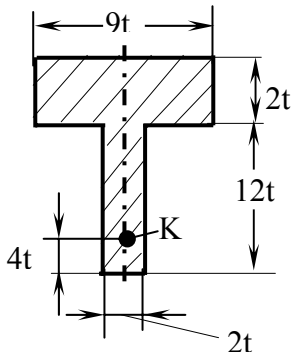


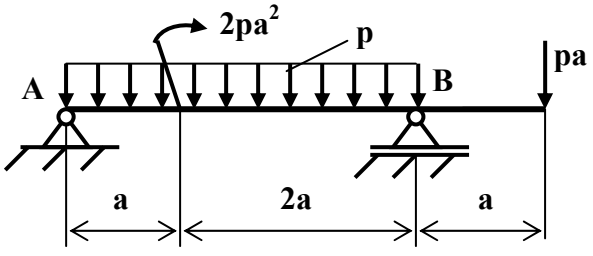
Fig.7E.1

7E.2

Pentru grinda cu încărcarea şi forma secțiunii din Fig.7E.2, se cere:

a) dimensionarea secțiunii (t = ?)
b) diagrama de variație (cu valori) a tensiunii normale şi tangențiale din secțiunea $B_{dreapta.}$

Se cunosc: p = 10 kN/m, a = 1 m, σ_a = 120 MPa.



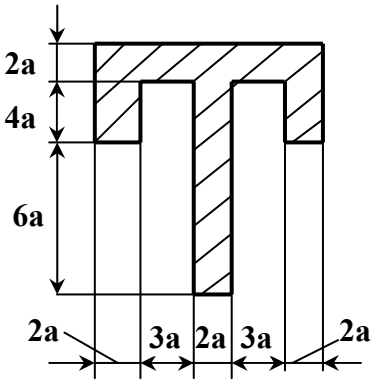


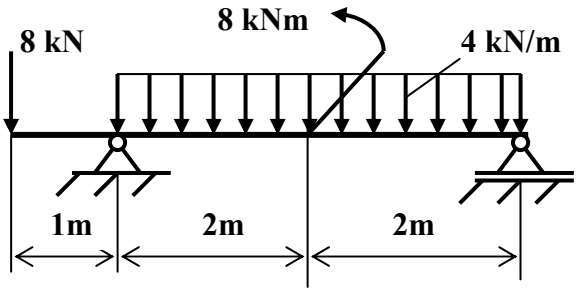
Fig.7E.2

7E.3

Pentru grinda cu încărcarea şi forma secțiunii prezentate în Fig.7E.3, se cere:

a) dimensionarea secțiunii grinzii (t = ?) pentru σ_a = 140 Mpa

b) tensiunea tangențială maximă (τ_{max} = ?).



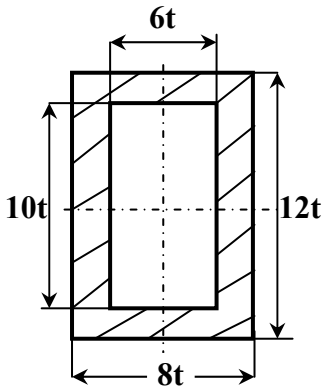


Fig.7E.3

7E.4

Să se dimensioneze grinda cu σ_a = 120 MPa din Fig.7E.4a,b,c,d, şi să se traseze diagramele de variație ale tensiunilor normale σ şi tangențiale τ în secțiunile în care acestea sunt maxime, pentru cazul când secțiunea grinzii are forma:

a) dreptunghiulară

b) circulară

c) inelară

d) profil T, cu σ_{at} = 40 MPa şi σ_{ac} = 90 MPa

e) profil de forma din Fig.e, σ_{at} = 40 MPa, σ_{ac} = 90 MPa.

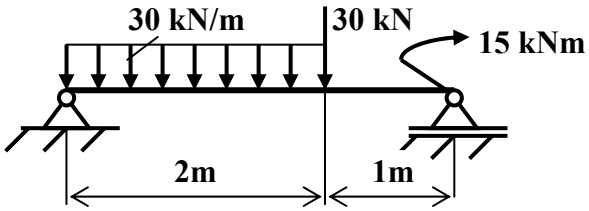
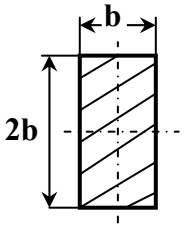
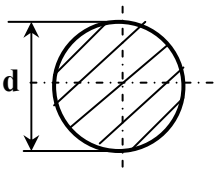


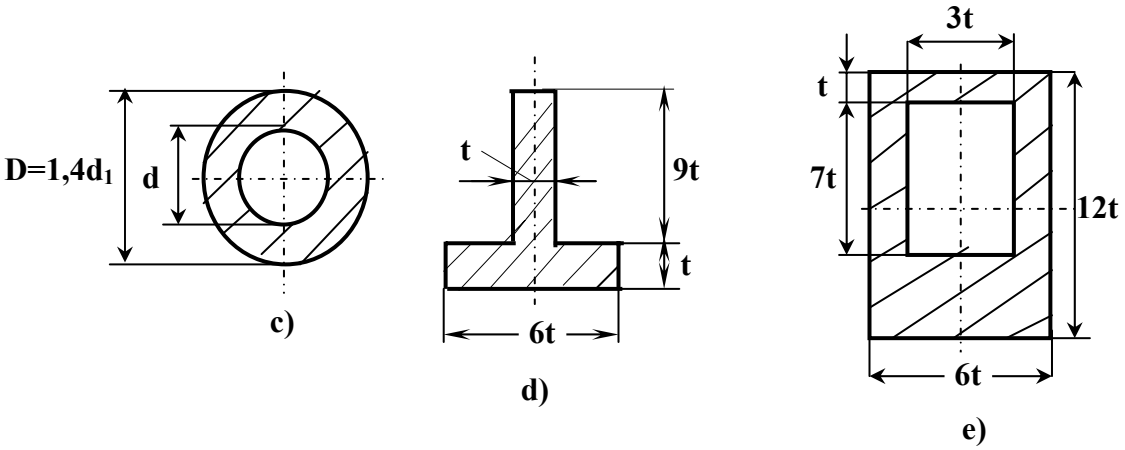
Fig.7E.4



a)



b)



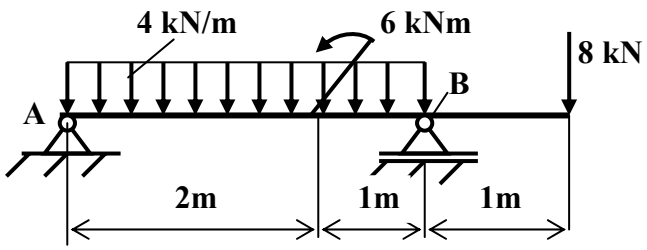
7E.5

Pentru grinda din Fig.7E.5, să se:

a) verifice grinda pentru $\sigma_a = 160$ MPa

b) traseze diagra de variație a tensiunii normale σ şi a celei tangențiale τ, pentru secțiunea $B_{stânga}$

c) calculeze tensiunea σ şi τ din punctul K situat în secțiunea $B_{stânga}$.



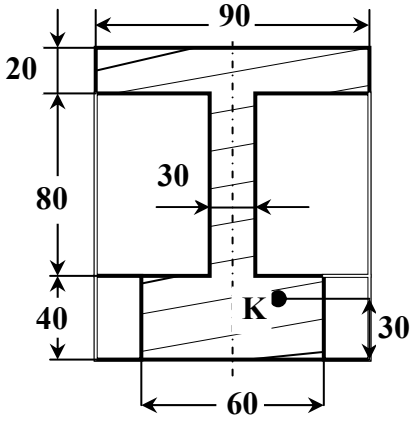


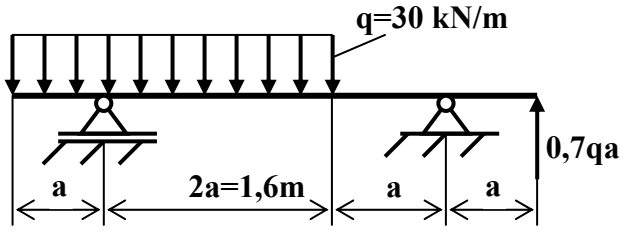
Fig.7E.5

7E.6

Pentru grinda din Fig.7E.6, se cere:

a) dimensionarea secțiunii grinzii pentru $\sigma_{at} = 36$ MPa şi $\sigma_{ac} = 90$ MPa (t = ?)

b) diagrama de variaţie a tensiunii normale σ şi a celei tangenţiale τ din secţiunea periculoasă, după dimensionarea grinzii



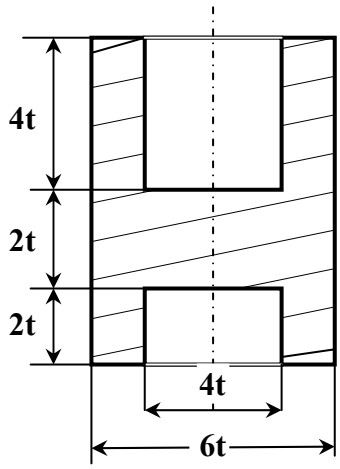


Fig.7E.6

7E.7

Grinda simplu rezemată din Fig.7E.7 este realizată din fontă cu σ_{at} = 36 MPa şi σ_{ac} = 90 MPa Dimensiunile secţiunii transversale fiind cele din figură, se cere:

a) sarcina capabilă (p = ?) pe care o poate suporta grinda
b) distribuţia tensiunii tangenţiale maxime
c) care este aşezarea economică a grinzii ?

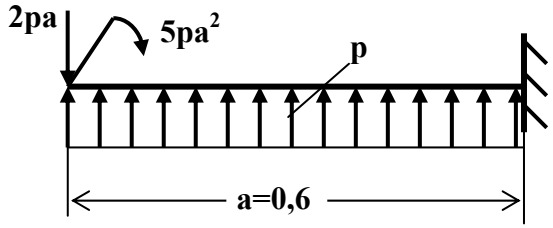
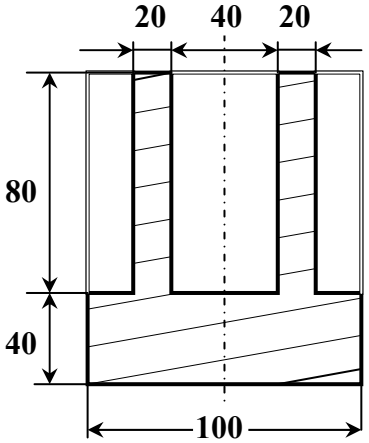


Fig.7E7



7E.8

Să se dimensioneze grinda din Fig.7E.8, cu σ_a = 140 MPa, având secţiunea transversală cu formele:

a) circulară cu diametrul d
b) dreptunghiulară cu lăţimea b şi înălţimea h = 2b

c) profil standardizat **I** aşezat vertical şi orizontal
d) tubulară cu d = 0,8 D
e) profil **I** nestandardizat ca în figura e)

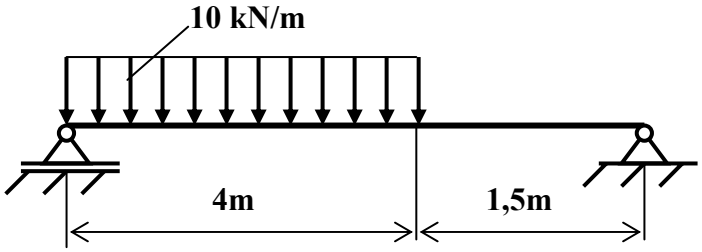
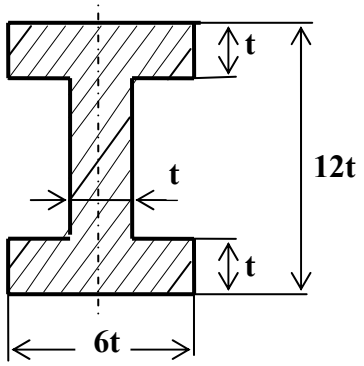


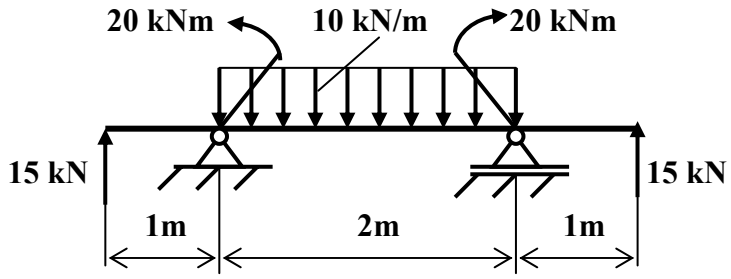
Fig.7E.8



e)

7E.9

Pentru grinda din Fig.7E.9, realizată din fontă cu σ_{at} = 40 MPa şi σ_{ac} = 90 MPa, se cere:
a) verificarea grinzii
b) tensiunea tangențială maximă.



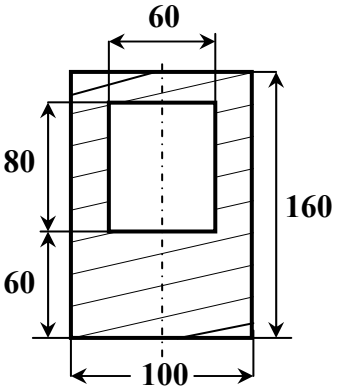
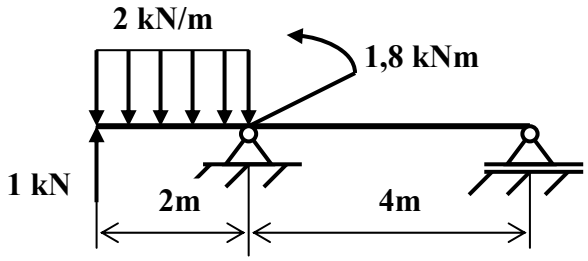


Fig.7E.9

7E.10

Pentru grinda din Fig.7E.10, se cere:
a) verificarea grinzii dacă σ_{at} = 30 MPa şi σ_{ac} = 90 MPa
b) care este aşezarea economică a grinzii (cu talpa în sus sau în jos ?)

c) diagrama de variație a tensiunii tangențiale din secțiunea periculoasă la forfecare



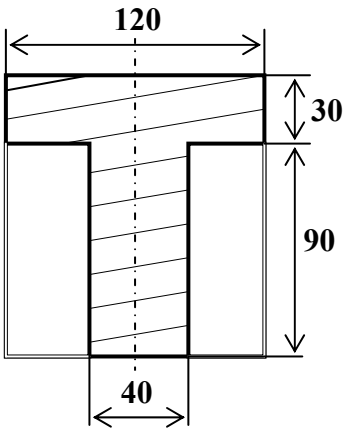


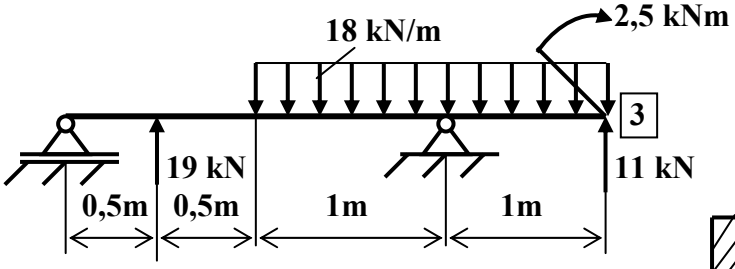
Fig.7E.10

7E.11

Pentru grinda cu încărcarea şi forma secțiunii prezentată în Fig.7E.11 se cere:

a) dimensionarea grinzii cunoscând σ_a = 130 MPa

b) diagramele de variație ale tensiunii normale σ şi a celei tangențiale τ în secțiunea



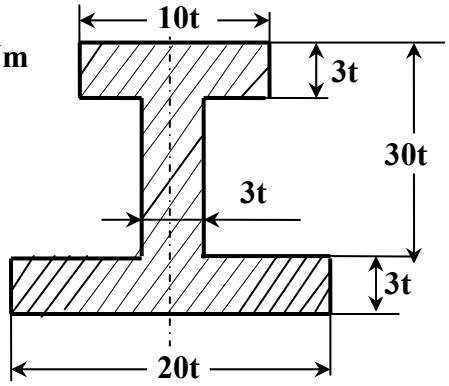


Fig.7E.11

7E.12

Pentru grinda din Fig.7E.12 pentru care σ_{at} = 36 MPa şi σ_{ac} = 90 MPa se cere:

a) p_{cap} = ?

b) tensiunea normală şi tangențială maximă unde T este maxim

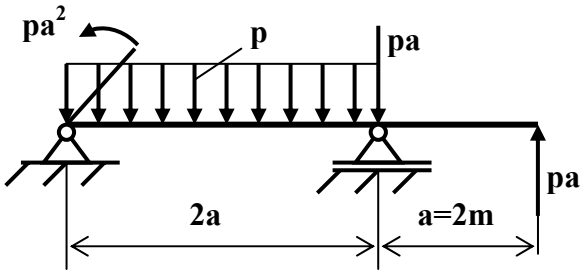
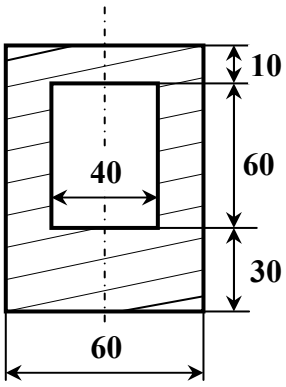


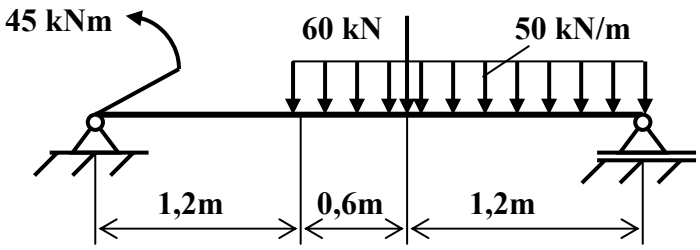
Fig.7E.12



7E.13

Pentru grinda cu încărcarea şi forma secțiunii prezentate în Fig.7E13 se cere:

a) dimensionarea secțiunii pentru σ_{at} = 30 MPa şi σ_{ac} = 90 MPa
b) diagrama de variație a tensiunii normale σ în secțiunea periculoasă la încovoiere
c) diagrama de variație a tensiunii tangențiele τ în secțiunea periculoasă la forfecare



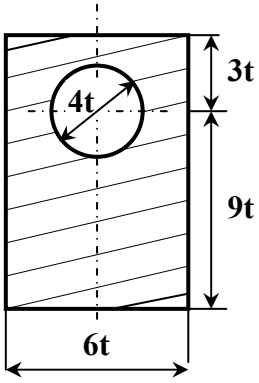


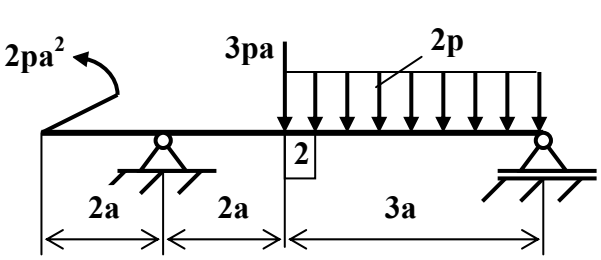
Fig.7E.13

7E.14

Pentru grinda simplu rezemată cu încărcarea şi forma secțiunii prezentată în Fig.7E.14 se cunosc: p = 12 kN/m, a = 0,3 m, σ_a = 150 MPa,

Se cere:

a) dimensionarea secțiunii grinzii
b) distribuția tensiunilor în secțiunea 2



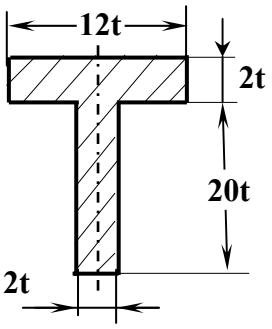


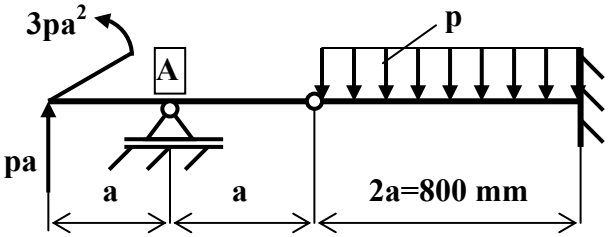
Fig.7E.14

7E.15

Pentru grinda din Fig.7E.15 se cere:

a) sarcina capabilă (p) pentru $\sigma_a = 120$ MPa

b) diagrama de variație a tensiunii normale σ şi a celei tangențiale τ în secțiunea $A_{dreapta}$



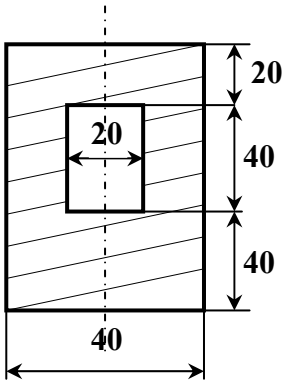


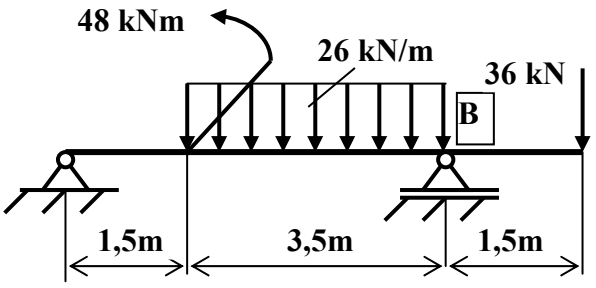
Fig.7E.15

7E.16

Pentru grinda din Fig.7E.16 se cere:

a) dimensionarea secțiunii grinzii (t = ?) pentru $\sigma_{at} = 90$ MPa şi $\sigma_{ac} = 160$ MPa

b) diagrama de variație a tensiunii normale σ şi a celei tangențiale τ din secțiunea $B_{stânga}$.



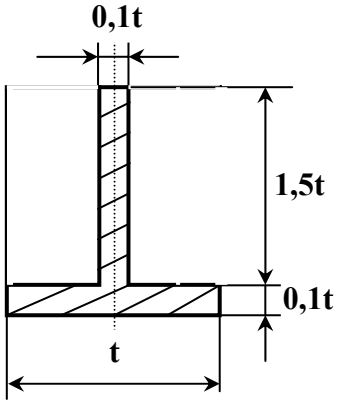


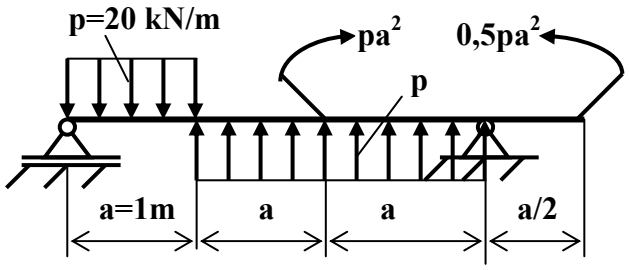
Fig.7E.16

7E.17

Se dă grinda cu încărcarea, rezemarea şi secţiunea transversală în Fig.7E.17. Se cere:

a) să se dimensioneze grinda pentru σ_a = 160 MPa
b) să se traseze diagramele de variaţie a tensiunilor σ şi τ pe secţiunea transversală ce se găseşte la distanţa **a** = 1m de reazemul din stânga
c) să se determine tensiunile normale principale maxime şi direcţiile principale în punctul K (vezi secţiunea) din secţiunea precizată la punctul b).

(Concursul Studenţesc "C. C. Teodorescu" – faza naţională, Ploieşti, 1988)



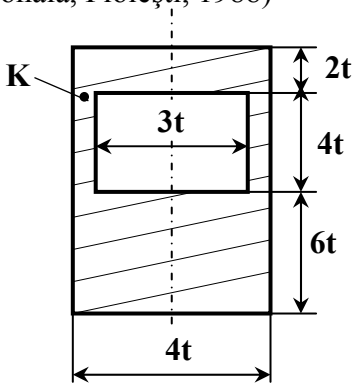


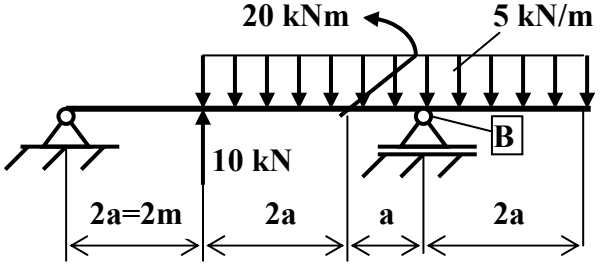
Fig.7E.17

7E.18

Pentru grinda cu secţiunea şi încărcarea din Fig.7E.18 se cere:

a) dimensionarea secţiunii transversale (t = ?) pentru σ_a = 150 MPa
b) tensiunea σ şi τ_{max} în punctul K situat în secţiunea $B_{dreapta}$
c) tensiunile normale principale şi direcţiile principale în punctul K amintit mai sus

(Concursul Studenţesc "C. C. Teodorescu" – faza locală, Timişoara, 1988)



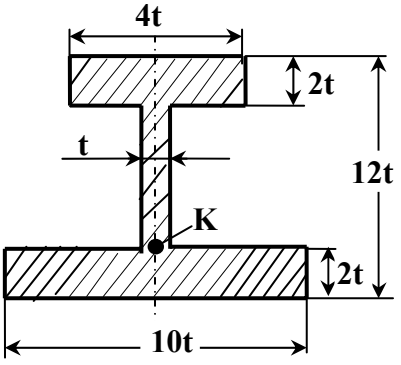


Fig.7E.18

7E.19

Pentru grinda din Fig.7E.19 se cere:

a) sarcina capabilă (p = ?) pentru σ_a = 150 MPa

b) tensiunile în punctul K din secțiunea $B_{stânga}$.

Se dau: a = 500 mm, d = 20 mm.

(Concursul Studențesc "C. C. Teodorescu" – faza națională, Petroşani, 1989)

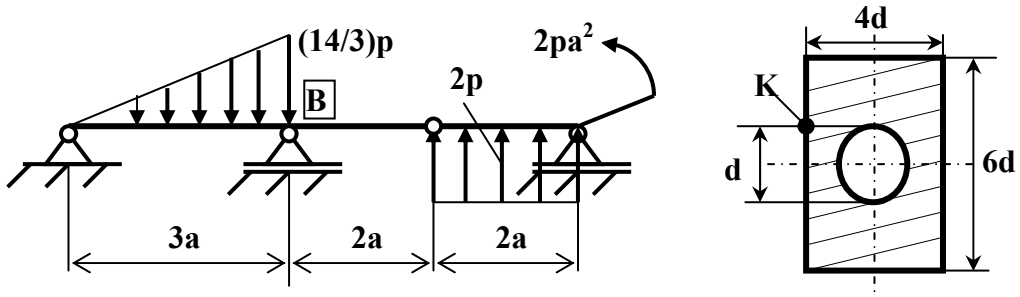


Fig.7E.19

7E.20

Pentru grinda din Fig.7E.20 se cere:

a) dimensionarea secțiunii (t = ?) pentru σ_a = 150 MPa

b) tensiunea tangențială maximă (τ_{max})

(Concursul Studențesc "C. C. Teodorescu" – faza locală, Timişoara, 1997)

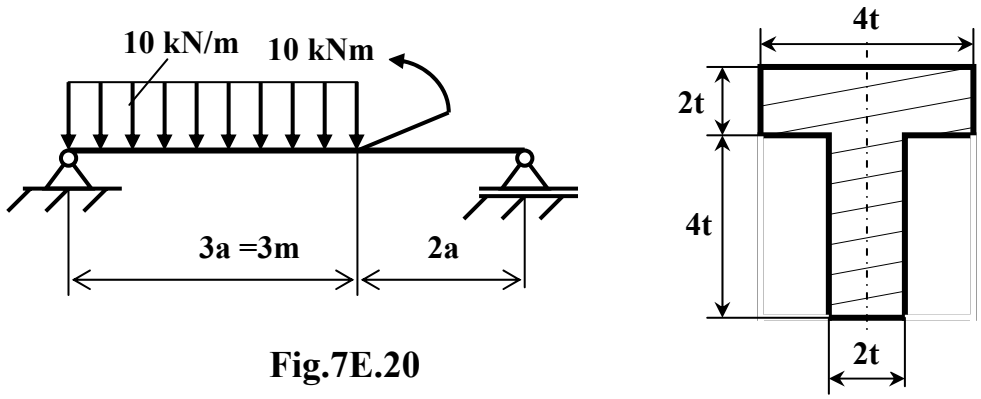


Fig.7E.20

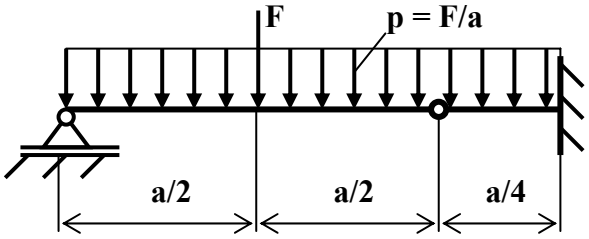
7E.21

Se dă grinda cu încărcarea, secțiunea şi dimensiunile din Fig.7E.21. Se cer:

a) diagramele de eforturi
b) caracteristicile geometrice ale secțiunii transversale
c) dimensionarea grinzii (t = ?) dacă σ_{ac} = 100 MPa şi σ_{at} = 30 MPa

Se dau F = 3 kN, a = 1 m.

(Concursul Studențesc "C. C. Teodorescu" – faza națională, Bucureşti, 1997)



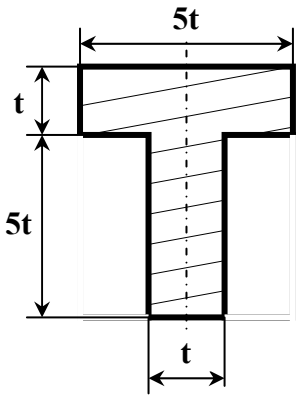


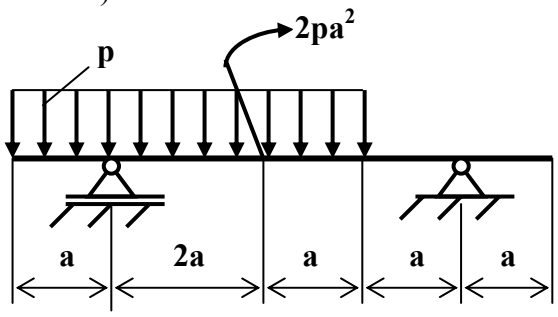
Fig.7E.21

7E.22

O grindă pe două reazeme are dimensiunile şi încărcarea din Fig.7E.22. Se cere:

a) diagramele de eforturi în funcție de **a** şi **p**
b) să se dimensioneze grinda (p = 10 kN/m, a = 0,4 m şi σ_a = 150 MPa)

(Concursul Studențesc "C. C. Teodorescu" – faza locală, Bucureşti, 1988 – profil nemecanic)



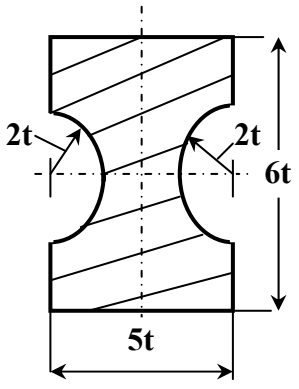


Fig.7E.22

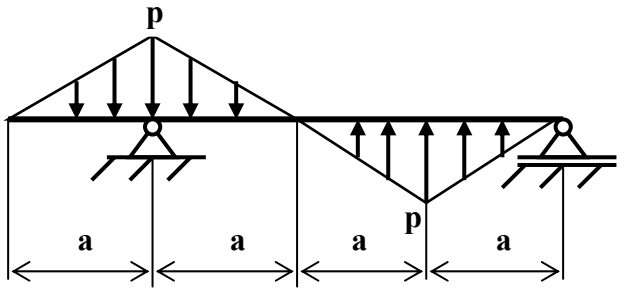
7E.23

Se dă grinda din Fig.7E.23 şi se cere:

a) să se traseze diagramele de eforturi
b) să se dimensioneze grinda
c) să se calculeze tensiunile maxime σ şi τ în sudură.

Se dau: p = 20 kN/m, a = 0,8 m, σ_a = 150 MPa.

(Concursul Studențesc "C. C. Teodorescu" – faza locală, Bucureşti, 1991)



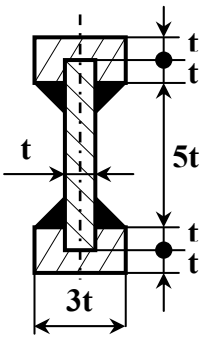


Fig.7E.23

7E.24

Se dă grinda articulată din Fig.7E.24 şi se cere:

a) trasarea diagramelor de eforturi
b) dimensionarea grinzii
c) diagramele σ şi τ pentru valorile maxime ale eforturilor din secțiunea unde acționează momentul concentrat, fața din stânga.

Se dau: p = 6 kN/m, σ_a = 150 MPa, a = 0,5 m.

(Concursul Studențesc "C. C. Teodorescu" – faza locală, Bucureşti, 1991 – profil nemecanic)

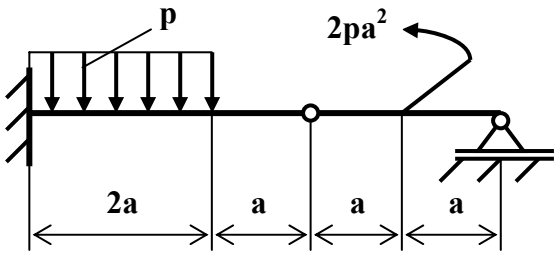
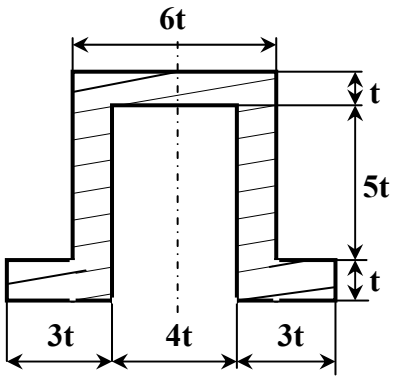


Fig.7E.24



7E.25

Pentru grinda din Fig.7E.25 se cere:

a) diagramele de eforturi

b) dimensionarea grinzii pentru $\sigma_a = 150$ MPa

c) tensiunea τ_{max} şi reprezentarea ei grafică pe secțiune.

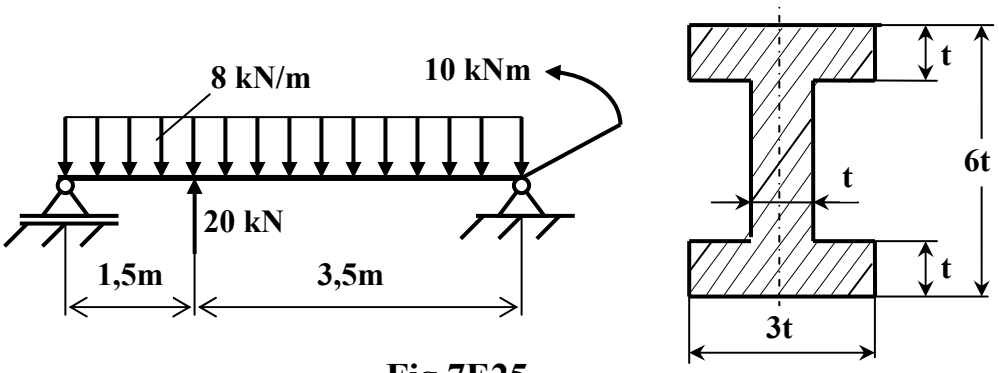


Fig.7E25

7E.26

Pentru grinda din Fig.7E.26 se cere:

a) diagramele de eforturi

b) forța capabilă pentru $\sigma_{at} = 48$ MPa şi $\sigma_{ac} = 120$ MPa.

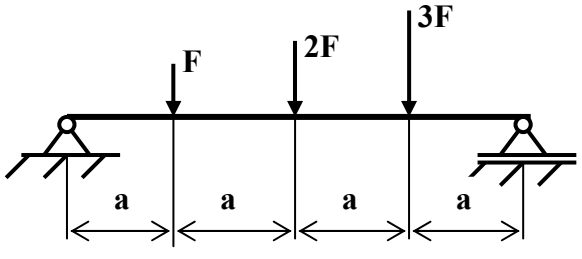
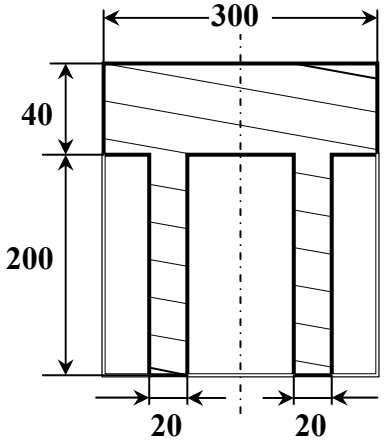
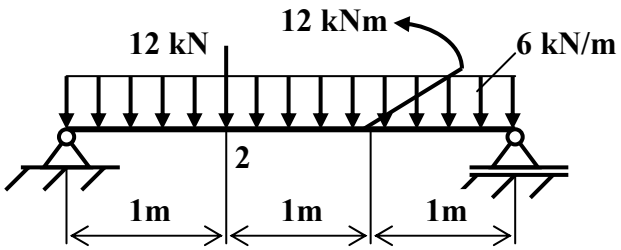


Fig.7E.26



7E.27

Pentru grinda din Fig.7E.27 se cere:
a) diagramele de eforturi
b) verificarea grinzii pentru σ_a = 150 MPa şi τ_a = 100 Mpa
c) σ_K şi τ_K din secţiunea $2_{stânga}$
d) diagrama σ şi τ (fără valori) pe secţiune.



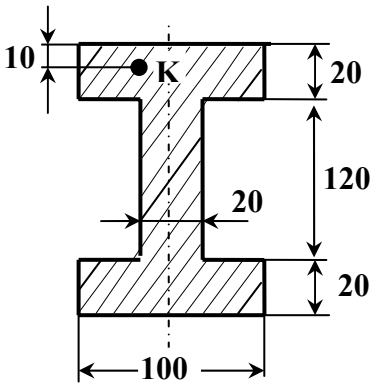
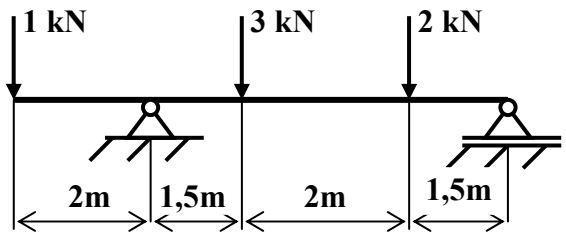


Fig.7E.27

7E.28

Pentru grinda de fontă din Fig.7E.28 se cere:
a) diagramele de eforturi
b) verificarea grinzii pentru σ_{at} = 30 MPa şi σ_{ac} = 90 MPa
c) să se reprezinte (fără valori) diagrama σ şi τ pe secţiune



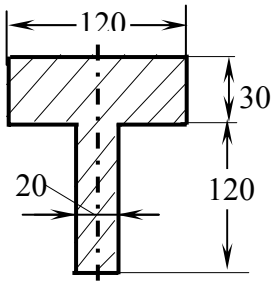


Fig.7E.28

7E.29

Pentru grinda din Fig.7E.29 se cere:
a) diagramele de eforturi
b) dimensionarea secțiunii (t = ?) pentruσ_a = 150 MPa
c) cu valoarea lui t determinată la punctul b) să se calculeze şi traseze diagrama tensiunii σ şi τ din secțiunea $2_{stânga}$.

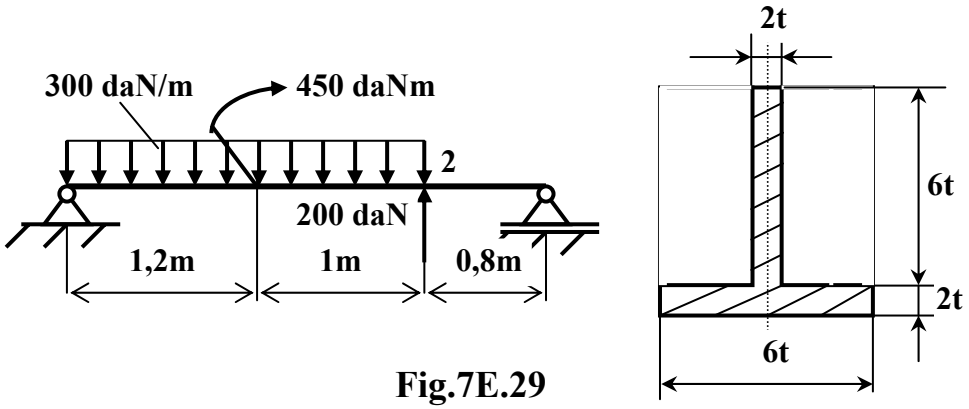


Fig.7E.29

7E.30

Pentru grinda din Fig.7E.30 se cere:
a) diagramele de eforturi
b) verificarea grinzii la încovoiere pentru σ_a = 150 MPa
c) tensiunea σ şi τ în punctul K situat în secțiunea 1.

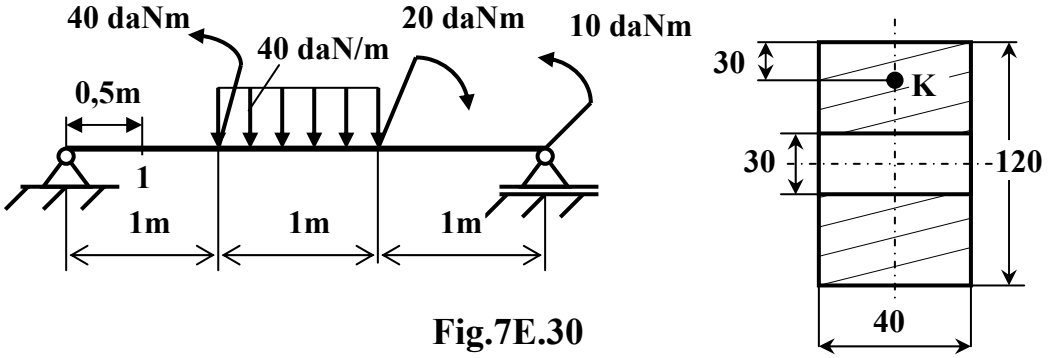


Fig.7E.30

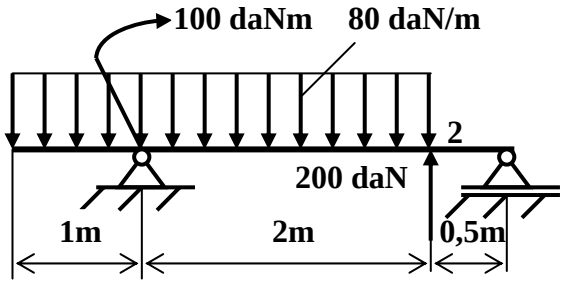
7E.31

Pentru grinda din Fig.7E.31 se cere:

a) diagramele de eforturi

b) verificarea grinzii pentru $\sigma_a = 150$ MPa şi $\tau_a = 80$ MPa

c) diagrama de variație a tensiunilor σ şi τ din secțiunea $2_{\text{stânga}}$



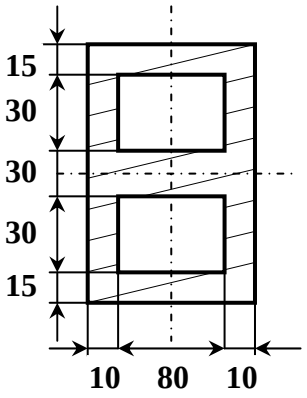


Fig.7E.31

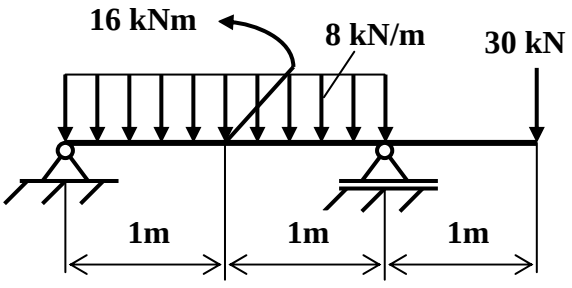
7E.32

Pentru grinda din Fig.7E.32 se cere:

a) diagramele de eforturi

b) dimensionarea secțiunii pentru $\sigma_a = 150$ MPa

c) tensiunile maxime σ şi τ din punctul K situat în secțiunea de la mijlocul consolei



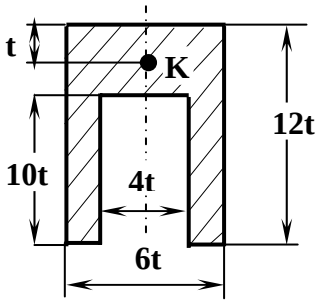


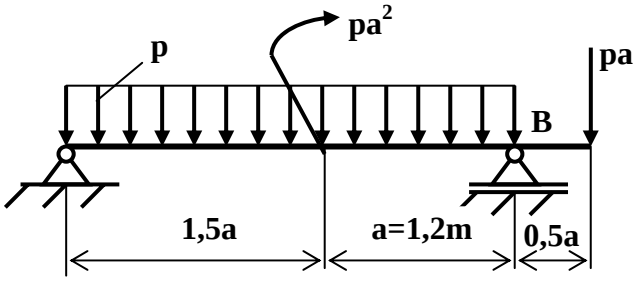
Fig.7E.32

7E.33

Pentru grinda cu forma şi dimensiunile din Fig.7E.33 se cere:

a) diagramele de eforturi

b) sarcina capabilă (p = ?) pentru σ_a = 150 MPa
c) variația tensiunii normale σ din secțiunea periculoasă la încovoiere şi a celei tangențiale din secțiunea $B_{stânga}$ (reazemul din dreapta).



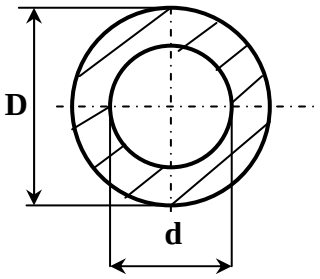
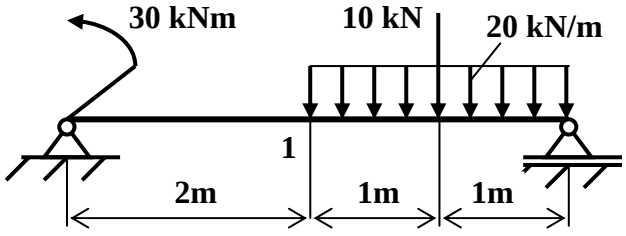


Fig.7E.33

d = 30 mm
D = 70 mm

7E.34

Pentru grinda din Fig.7E.34 se cere:
a) diagramele de eforturi
b) dimensionarea secțiunii (t = ?) pentru σ_a = 150 MPa
c) tensiunile maxime σ şi τ din secțiunea 1.



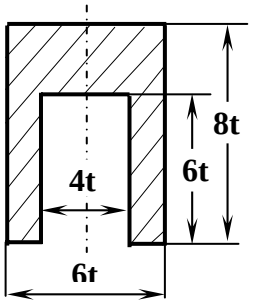
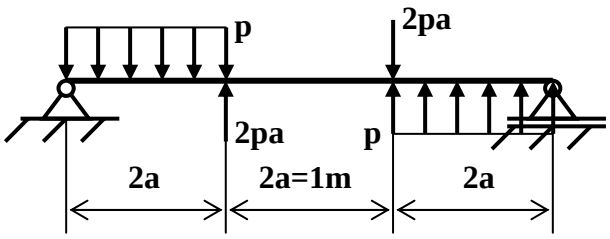


Fig.7E.34

7E.35

Pentru grinda din Fig.7E.35 se cere:
a) diagramele de eforturi
b) sarcina capabilă (p = ?) pentru σ_a = 150 MPa

c) tensiunea tangențială maximă din grindă (τ_{max} = ?)



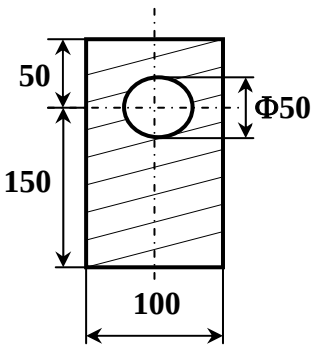


Fig.7E.35

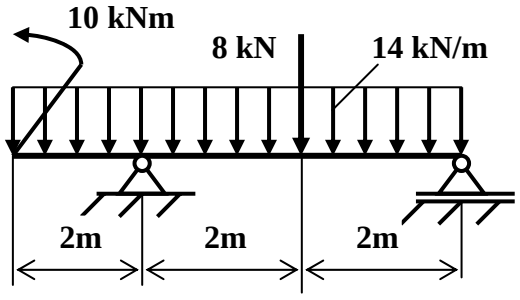
7E.36

Pentru grinda din Fig.7E.36 se cere.

a) dimensionarea secțiunii (t = ?) pentru σ_a = 150 MPa

b) diagrama tensiunii normale σ în secțiunea situată la mijlocul consolei

c) tensiunea tangențială din punctul K (τ_K) situat secțiunea specificată la punctul b).



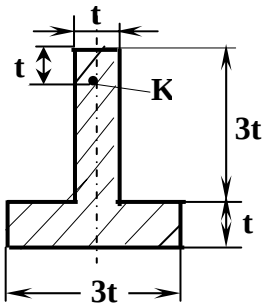


Fig.7E.36

7E.37

Pentru grinda din Fig.7E.37 se cere:

a) diagramele de eforturi

b) dimensionarea secțiunii pentruσ_a = 150 MPa

c) diagrama tensiunilor σ şi τ din secțiunea situată la mijlocul consolei

d) tensiunea normală şi cea tangențială din punctul K situat în secțiunea specificată la punctul c).

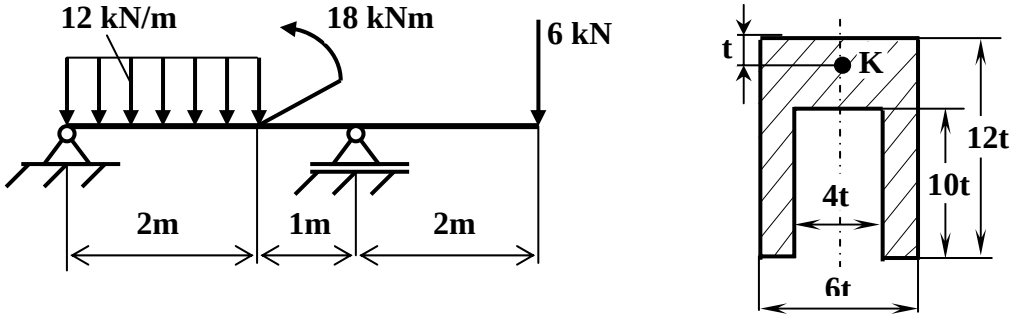


Fig.7E.37

7E.38

Pentru grinda din Fig.7E.38 se cere:

a) diagramele de eforturi

b) dimensionarea secțiunii pentru $\sigma_a = 150$ MPa

c) diagrama σ şi τ din secțiunea aflată la distanța x = 1,5 m de reazemul din stânga

d) tensiunea σ şi τ din punctul K situat în secțiunea precizată la punctul c)

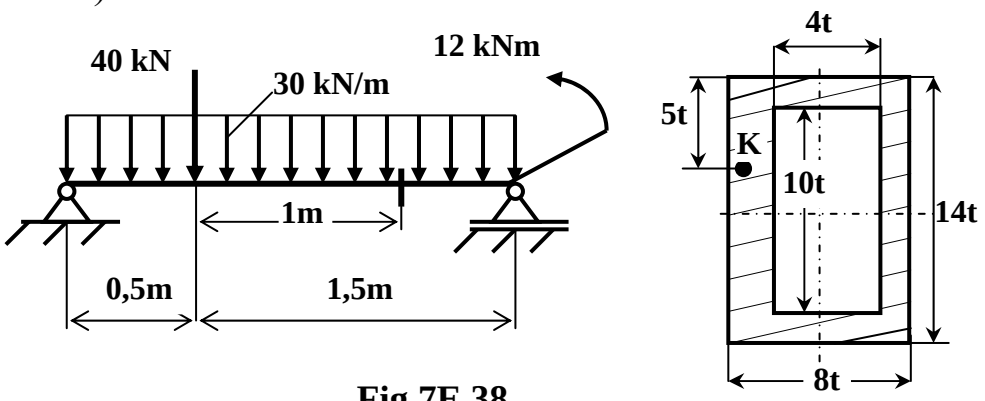


Fig.7E.38

7E.39

Pentru grinda din Fig.7E.39 se cere:

a) diagramele de eforturi

b) dimensionarea secțiunii pentru $\sigma_a = 150$ MPa

c) variația tensiunii σ_{max} şi τ din secțiunea în care acționează momentul încovoietor concentrat

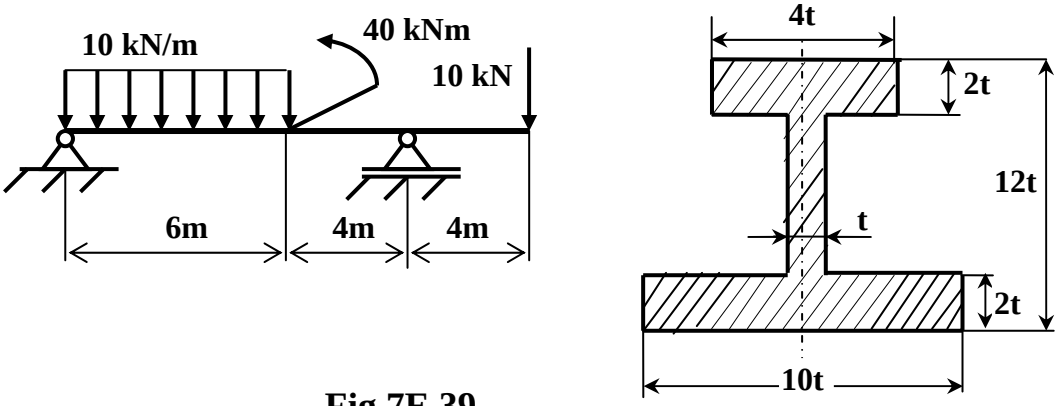


Fig.7E.39

7E.40

Pentru grinda din Fig.7E.40 se cere:

a) diagramele de eforturi
b) dimensionarea secțiunii pentru $\sigma_a = 150$ MPa
c) diagrama de variație a tensiunii σ şi τ din secțiunea de pe reazemul din dreapta

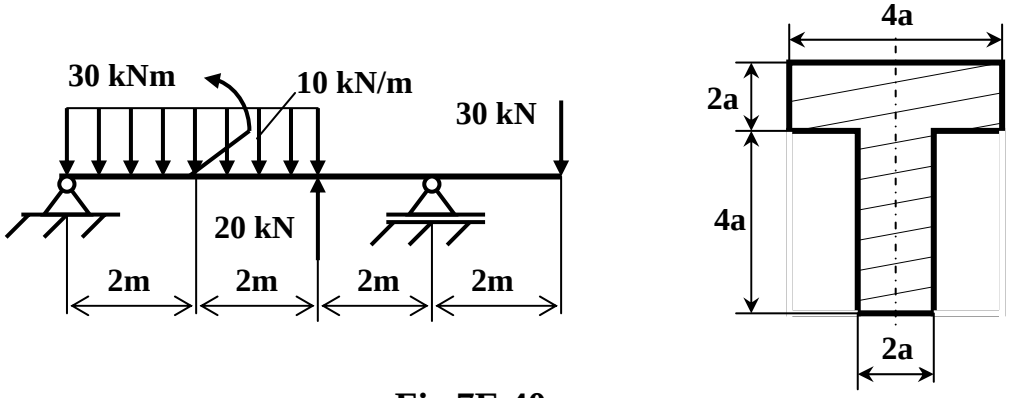


Fig.7E.40

7E.41

Se dă grinda dreaptă, simplu rezemată în punctele 1 şi 2 şi încărcată ca în Fig.7E.41. Grinda are secțiunea sub formă de cheson (vezi figura).

Se cunosc: a = 1,2 m, p = 5 kN/m, $\sigma_a = 150$ MPa.

Se cer:

a) trasarea diagramelor de eforturi T şi M_I

b) calculul momentului de inerție I_z şi modulului de rezistență W_z

c) dimensionarea lui t din condiția de rezistență la încovoiere

d) să se traseze diagramele cotate ale tensiunilor σ şi τ pe înălțimea secțiunii periculoase la încovoiere

e) tensiunile σ_K şi τ_K în punctul K din secțiunea $B_{stânga}$

f) direcțiile principale α_1 şi α_2 şi tensiunile principale σ_1 şi σ_2 în punctul K.

(Concursul Studențesc "C. C. Teodorescu" – faza națională, Piteşti, 1998)

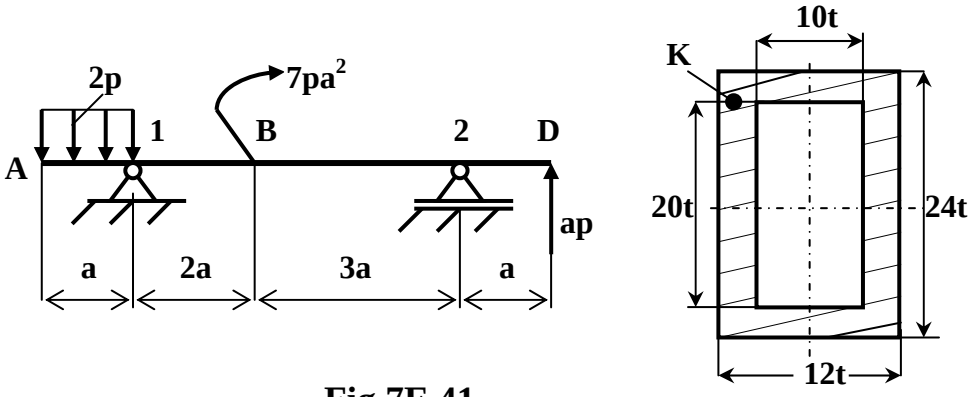


Fig.7E.41

7E.42

Se dă grinda de oțel cu secțiunea şi dimensiunile din Fig.7E.42 pentru care se cer:

a) diagramele de eforturi

b) dimensionarea (t = ?)

c) tensiunile principale şi direcțile lor în punctul k din secțiunea $B_{stânga}$

d) deplasarea pe verticală a articulației C.

Se dau: a = 1 m, p = 30 kN/m, σ_a = 150 MPa, E = $2{,}1\cdot10^5$ MPa

(Concursul Studențesc "C. C. Teodorescu" – faza națională, Timişoara, 1999 - profil mecanic)

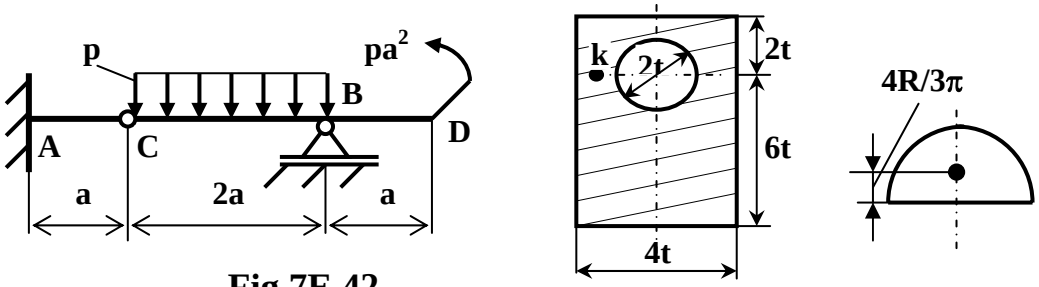


Fig.7E.42

7E.43

Pentru grinda dreaptă din Fig.7E.43, având o articulație interioară în punctul B şi secțiunea dată, se cer:

a) diagramele de eforturi T şi M_I
b) momentul de inerție față de axa centrală orizontală
c) dă se dimensioneze cota t dacă se cunosc: p = 20 kN/m, σ_a = 160 MPa, a = 0,6 m
d) tensiunile σ_k şi τ_G în punctul k respectiv centrul de greutate G pentru T_{max}
e) deplasarea v_B pe verticală a punctului B (literal)

(Concursul Studențesc "C. C. Teodorescu" – faza națională, Timişoara, 1999 - profil nemecanic)

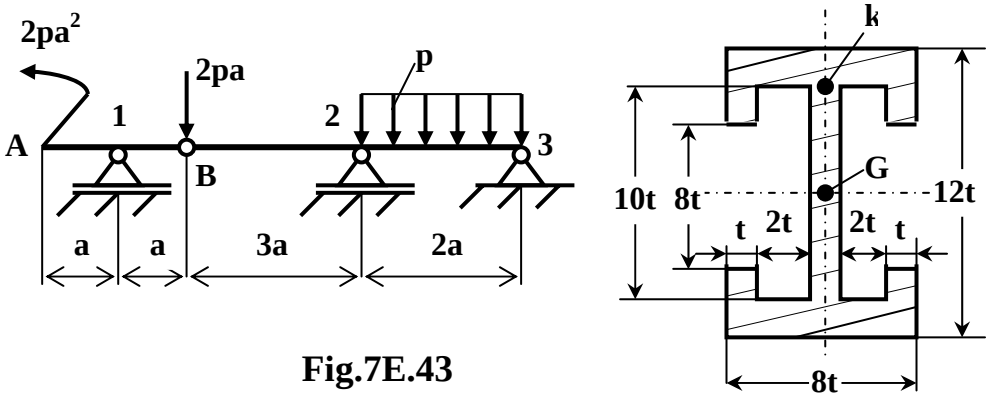


Fig.7E.43

7E.44

Se consideră grinda din Fig.7E.44. Se cer:

a) diagramele de eforturi (T şi M_i)
b) dimensionarea secțiunii (t = ?) pentru σ_a = 120 MPa, p = 4 kN/m, a = 1m
c) tensiunile σ şi τ în punctul K din dreapta secțiunii 1
d) diagramele σ şi τ în aceeaşi secțiune

(Concursul Studențesc "C. C. Teodorescu" – faza națională, Reşița, 2000 – profil mecanic)

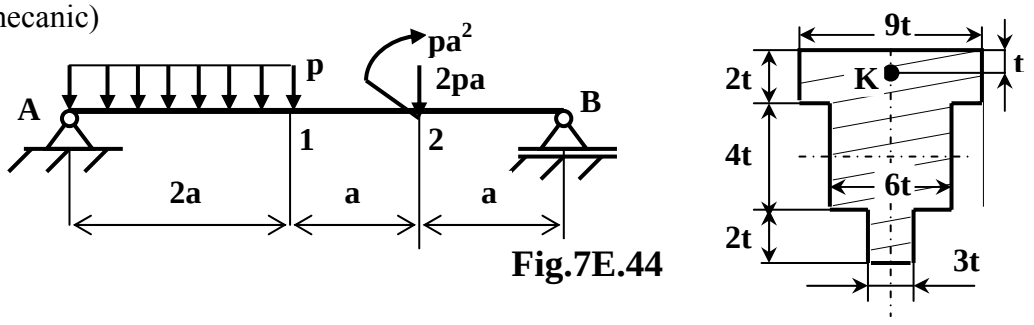


Fig.7E.44

7E.45

Se dă grinda metalică şi încărcată ca în Fig.7E.45. Se cer:

a) trasarea diagramelor de eforturi, T şi M_i

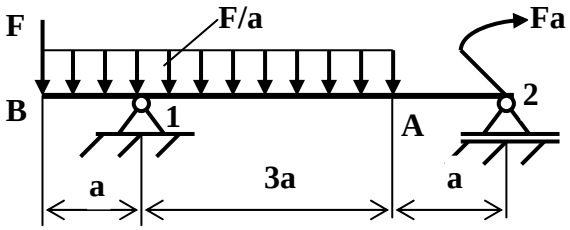
b) valoarea forţei capabile F din condiţia ca $\sigma_{max} \le \sigma_a$

c) valoarea tensiunii tangenţiale în punctul K în secţiunea A

d) deplasarea pe verticală a punctului B

Se cunosc: σ_a = 150 MPa, a = 1m, t = 10 mm, E = $2{,}1 \cdot 10^5$ MPa

(Concursul Studenţesc "C. C. Teodorescu" – faza naţională, Reşiţa, 2000 – profil nemecanic)



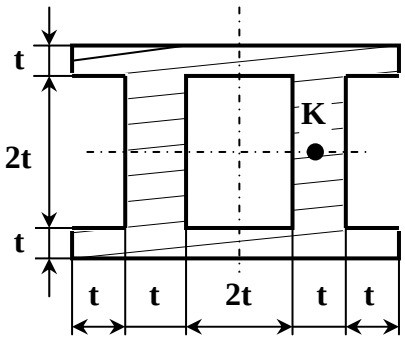


Fig.7E.45

7E.46

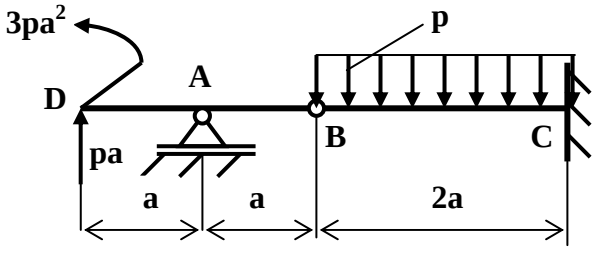
Pentru grinda dreaptă având forma, dimensiunile şi încărcarea din Fig.7E.46, se cer:

a) trasarea diagramelor de eforturi

b) sarcina capabilă p, dacă σ_a = 120 MPa şi a = 400 mm

c) cu valoarea lui p determinată anterior să se traseze diagramele cotate (cu valori) ale tensiunilor σ şi τ în secţiunea $A_{dreapta}$.

(Concursul Studenţesc "C. C. Teodorescu" – faza naţională, Cluj Napoca, 2001 – profil nemecanic)



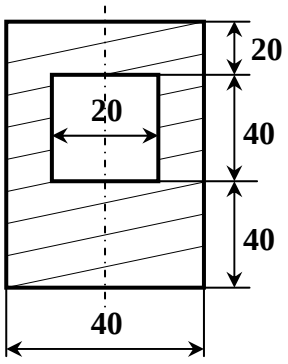


Fig.7E.46

7E.47

Pentru grinda din Fig.7E.47 se cere:

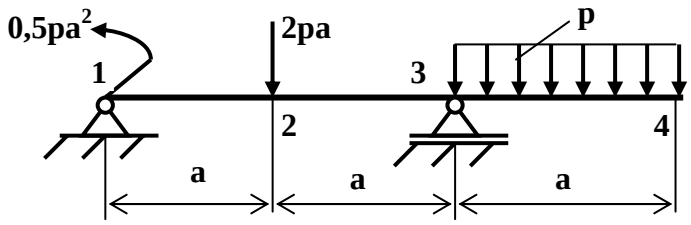
a) să se traseze diagramele de eforturi

b) să se calculeze încărcarea capabilă (p = ?)

c) să se calculeze tensiunile principale în punctul K, secțiunea 1.

Se cunosc: σ_{at} = 30 MPa, σ_{ac} = 1000 MPa, b = 10 mm, a = 1 m.

(Concursul Studențesc "C. C. Teodorescu" – faza națională, Bucureşti, 2002 – profil mecanic)



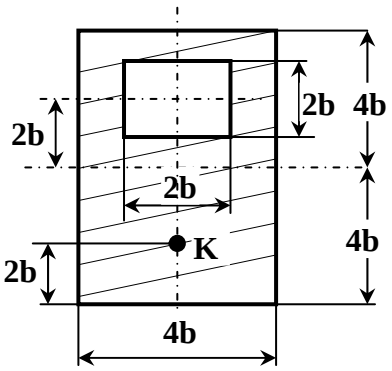


Fig.7E.47

7E.48

Pentru grinda dreaptă, cu o articulație interioară în punctul B, având forma, dimensiunile şi încărcarea din Fig.7E.48 se cer:

a) trasarea diagramelor T şi M_i

b) dimensionarea cotei t, din condiția $\sigma_{max} \le \sigma_a$

c) valorile tensiunilor σ şi τ în punctul K în secțiunea din încastrare

d) deplasarea pe verticală v_B a punctului B.

Se cunosc: a = 1 m, p = 10 N/mm, σ_a = 150 MPa, E = $2 \cdot 10^5$ MPa

(Concursul Studențesc "C. C. Teodorescu" – faza națională, Bacău, 2003 – profil nemecanic)

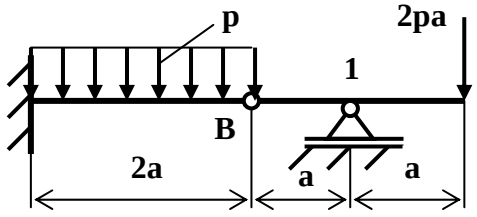
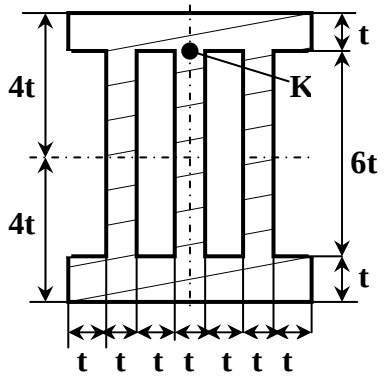


Fig.7E.48



7E.49

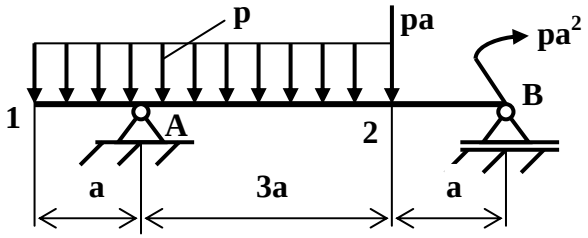
Se dă grinda din Fig.7E.49. Se cere:

a) să se traseze diagramele de eforturi T, M_i

b) să se dimensioneze grinda din oțel cu σ_a = 120 MPa, p = 20 kN/m, a = 1 m

c) să se calculeze tensiunile principale în punctul K al secțiunii 2

(Concursul Studențesc "C. C. Teodorescu" – faza națională, Bacău, 2003 – profil mecanic)



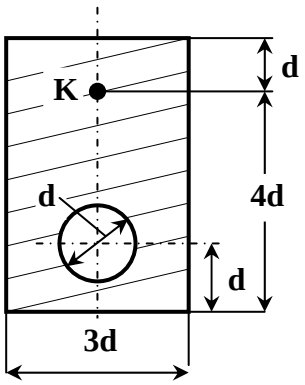


Fig.7E.49

7E.50

Pentru grinda din Fig.7E.50 se cer:

a) diagramele T şi M

b) F_{cap} din condiția ca $\sigma_{max} \le \sigma_a$

c) În punctul K din secțiunea $3_{stânga}$, să se calculeze tensiunile σ_K şi τ_K

d) Tensiunile şi direcțiile principale în punctul K.

Se cunosc: a = 0,5 m, σ_a = 150 MPa, c = 10 mm.

(Concursul Studențesc "C. C. Teodorescu" – faza națională, Târgu Mureş, 2005 – profil nemecanic)

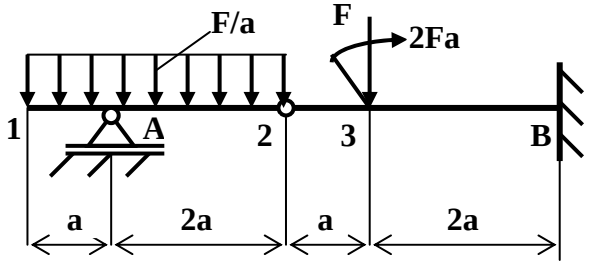
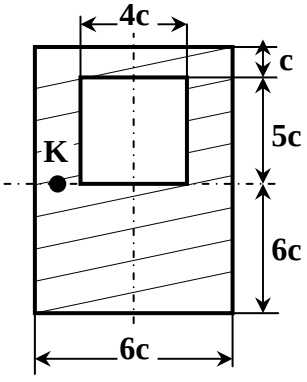


Fig.7E.50



7E.51

Se consideră grinda de oțel cu rigiditatea EI = constantă (Fig.7E.51). Se cere:

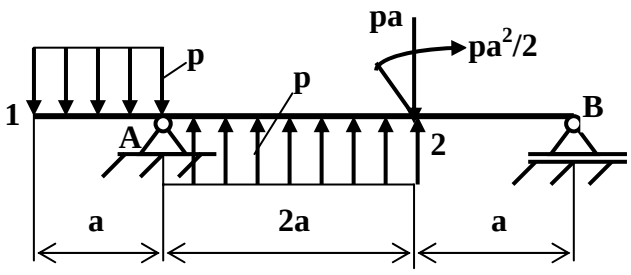
a) diagramele de eforturi T, M (literal)

b) dimensionarea secțiunii dacă se cunosc: σ_a = 100 MPa, a = 1 m, p = 8 N/mm

c) diagrama σ în secțiunea periculoasă

d) valoarea maximă a tensiunii tangențiale (τ_{max} = ?).

(Concursul Studențesc "C. C. Teodorescu" – faza națională, Târgu Mureş, 2005 – profil mecanic)



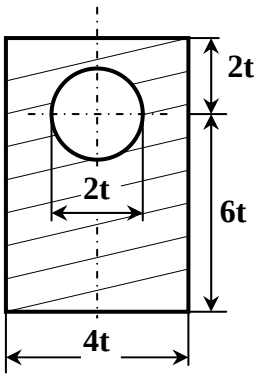


Fig.7E.51

7E.52

Pentru grinda metalică având modulul de rigiditate la încovoiere EI = constant, rezemată şi încărcată ca în Fig.7E.52 se cere:

a) trasarea diagramelor de eforturi N, T, M (în litere)

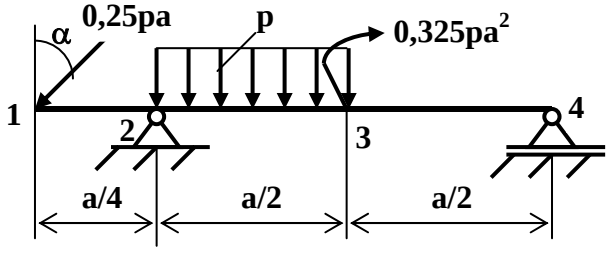
b) dimensionarea grinzii

c) calculul tensiunilor σ şi τ în punctul K din secțiunea grinzii, în dreapta şi în stânga secțiunii 3

d) calculul săgeții în capătul liber al grinzii (secțiunea 1).

Se cunosc: a = 4 m, σ_a = 150 MPa, cosα = 0,8, p = 10 kN/m.

(Concursul Studențesc "C. C. Teodorescu" – faza națională, Constanța, 2006 – profil mecanic)



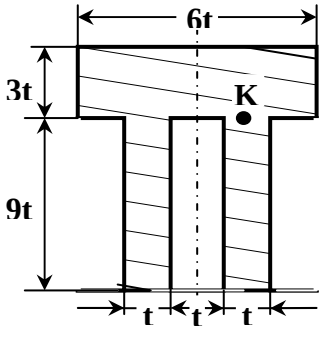


Fig.7E.52

7E.53

O grindă dreaptă cu articulația interioară B are forma, dimensiunile, încărcarea şi secțiunea din Fig.7E.53.

Se cer:

a) trasarea diagramelor de eforturi T şi M

b) determinarea poziției centrului de greutate, a momentului de inerție şi modulului de rezistență față de axa centrală orizontală

c) valoarea lui M_0 capabil din condiția de rezistență ($\sigma_{max} \le \sigma_a$)

d) valorile tensiunilor σ şi τ în punctul K din secțiunea $D_{stânga}$

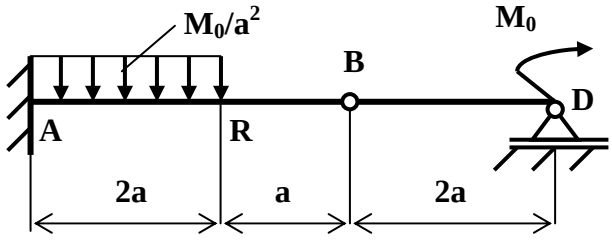
(la calculul tensiunii tangențiale τ se va ține cont de valoarea sa maximă)

e) tensiunile principale $\sigma_{1,2}$ şi direcțiile principale $\alpha_{1,2}$ în punctul K

f) săgeata în punctul D.

Se cunosc: a = 0,8 m, σ_a = 160 Mpa, c = 10 mm, E = $2 \cdot 10^5$ MPa.

(Concursul Studențesc "C. C. Teodorescu" – faza națională, Constanța, 2006 – profil nemecanic)



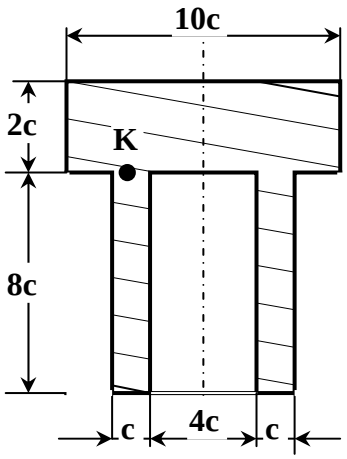
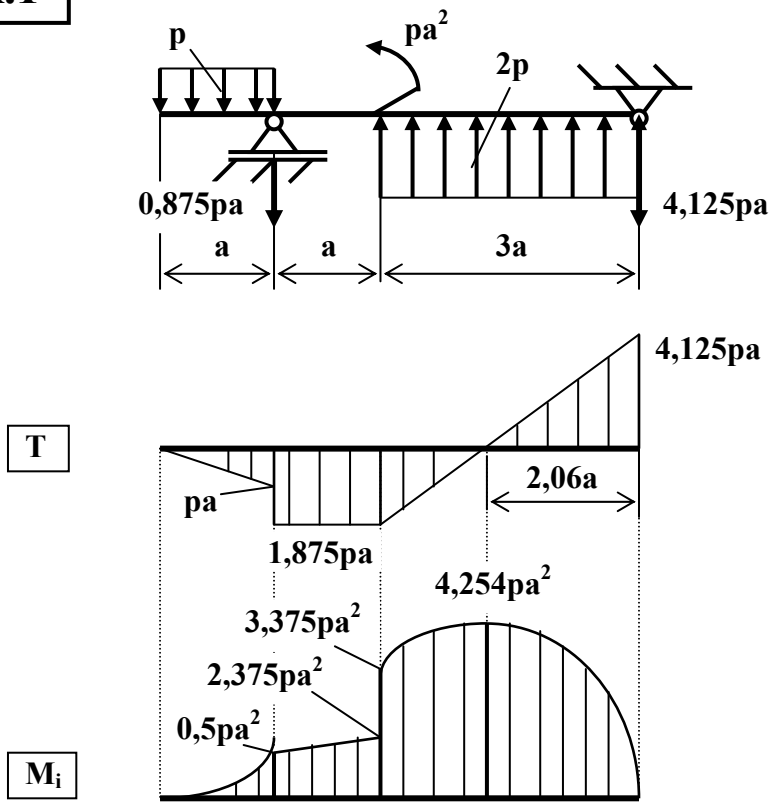


Fig.7E.53

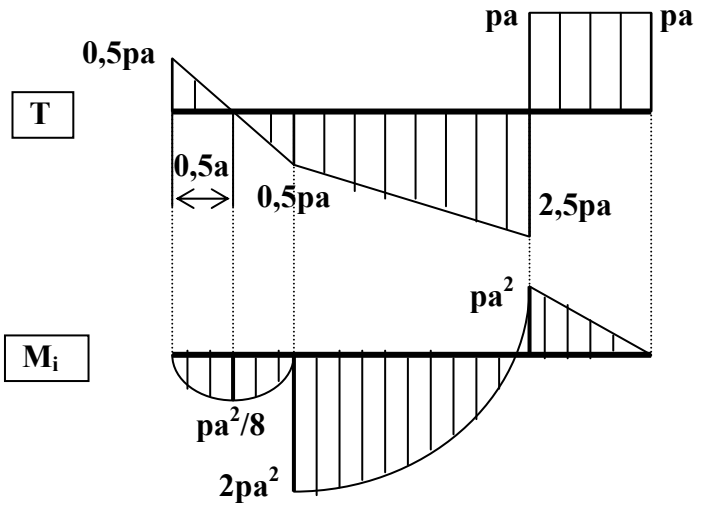
7R. Calculul la încovoiere simplă al barelor drepte plane (Răspunsuri)

7R.1

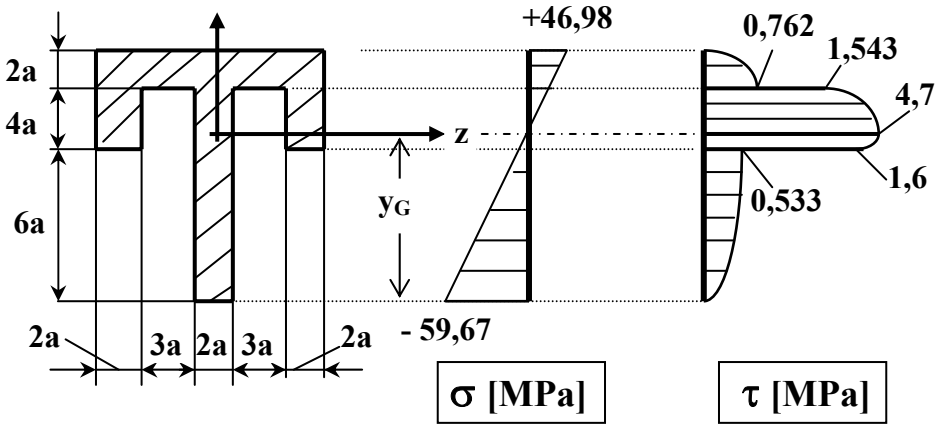


$y_G = 9t$, $I_z = 798\ t^4$, $W_{z,min} = 88{,}67\ t^3$, $t = 8$ mm, $\tau_{max,K} = 4{,}523$ MPa.

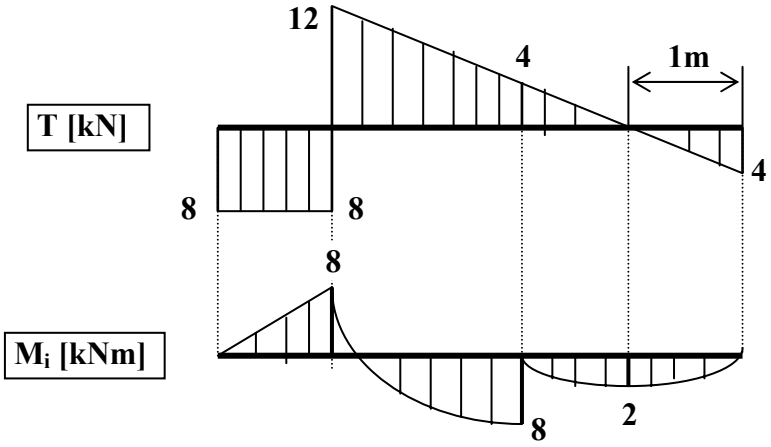
7R.2



$y_G = 6{,}714\ a$, $I_z = 1125{,}143\ a^4$, $W_{z,min} = 167{,}582\ a^3$, $t = 10$ mm.

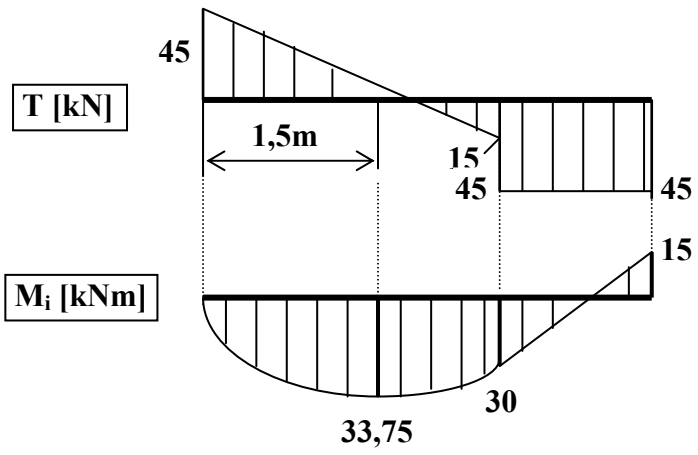


7R.3

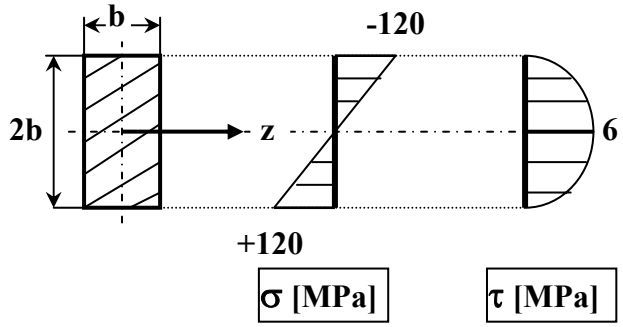


$y_G = 6$ t, $I_z = 652\ t^4$, $W_{z,min} = 108{,}67\ t^3$, $t = 8$ mm, $\tau_{max} = 9{,}92$ MPa.

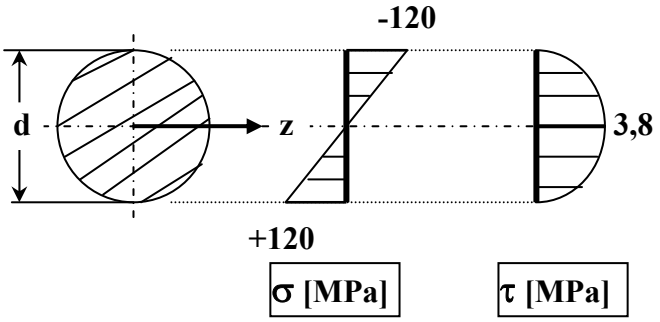
7R.4



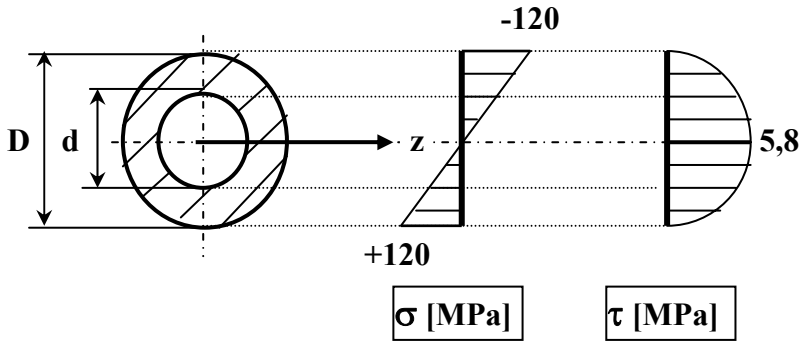
a) $I_z = 0{,}67\ b^4$, $W_z = 0{,}67\ b^3$, $M_{imax} = 33{,}75$ kNm, b = 75 mm, $T_{max} = 45$ kN



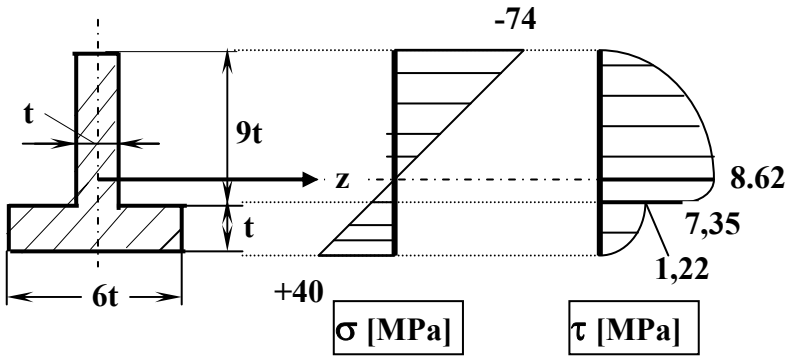
b) $I_z = \pi d^4/64$, $W_z = \pi d^3/32$, $M_{imax} = 33{,}75$ kNm, d = 142 mm, $T_{max} = 45$ kN



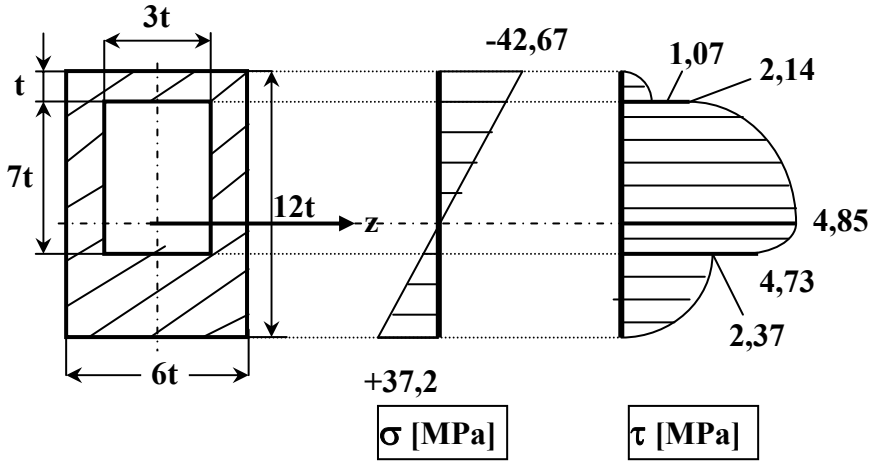
c) c) $I_z = \pi D^4\ [1-(d/D)^4]/64$, $W_z = \pi D^3\ [1-(d/D)^4]/32$, d = 142 mm, D = 199 mm, $M_{imax} = 33{,}75$ kNm, $T_{max} = 45$ kN,



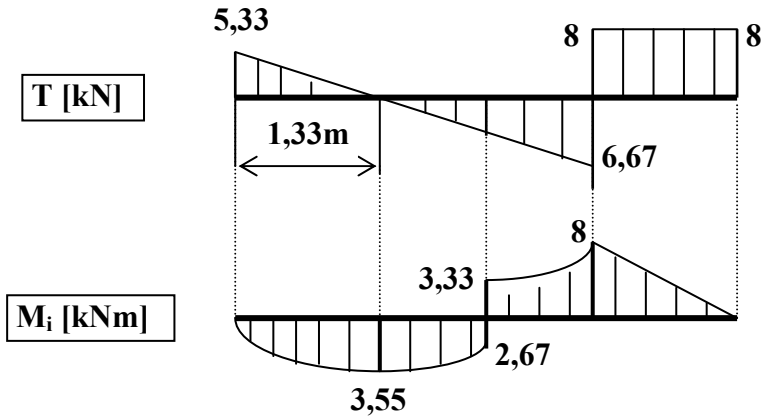
d) $y_G = 3{,}5\ t$, $I_z = 151{,}25\ t^4$, $W_{zmin} = 23{,}27\ t^3$, $M_{imax} = 33{,}75$ kNm, $T_{max} = 45$ kN, $t = 27$ mm



e) $y_G = 5{,}38\ t$, $I_z = 711{,}54\ t^4$, $W_{zmin} = 115{,}32\ t^3$ (compresiune), $W_{zmax} = 132{,}26\ t_3$ (întindere), $M_{imax} = 33{,}75$ kNm, $T_{max} = 45$ kN, $t_1 = 19$ mm (întindere), $t_2 = 15$ mm (compresiune), $t = 18{,}55$ mm ($t = 19$ mm).

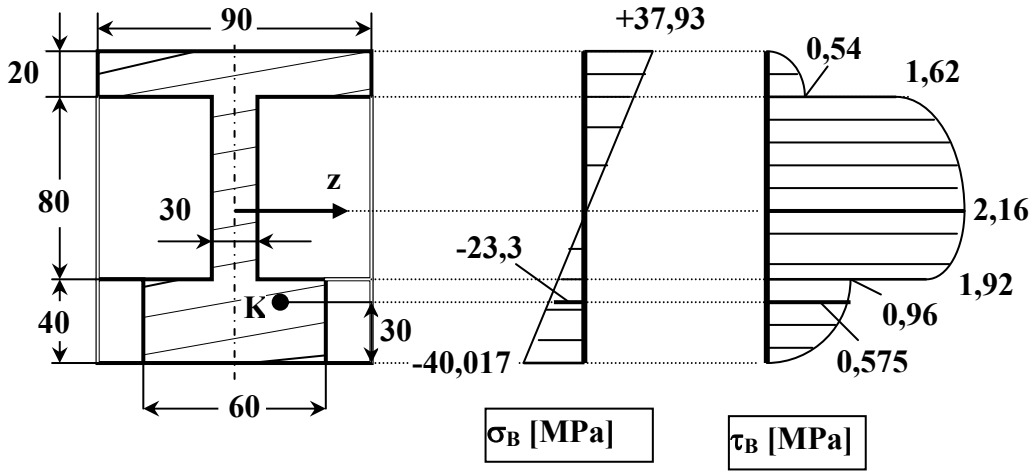


7R.5



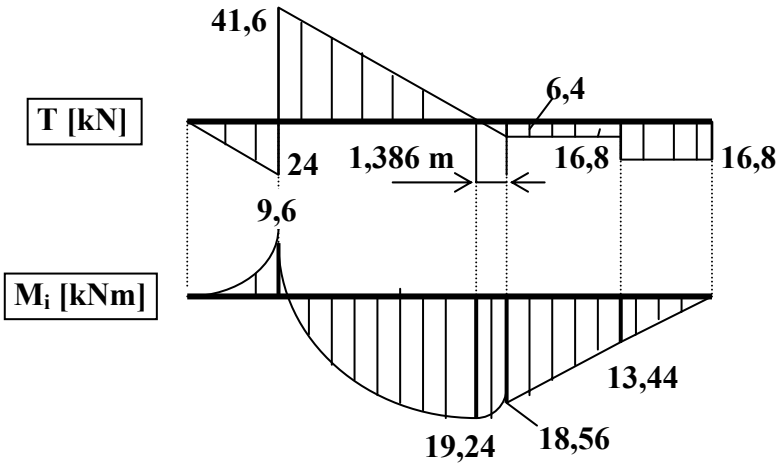
a) $M_{imax} = 8$ kNm, $y_z = 71{,}82$ mm, $I_z = 14{,}358 \cdot 10^6$ mm^4, $W_{zmin} = 1{,}999 \cdot 10^5$ mm^3, $\sigma_{max} = 40\,015$ MPa $< \sigma_a$

b) $T_B = -9{,}67$ kN, $M_{iB} = 8$ kNm



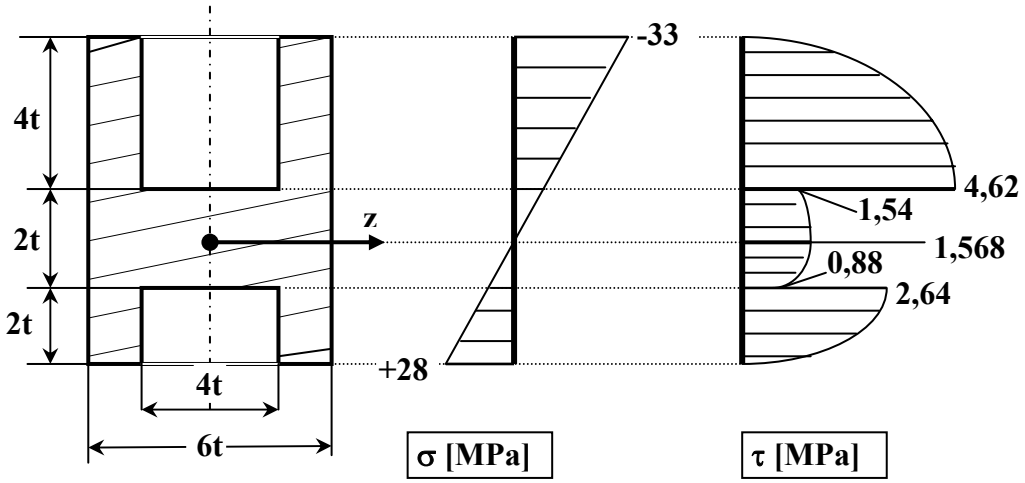
c) $\sigma_{K,B} = 23{,}3$ MPa, $\tau_{K,B} = -0{,}834$ MPa

7R.6

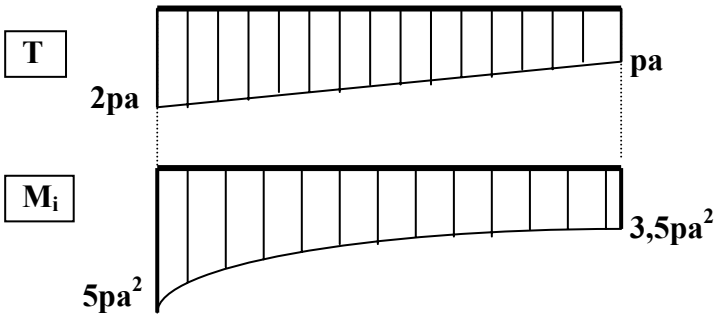


a) $M_{iz,max} = 19{,}24$ kNm, $T_{max} = 41{,}6$ kN, $y_G = 3{,}67$t, $I_z = 93{,}33$ t^4, $W_{z,min} = 21{,}54$ t^3, $W_{z,max} = 25{,}45$ t^3, $\sigma_{at} \cdot W_{z,max} \,/\, \sigma_{ac} \cdot W_{z,min} = 0{,}47 \Rightarrow$ întinderea este mai periculoasă decât compresiunea, t = 27,59 mm. Se va lua, t = 30 mm.

b) $I_z = 75{,}6 \cdot 10^6$ mm^4, $W_{z,min} = 5{,}815 \cdot 10^5$ mm^3, $W_{z,max} = 6{,}87 \cdot 10^5$ mm^3, $\sigma_{max,t} = 27{,}99$ MPa, $\sigma_{max,c} \approx -33$ MPa

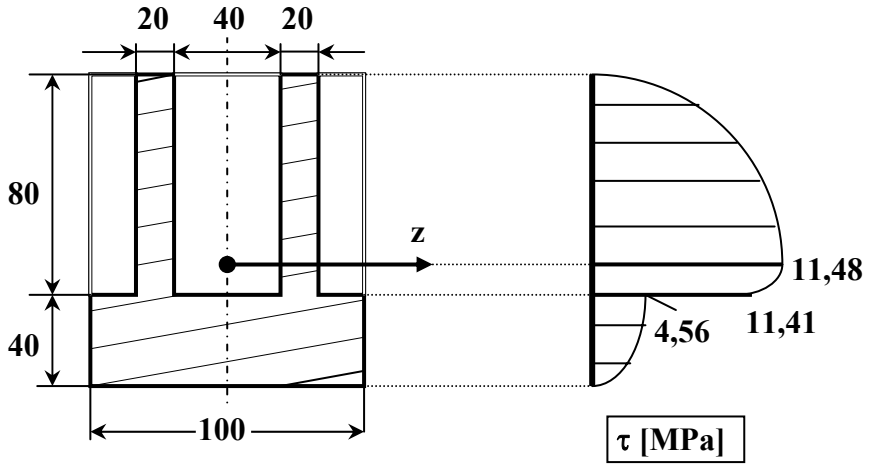


7R.7



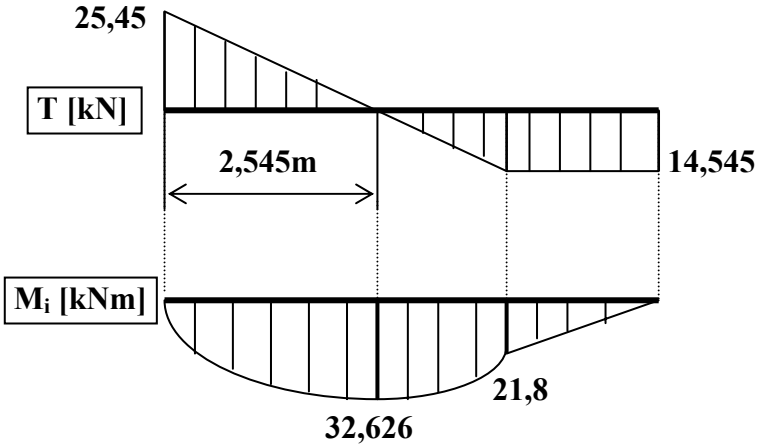
a) $M_{iz,max} = 5pa^2$, $y_G = 46{,}7$ mm, $I_z = 864{,}64$ cm^4, $W_{z,min} = 117{,}96$ cm^3, $W_{z,max} = 185{,}147$ cm^3, $p_{nec,t} = 3{,}08$ kN/m, $p_{nec,c} = 5{,}89$ kN/m, $\Rightarrow p_{nec} = 3{,}08$ kN/m.

b)



c) Dacă grinda ar fi aşezată răsturnată cu 180^0, $M_{imax,t} = \sigma_{at} \cdot W_{zmin} \Rightarrow p_{cap} = 1{,}96$ kN/m. Rezultă de aici că aşezarea economică este cea din enunțul problemei.

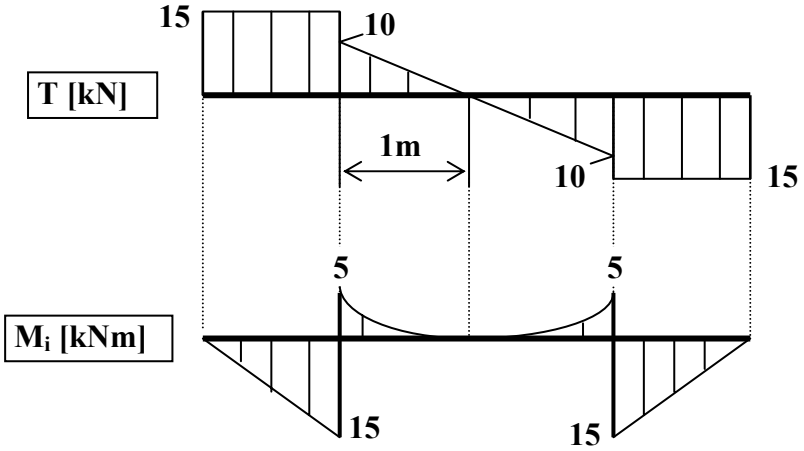
7R.8



$M_{iz,max} = 32{,}626$ kNm

a) $d = 13{,}3$ mm $\Rightarrow d = 14$ mm
b) $b = 7{,}04$ mm, $h = 14{,}08$ mm
c) $W_{znec} = 233$ cm^3 $\Rightarrow$ profilul **I22,** $W_{ynec} = 149$ cm^3 $\Rightarrow$ nu există un astel de profil
d) $D = 15{,}9$ mm, $d = 12{,}72$ mm
e) $I_z = 447{,}33\ t^4$, $W_z = 74{,}55\ t^3 \Rightarrow t = 1{,}46$ mm.

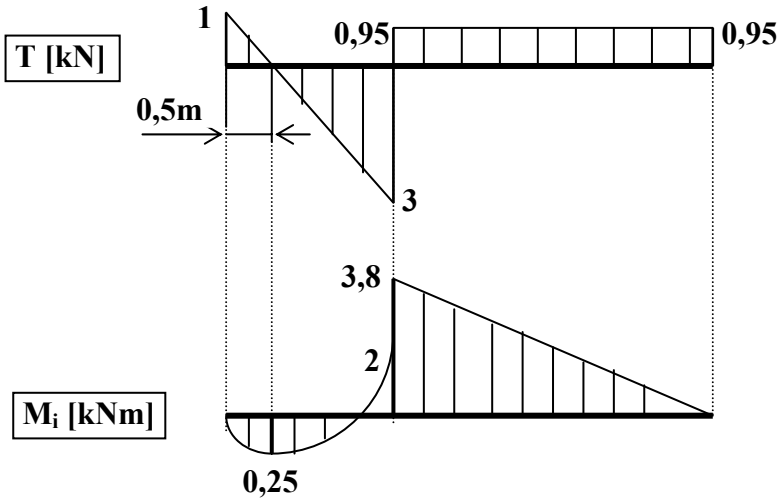
7R.9



a) y_G = 8,86 mm, I_z = 2883,0485 cm^4, $W_{z,min}$ = 325,4 cm^3, $M_{iz,max}$ = 15 kNm, $\sigma_{max} = \sigma_{max,t}$ = 37,15 MPa < σ_{at} = 40 MPa

b) T_{max} = 15 kN, b = 40 mm, S_z = 251,319 cm^3 $\Rightarrow$ τ_{max} = 3,268 MPa.

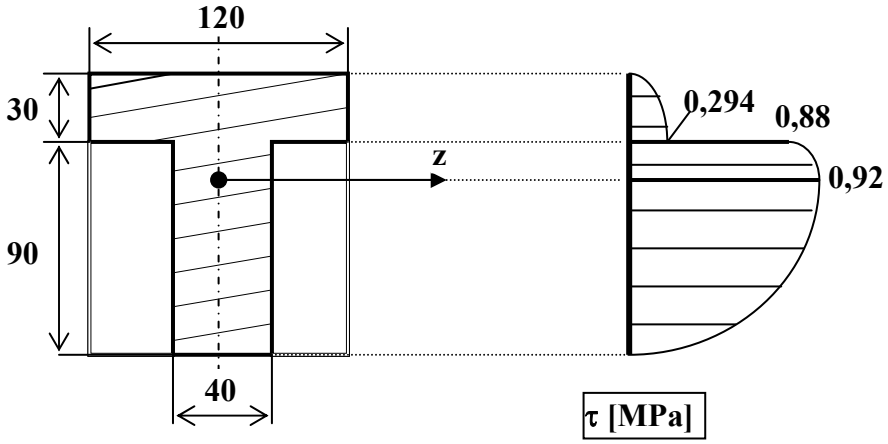
7R.10



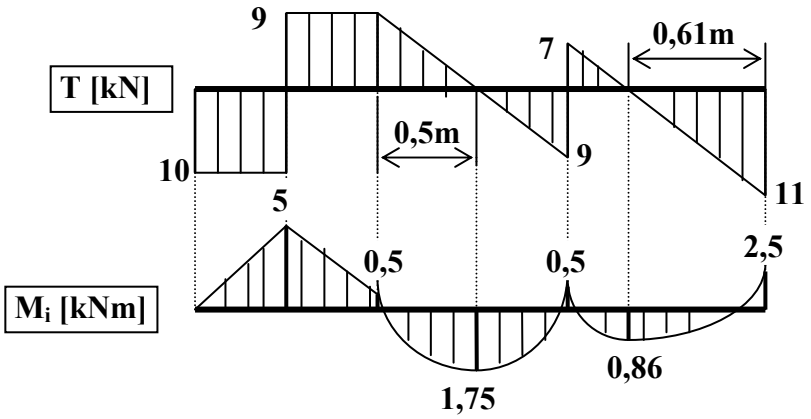
a) y_G = 75 mm, I_z = 9,18 ·10^6 mm^4, $W_{z,min}$ = 12,24 ·10^6 mm^3, $W_{z,max}$ = 20,4 ·10^6 mm^3, $M_{iz,max}$ = 3,8 kNm, $\sigma_{max,t}$ = 18,62 MPa, $\sigma_{max,c}$ = 31,04 MPa

b) Aşezarea economică este cea care asigură solicitarea fibrelor cu $W_{z,max}$ la solicitarea care are $\sigma_{a,min}$, respectiv $W_{z,min}$ la $\sigma_{a,max.}$ Deci, aşezarea economică este cea cu talpa în sus (ca în enunț)

c)

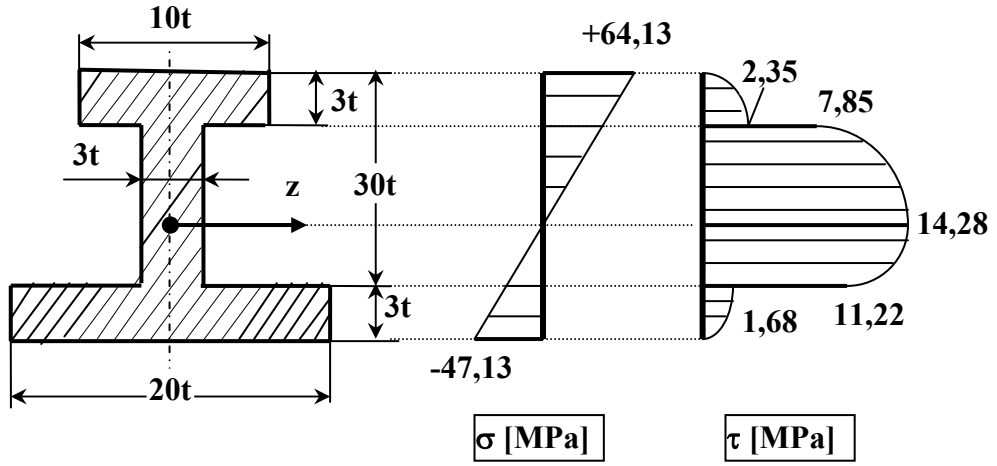


7R.11

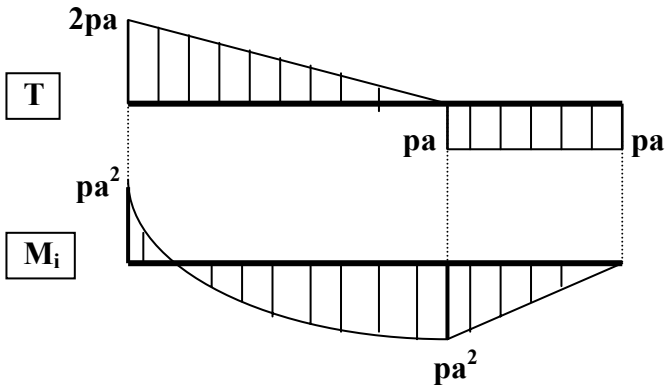


a) $y_G = 15{,}25$ t, $I_z = 2{,}996 \cdot 10^4$ t^4, $W_{z,min} = 1{,}4438 \cdot 10^3$ t^3, $W_{z,max} = 1{,}964 \cdot 10^3$ t^3, $M_{iz,max} = 5$ kNm, $t = 2{,}986$ mm $\Rightarrow$ t = 3 mm

b)



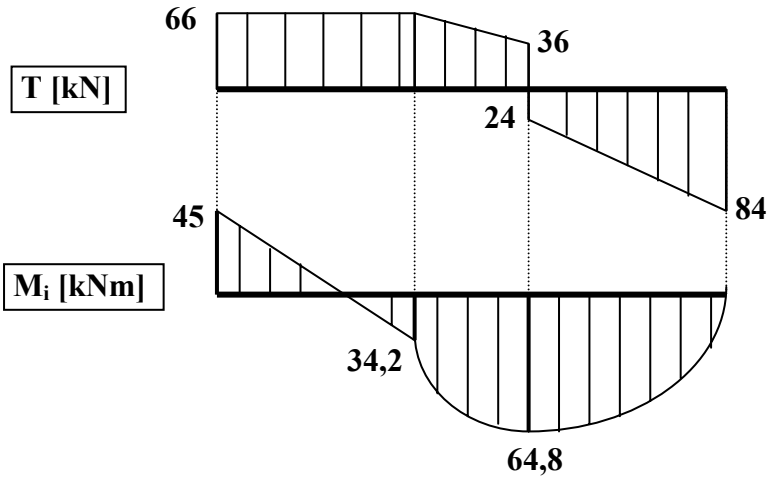
7R.12



a) $y_G = 43{,}33$ mm, $I_z = 3{,}88 \cdot 10^6$ mm^4, $W_{z,min} = 68{,}47 \cdot 10^3$ mm^3, $W_{z,max} = 89{,}545 \cdot 10^3$ mm^3 $M_{iz,max} = pa^2 \Rightarrow p_{cap} = 0{,}616$ kN/m

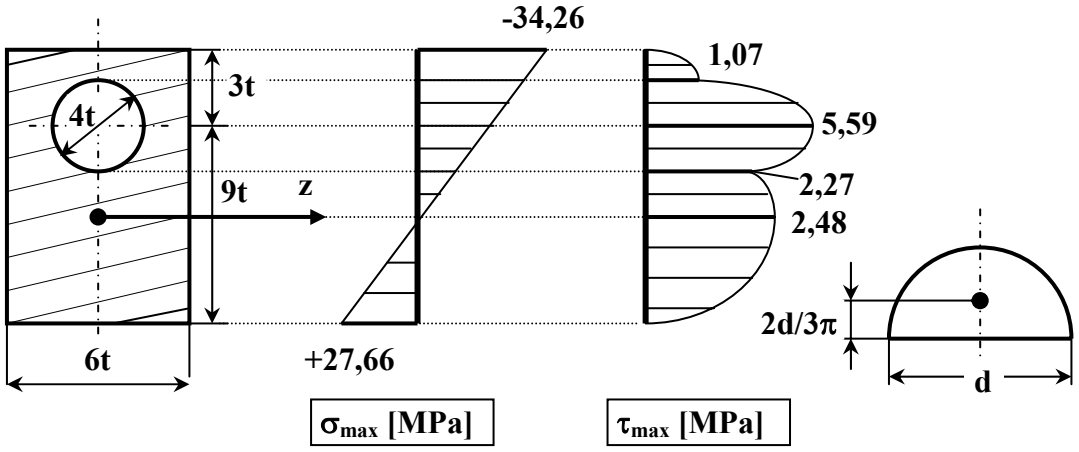
b) $T_{max} = 2pa = 2{,}052$ kN, b = 20 mm $\Rightarrow \tau_{max} = 1{,}39$ MPa, $M_{iz} = pa^2 \Rightarrow \sigma_{max} = 29{,}97$ MPa.

7R.13

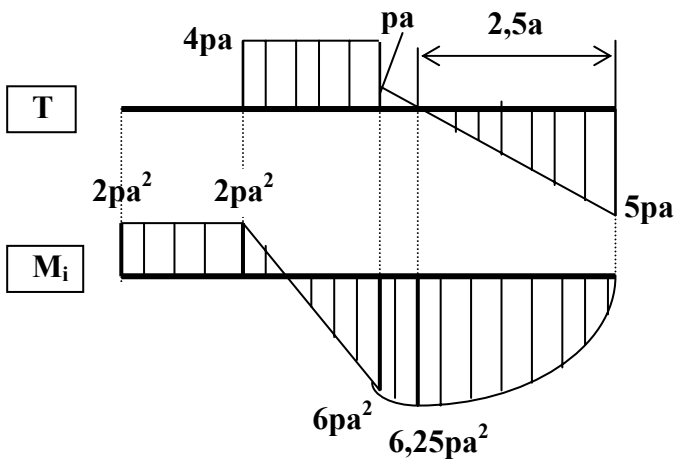


a) $y_G = 5{,}36$ t, $I_z = 714{,}42\ t^4$, $W_{z,min} = 107{,}59\ t^3$, $W_{z,max} = 133{,}29\ t^3$, $M_{iz,max} = 64{,}8$ kNm, $\Rightarrow t_{nec,t} = 25{,}3$ mm, $t_{nec,c} = 18{,}84$ mm $\Rightarrow$ t = 26 mm

b) c)

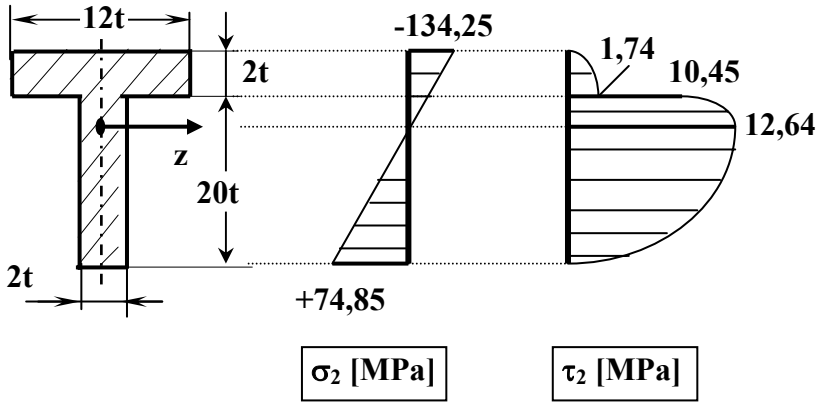


7R.14

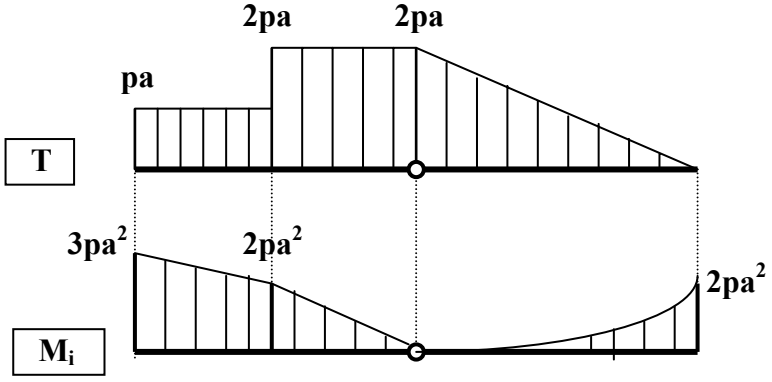


a) $y_G = 14{,}125\ t$, $I_z = 3.156{,}33\ t^4$, $W_{z,min} = 223{,}46\ t^3$, $W_{z,max} = 400{,}8\ t^3$, $M_{iz,max} = 6{,}25\ pa^2 = 6{,}75\ kNm \Rightarrow t = 5{,}86\ mm \Rightarrow t = 6\ mm$

b) $T_2 = 4\ pa = 14{,}4\ kN$, $M_{iz,2} = 6\ pa^2 = 6{,}48\ kNm$

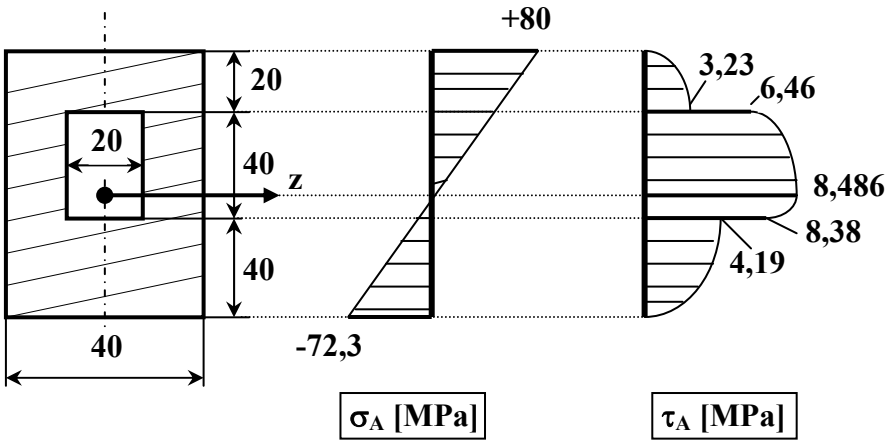


7R.15

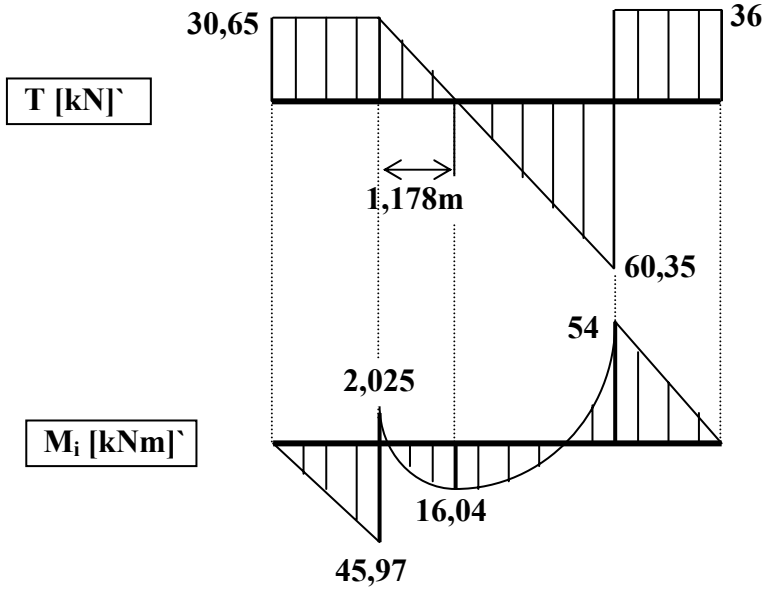


a) $y_G = 47{,}5$ mm, $I_z = 3{,}126 \cdot 10^6$ mm^4, $W_{z,min} = 59{,}55 \cdot 10^3$ mm^3, $M_{iz,max} = 3pa^2 \Rightarrow p_{cap} = 14{,}88$ kN/m

b)

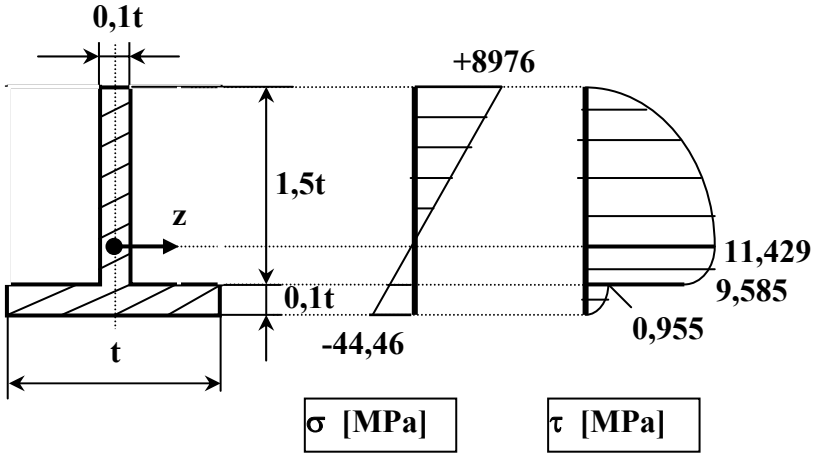


7R.16

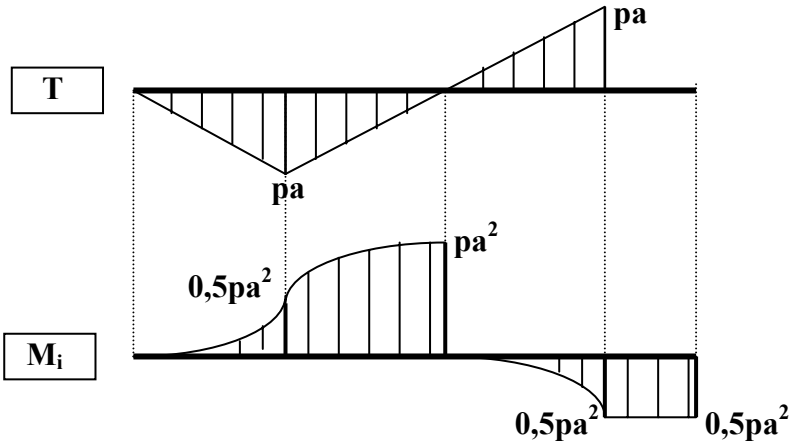


a) $y_G = 0{,}53$ t, $I_z = 0{,}067$ t^4, $W_{z,min} = 0{,}0622$ t^3, $W_{z,max} = 0{,}125$ t^3, $M_{iz,max} = 54$ kNm $\Rightarrow$ t = 212,815 mm. Se adoptă t = 213 mm

b) $T_{Bstânga} = 60{,}35$ kN, $M_{iz,Bstânga} = 54$ kNm, $\tau_{max,Bstânga} = 11{,}429$ MPa

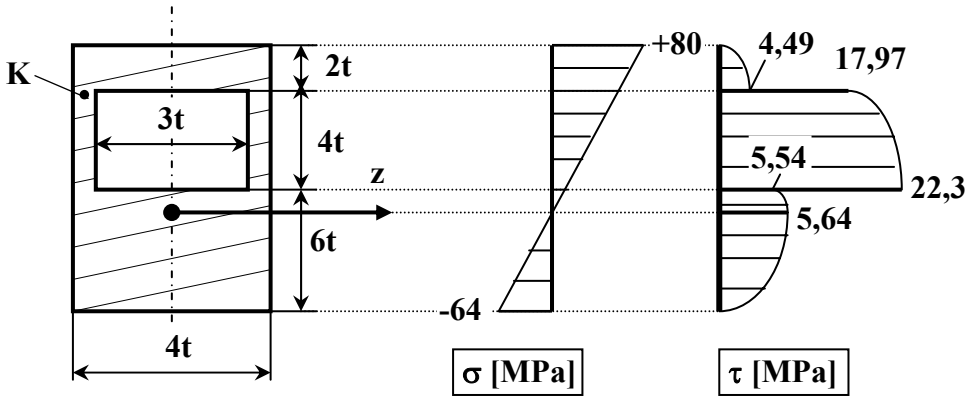


7R.17



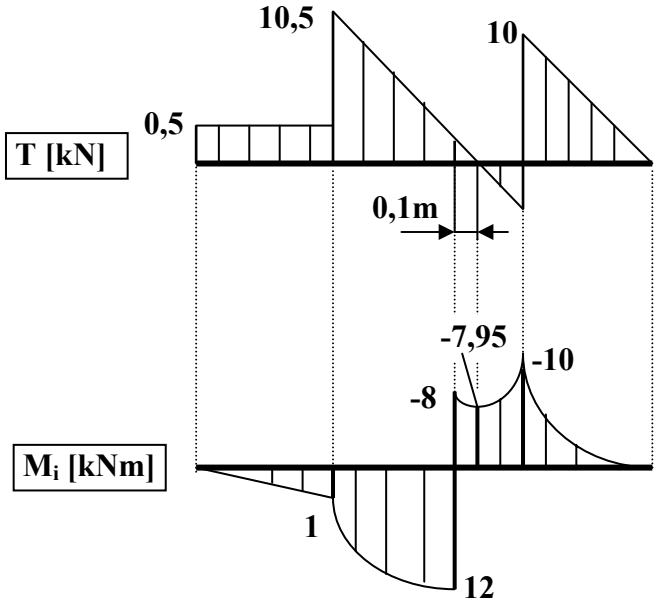
a) $y_G = 5{,}33$ t, $I_z = 496\ t^4$, $W_{z,min} = 74{,}4\ t^3$, $M_{iz,max} = pa^2 = 20$ kNm $\Rightarrow$ t = 11,88 mm. Se consideră t = 12 mm.

b) T = pa = 20 kN, $M_{iz} = 0{,}5pa^2 = 10$ kNm



c) $\sigma_K = +54{,}486$ MPa, $\tau_K = -17{,}97$ MPa, $\sigma_{1,K} = \sigma_K/2 + 0{,}5[(\sigma_K)^2 + 4(\tau_K)^2] = 64{,}499$ MPa, $\sigma_{2,K} = \sigma_K/2 - 0{,}5[(\sigma_K)^2 + 4\cdot(\tau_K)^2] = -10{,}013$ MPa, $\alpha_{1,K} = 0{,}5\cdot\text{arctg}(2\tau_K/\sigma_K) = -9{,}131^0$

7R.18

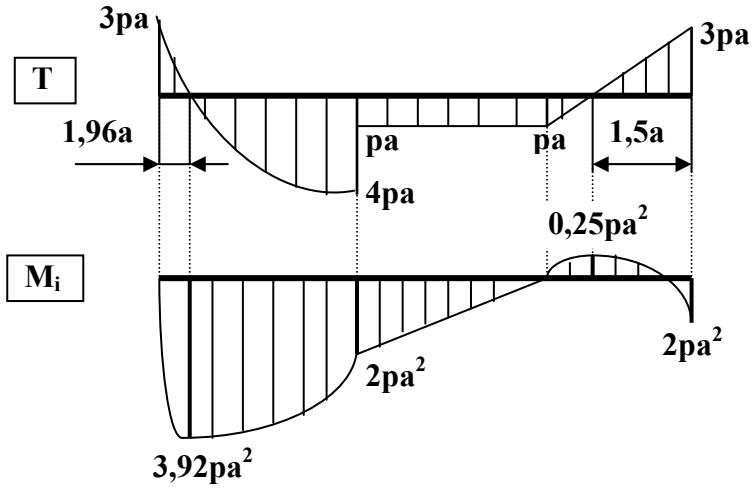


a) $y_G = 4{,}33$ t, $I_z = 652\ t^4$, $W_{z,min} = 85{,}18\ t^3$, $M_{iz,max} = 12$ kNm $\Rightarrow$ t = 10 mm

b) $\sigma_{K,Bdreapta} = -35{,}9$ MPa, $\tau_{K,Bdreapta} = 10{,}25$ MPa

c) $\alpha_1 = 14{,}86^0$, $\alpha_2 = 104{,}86^0$, $\sigma_1 = 2{,}72$ MPa, $\sigma_2 = -38{,}62$ MPa

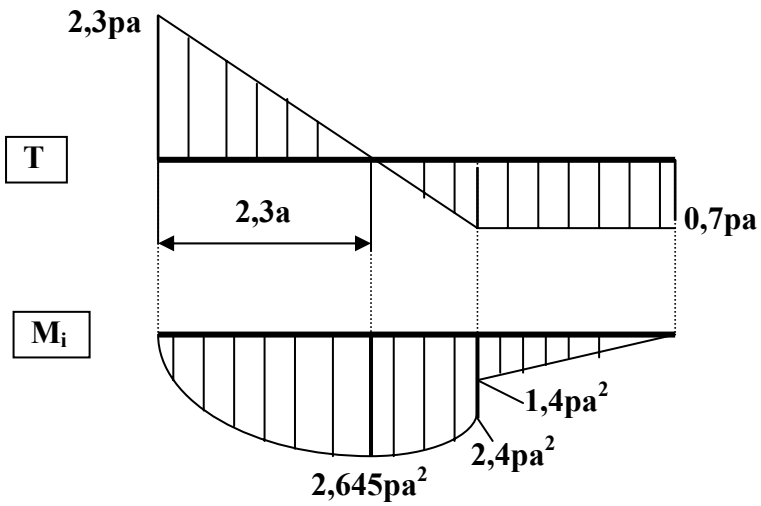
7R.19



a) $y_G = 3d$, $I_z = 71{,}95\ d^4$, $W_{z,min}$ $23{,}98\ d^3$, $M_{iz,max} = 3{,}92\ pa^2 \Rightarrow p = 29{,}36$ kN/m

b) $T_{Bstânga} = -4pa$, $M_{iz,Bstânga} = 2pa^2$, $\sigma_K = -12{,}75$ MPa, $\tau_K = -8{,}92$ MPa

7R.20

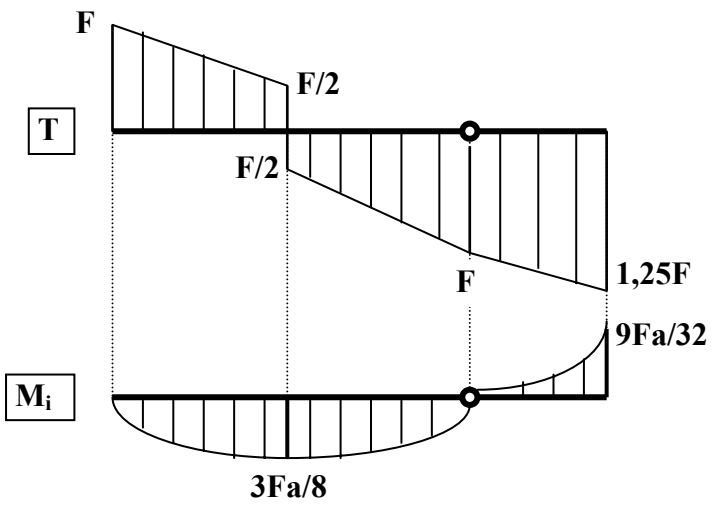


a) $y_G = 3{,}5\ t$, $I_z = 49{,}33\ t^4$, $W_{z,min} = 14{,}09\ t^3$, $M_{iz,max} = 2{,}645pa^2 \Rightarrow t = 23{,}21$ mm. Se adoptă: $t = 24$ mm

b) $T_{max} = 2{,}3\ pa \Rightarrow \tau_{max} = 4{,}96$ MPa

7R.21

a)

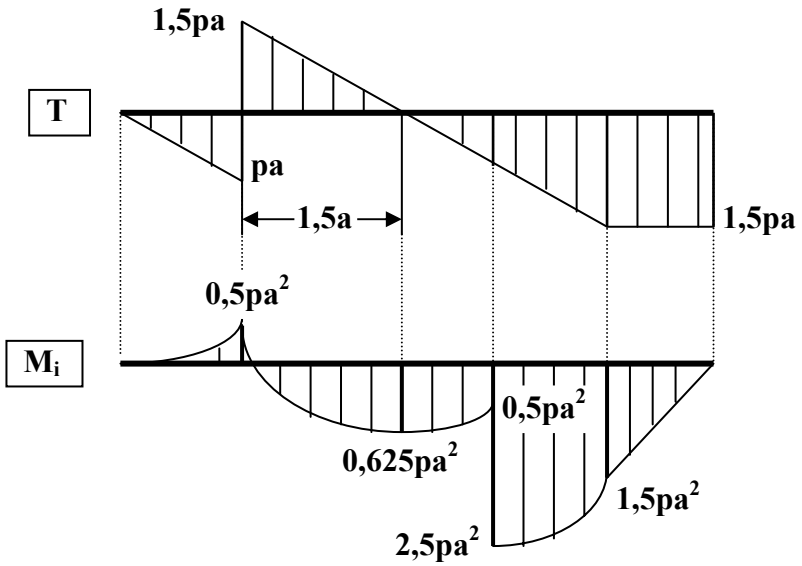


b) $y_G = 2t$, $I_z = 33{,}33\ t^4$, $W_{z,min} = 8{,}3325\ t^3$, $W_{z,max} = 16{,}665\ t^3$

c) $M_{iz,max} = 3Fa/8 = 1{,}125$ kNm. Pentru $W_{z,min} \Rightarrow t = 16{,}1$ mm, pentru $W_{z,max} \Rightarrow t = 8{,}58$ mm. Se adoptă $t = 17$ mm.

7R.22

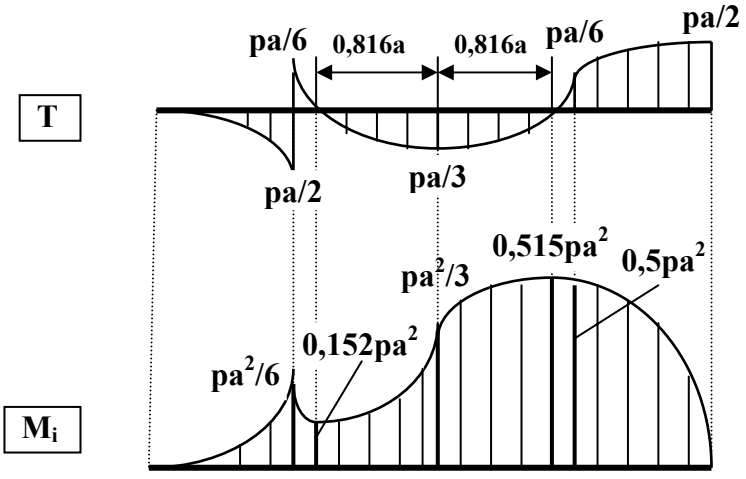
a)



b) $I_z = 77{,}43\ t^4$, $W_{z,min} = 25{,}81\ t^3$, $M_{iz,max} = 2{,}5pa^2 = 4$ kNm $\Rightarrow$ 10,1 mm. Se adoptă $t = 11$ mm.

7R.23

a)



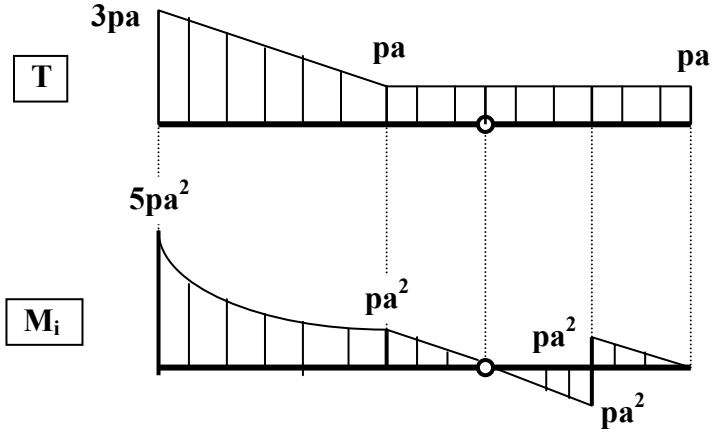
b) $I_z = 1937t^4/12$, $W_{y,min} = 1937t^3/54$, $M_{iz,max} = 0{,}515pa^2 = 6{,}592$ kNm $\Rightarrow t = 10{,}7$ mm

c) $$\sigma_S = \frac{M_{iz,max}}{I_z} \cdot 2{,}5t = 83{,}3 \quad MPa$$

$$\tau_S = \frac{T_{max} \cdot S_z}{b \cdot I_z} = \frac{0{,}5pa\left(3t^2 \cdot 4t + 2t^2 \cdot 3t\right)}{2t \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1937}{12} t^4} = \frac{108pa}{1937 t^2 \cdot \sqrt{2}} = 5{,}5 \quad MPa$$

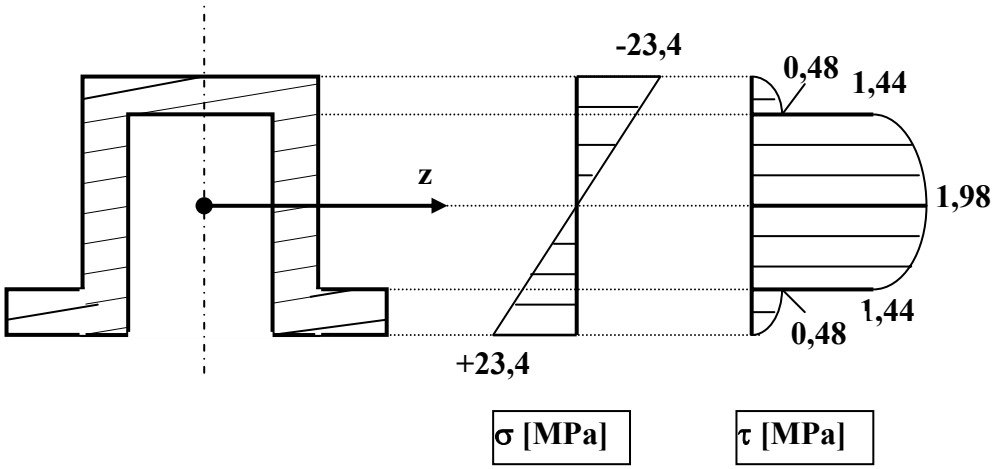
7R.24

a)



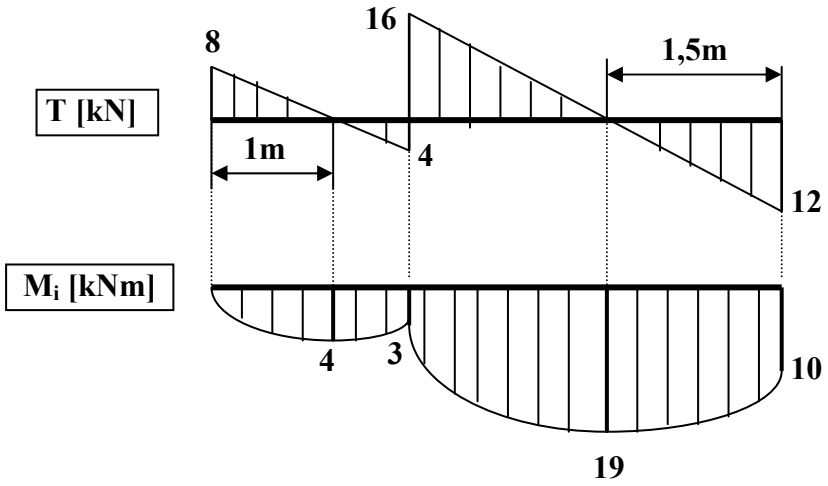
b) $y_G = 3{,}5a$, $I_z = 389{,}5a^4/3$, $W_{z,min} = 389{,}5a^3/10{,}5$, $M_{iz,max} = 5pa^2 = 7{,}5$ kNm $\Rightarrow$ t = 11,9 mm. Se adoptă t = 12 mm

c) $T = pa$, $M_{iz} = pa^2$



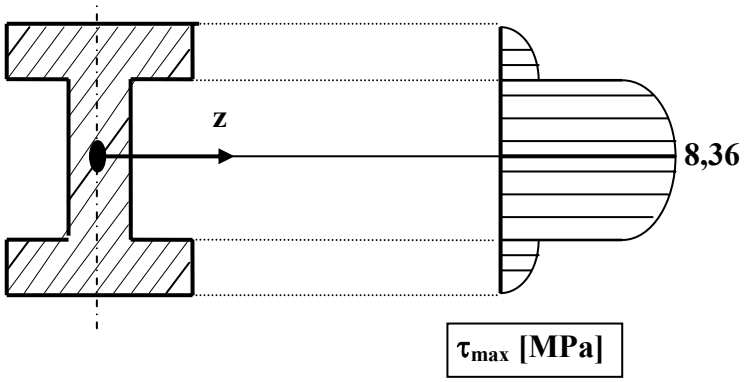
7R.25

a)



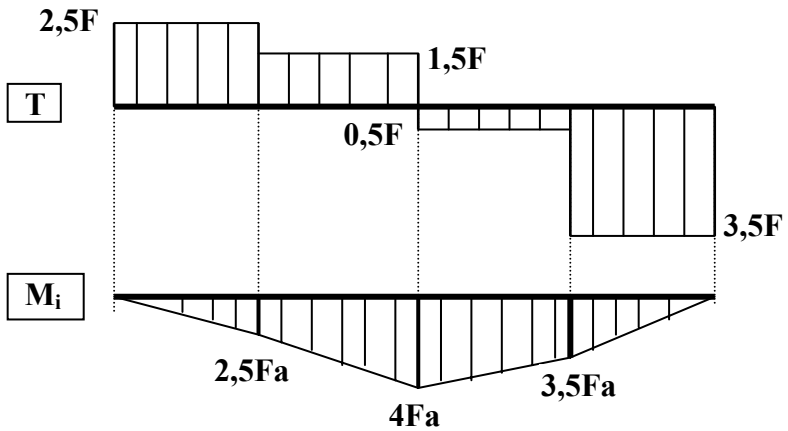
b) $y_G = 4t$, $I_z = 92\ t^4$, $W_{z,min} = 23\ t^3$, $M_{iz,max} = 19$ kNm $\Rightarrow$ t = 17,66 mm. Se adoptă t = 18 mm

c) $T_{max} = 16$ kN, $I_z = 8.948.505\ mm^4$, $S_{z,max} = 15a^3 = 82.616\ mm^3 \Rightarrow \tau_{max} = 8,36$ MPa



7R.26

a)

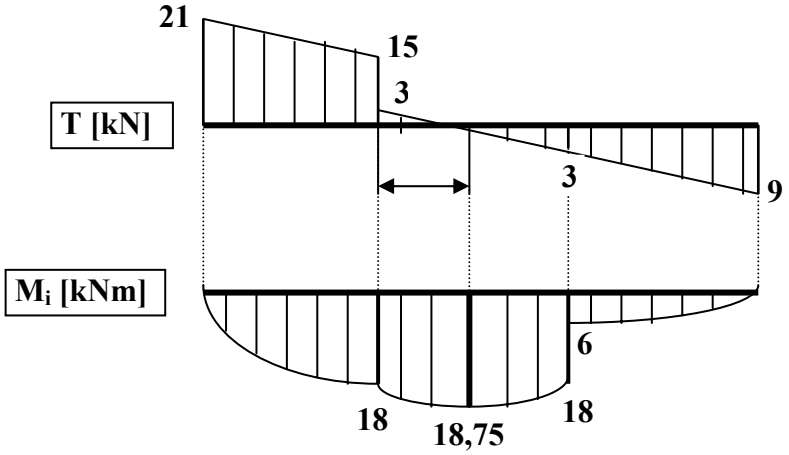


b) $y_G = 172$ mm, $I_z = 9.738{,}67$ cm^4, $W_{z,min} = 566{,}2$ cm^3, $W_{z,max} = 1.432{,}16$ cm^3, $M_{iz,max} = 4Fa$

Pentru $\sigma_{at} \Rightarrow F_1 = 4{,}5$ kN iar pentru $\sigma_{ac} \Rightarrow F_2 = 28{,}643$ kN. Se adoptă $F_{cap} = 4{,}5$ kN.

7R.27

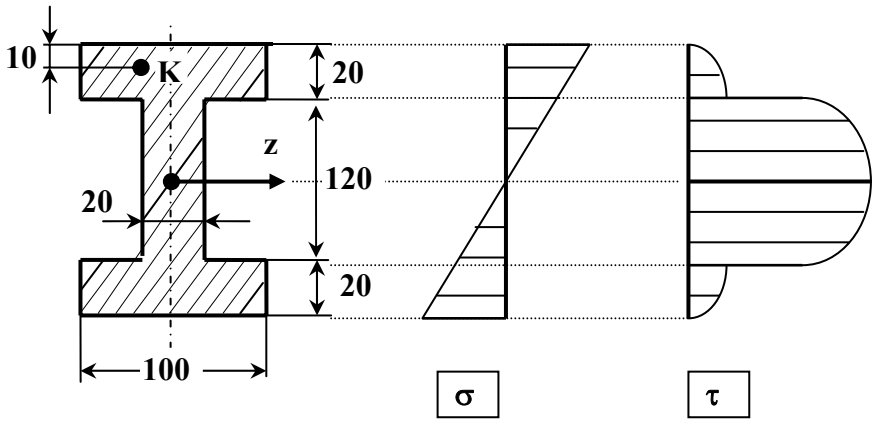
a)



b) $y_G = 80$ mm, $I_z = 22.613.33$ mm^4, $W_{z,min} = 282.666{,}67$ mm^3, $M_{iz,max} = 18{,}75$ kNm, $T_{max} = 21$ kN $\Rightarrow \sigma_{max} = 66{,}33$ MPa $< \sigma_a$, $\tau_{max} = 8{,}17$ MPa $< \tau_a$

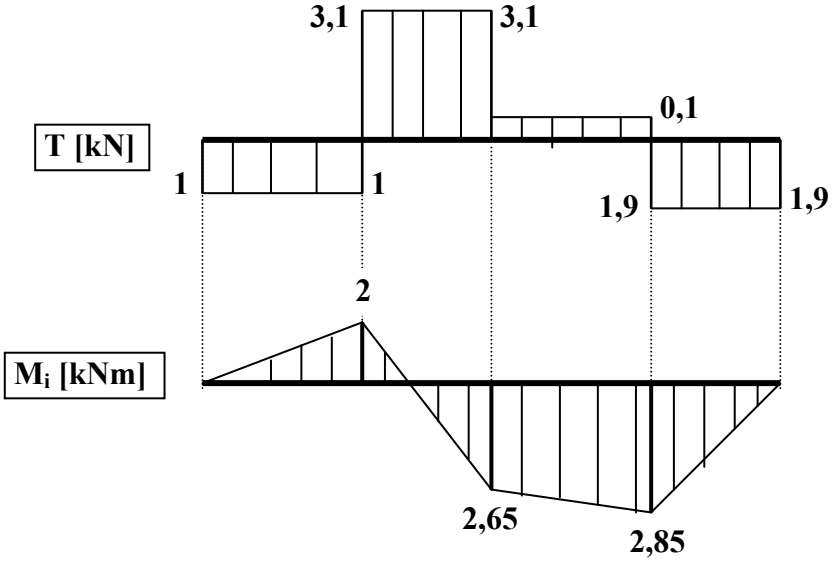
c) $M_{iz,2stânga} = 18$ kNm, $T_{2stânga} = 15$ kN $\Rightarrow \sigma_{K,2stânga} = -55{,}72$ MPa şi $\tau_{K,2stânga} = 6{,}63 \cdot 10^{-3}$ MPa

d)



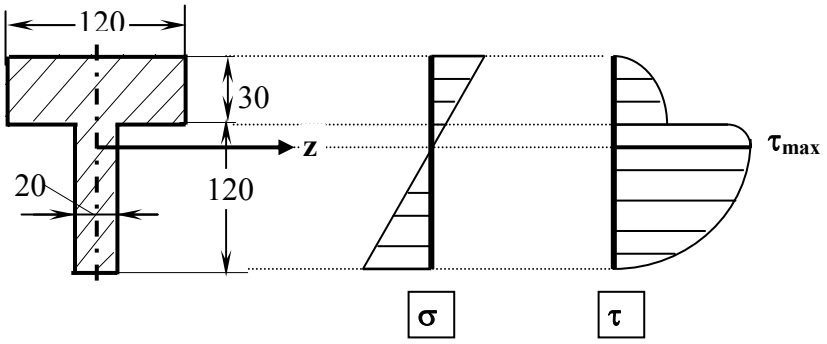
7R.28

a)



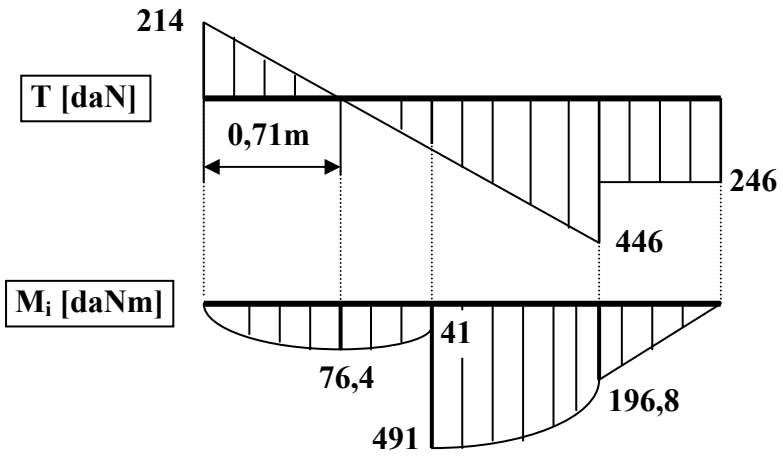
b) y_G = 105 mm, $I_z = 1125 \cdot 10^4$ mm^4, $M_{iz,max}$ = 2,85 kNm, $\Rightarrow$ $\sigma_{max,t}$ = 8 MPa < σ_{at} şi $\sigma_{max,c}$ = -26,6 MPa < σ_{ac}

c)



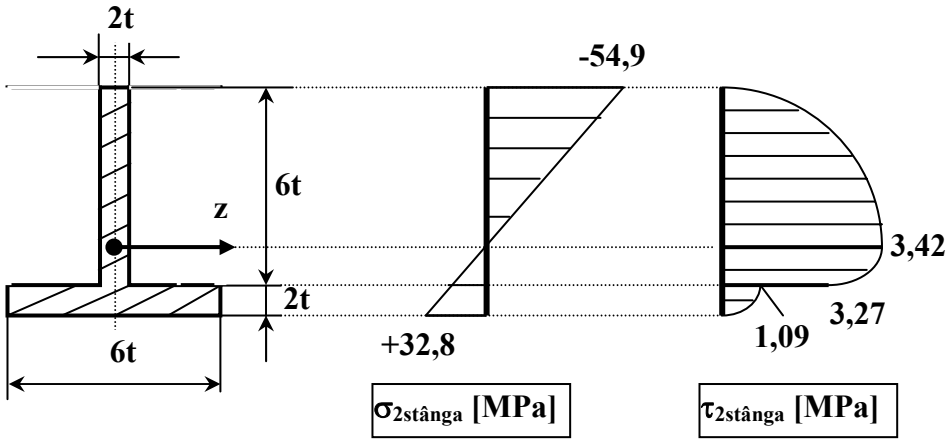
7R.29

a)



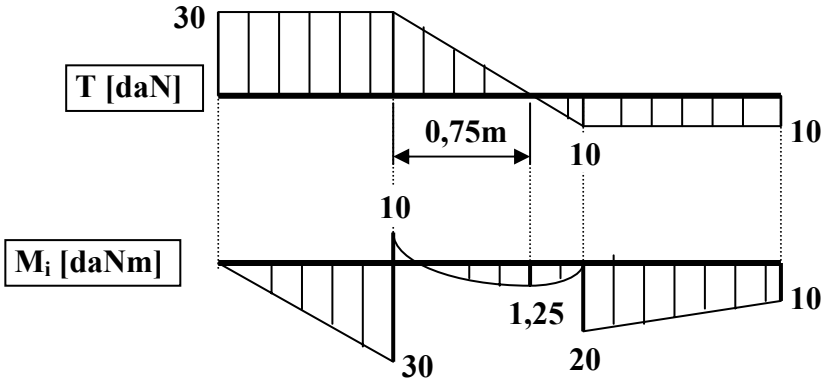
b) $y_G = 3t$, $I_z = 136\ t^4$, $W_{z,min} = 27{,}2\ t^3$, $M_{iz,max} = 491$ daNm $\Rightarrow$ t = 1,06 cm. Se adoptă t = 1,1cm = 11 mm

c)



7R.30

a)

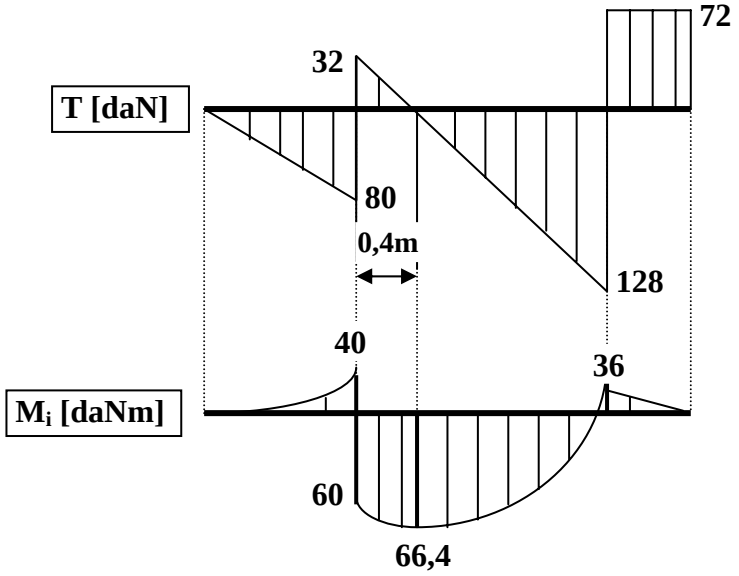


b) $I_z = 567\ cm^4$, $M_{iz,max} = 30$ daNm, $y_{max} = 60$ mm $\Rightarrow \sigma_{max} = 3{,}174$ MPa $< \sigma_a$

c) $M_{iz,1} = 15$ daNm, $y_c = 30$ mm $\Rightarrow \sigma_{K,1} = 0{,}794$ MPa, $T_1 = 30$ daN, $b_c = 40$ mm, $S_z = 54\ cm^3 \Rightarrow \tau_{K,1} = 0{,}0714$ MPa

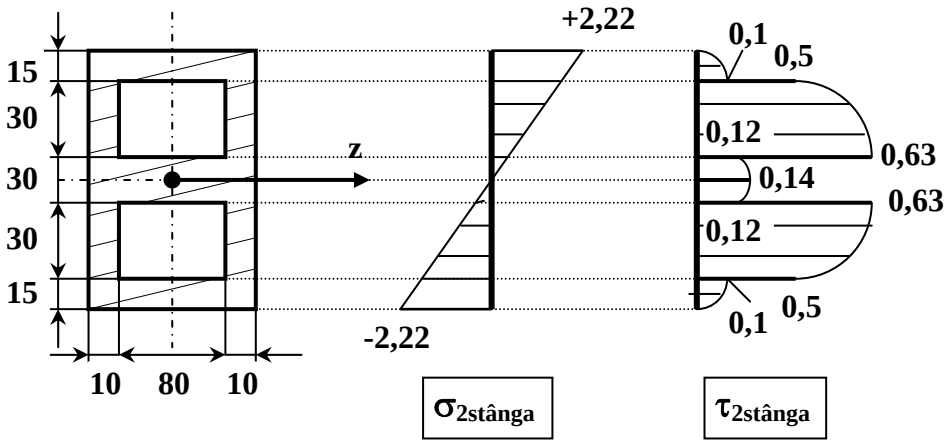
7R.31

a)



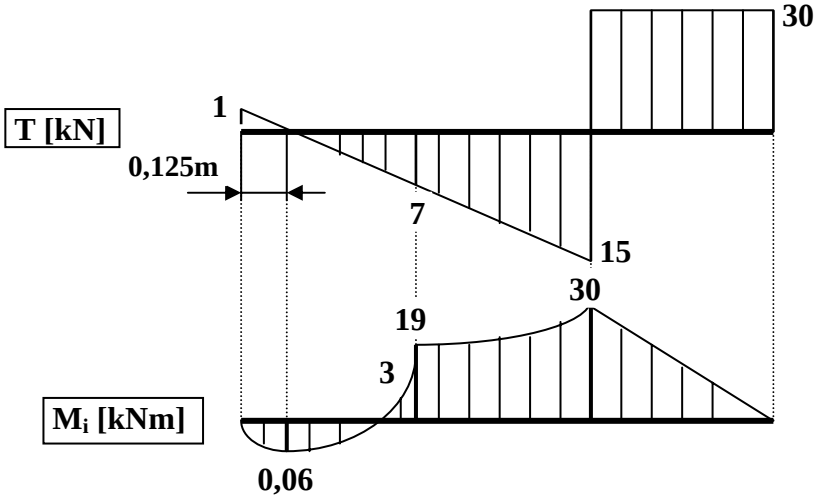
b) $y_G = 60$ mm, $I_z = 972 \cdot 10^4$ mm^4, $W_{z,min} = 162 \cdot 10^3$ mm^3, $M_{iz,max} = 66{,}4$ daNm, $T_{max} = 128$ daN $\Rightarrow \sigma_{max} = 4{,}09$ MPa $< \sigma_a$, $\tau_{max} = 0{,}63$ MPa $< \tau_a$

c)



7R.32

a)



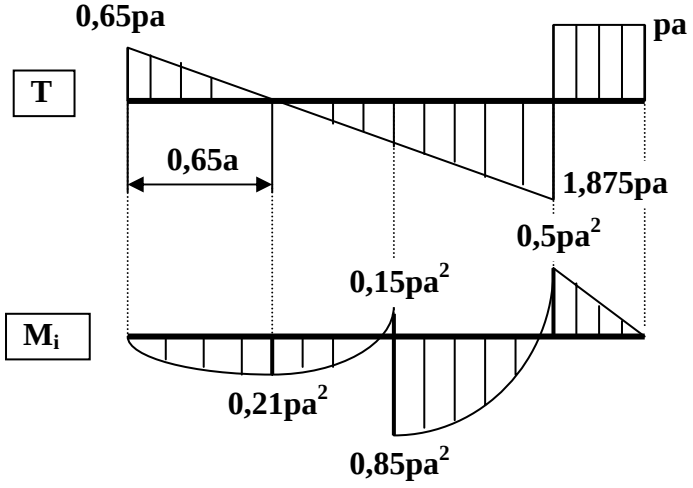
b) $y_G = 7{,}25$ t, $I_z = 440{,}67\ t^4$, $W_{z,min} = 60{,}8\ t^3$, $M_{iz,max} = 30$ kNm $\Rightarrow$ t = 14,8 mm. Se adoptă t = 15 mm

c) $M_{iz} = 15$ kNm, $y_K = 3{,}75$ t, $I_z = 2.184{,}27\ cm^4 \Rightarrow \sigma_K = +37{,}8$ MPa

T = 30 kN, b = 6t = 90 mm $\Rightarrow \tau_K = 1{,}28$ MPa

7R.33

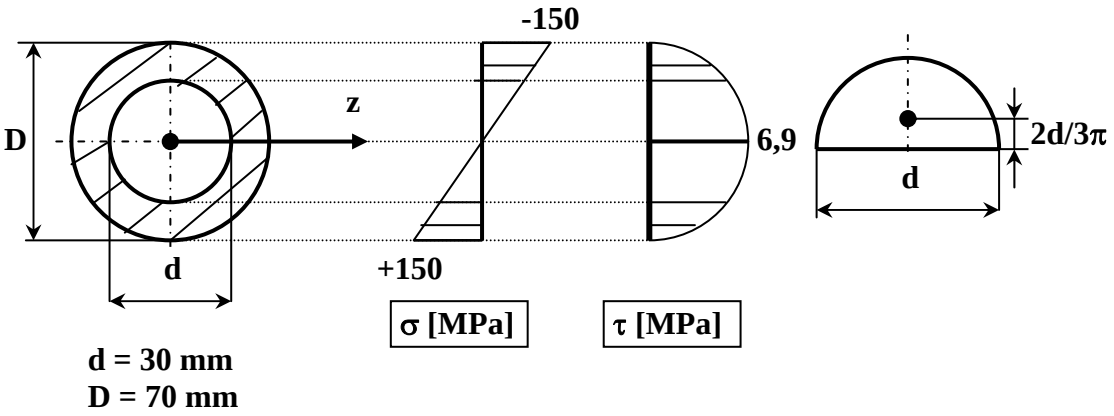
a)



b) $y_G = D/2$, $I_z = 113{,}88 \cdot 10^4\ mm^4$, $W_{z,min} = 32{,}53 \cdot 10^3\ mm^3$, $M_{iz,max} = 0{,}85\ pa^2 \Rightarrow p_{cap} = 3{,}98$ kN/m

c) Pentru încovoiere secțiunea periculoasă este secțiunea în care acționează momentul concentrat (pa^2).

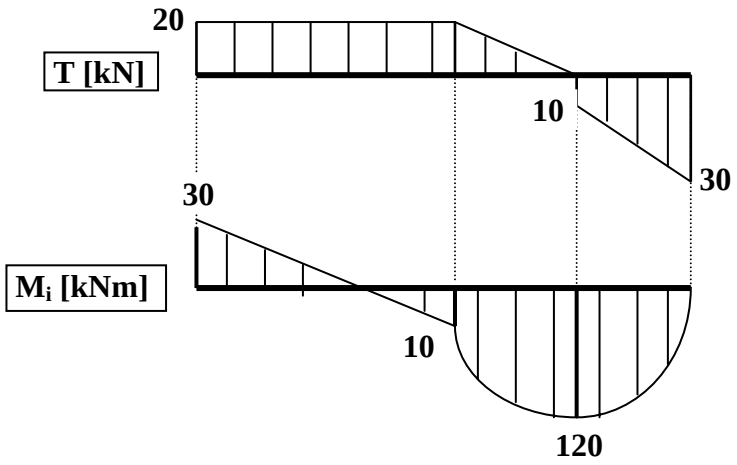
În secțiunea $B_{stânga}$ avem: $T_{Bstânga} = 1{,}875pa$, b = 40 mm, $S_z = 3{,}33 \cdot 10^3$ mm^3



d = 30 mm
D = 70 mm

7R.34

a)



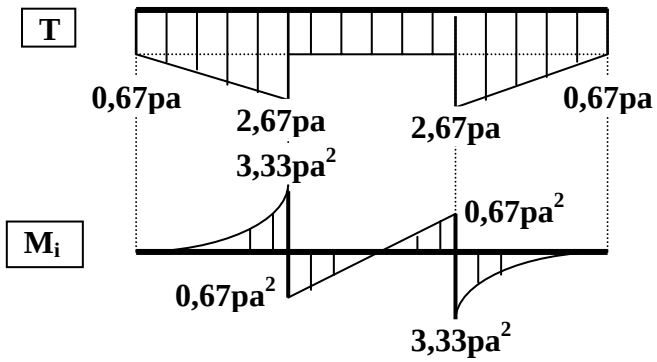
b) $y_G = 5t$, $I_z = 136\ t^4$, $W_{z,min} = 27{,}2\ t^3$, $M_{iz,max} = 10$ kNm $\Rightarrow$ t = 19,7 mm. Se adoptă t = 20 mm

c) $M_{iz,1} = 10$ kNm, $\Rightarrow \sigma_{max,1} = 27{,}5$ MPa

$T_1 = 20$ kN, b = 2t $\Rightarrow \tau_{max,1} = 4{,}59$ MPa

7R.35

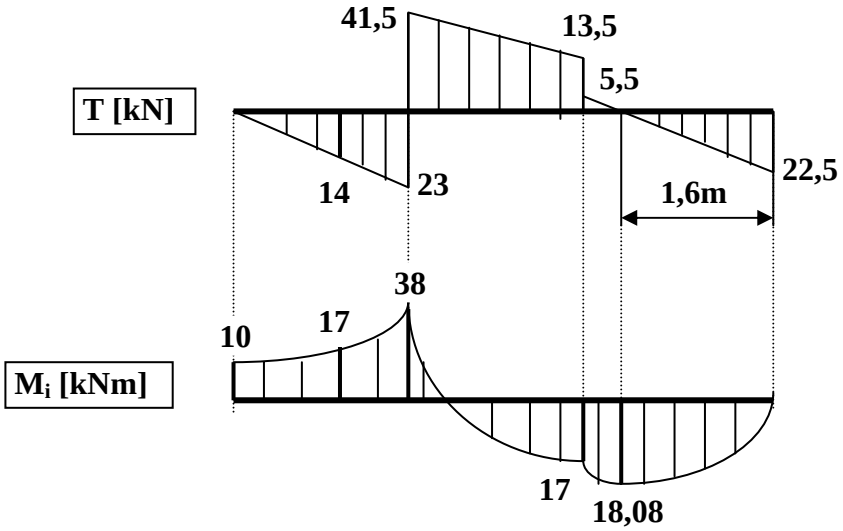
a)



b) $y_G = 94{,}6$ mm, $I_z = 6.092 \cdot 10^4$ mm^4, $W_{z,min} = 64{,}39 \cdot 10^4$ mm^3, $M_{iz,max} = 3{,}33\ pa^2$, $\Rightarrow p \cong 29$ kN/m

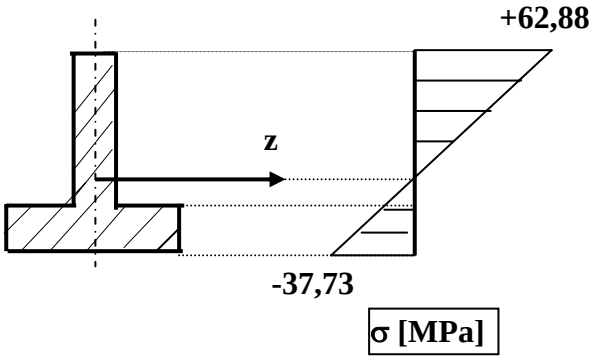
c) $T_{max} = 2{,}67\ pa = 77{,}43$ kN, b = 100 mm, $I_z = 6.092 \cdot 10^4$ mm^4, $S_z = 44{,}745 \cdot 10^4$ mm^3 $\Rightarrow \tau_{max} = 5{,}59$ MPa

7R.36



a) $y_G = 1{,}5t$, $I_z = 8{,}5\ t^4$, $W_{z,min} = 3{,}4\ t^3$, $M_{iz,max} = 38$ kNm $\Rightarrow$ t = 42,07 mm. Se adoptă t = 43 mm

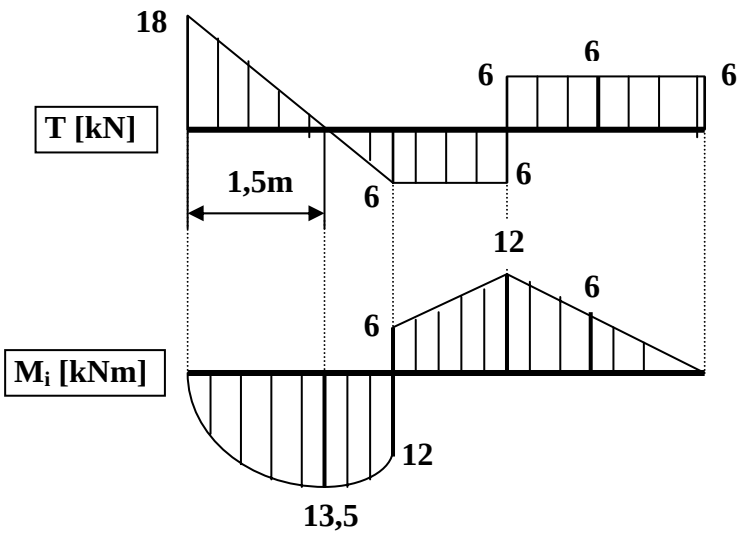
b) $M_{iz} = 17$ kNm



c) T = 14 kN, b = t = 43 mm $\Rightarrow \tau_K = 1{,}78$ MPa

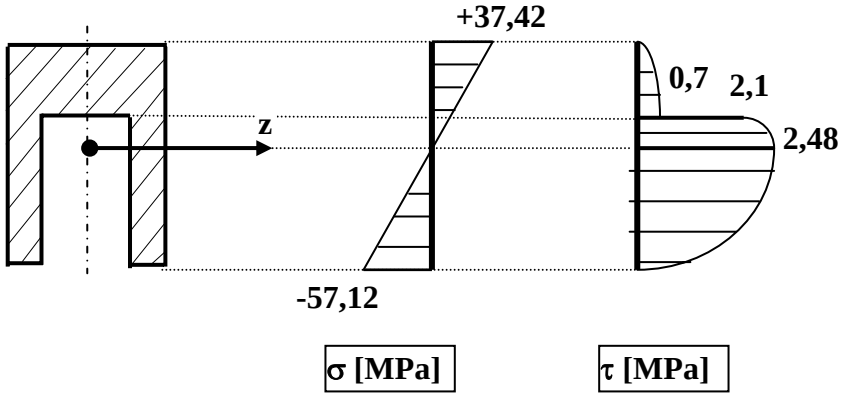
7R.37

a)



b) $y_G = 7{,}25t$, $I_z = 440{,}66\ t^4$, $W_{z,min} = 60{,}78\ t^3$, $M_{iz,max} = 13{,}5$ kNm $\Rightarrow$ t = 11,39 mm. Se adoptă t = 12 mm

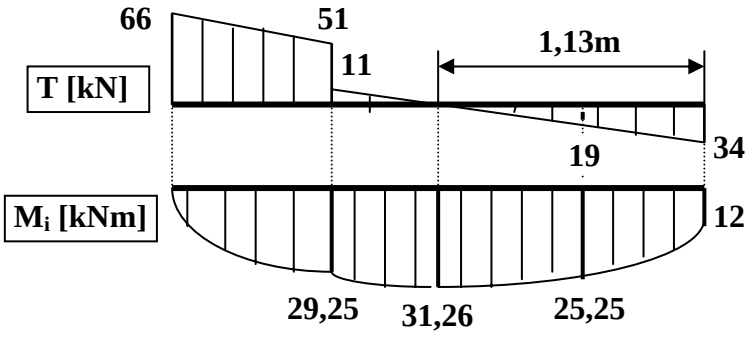
c) T = 6 kN, M_{iz} = 6 kNm



d) M_{iz} = 6 kNm, $y_K = 3{,}75$ t $\Rightarrow \sigma_K = +29{,}54$ MPa
T = 6 kN, b = 6t $\Rightarrow \tau_K = 0{,}4$ MPa

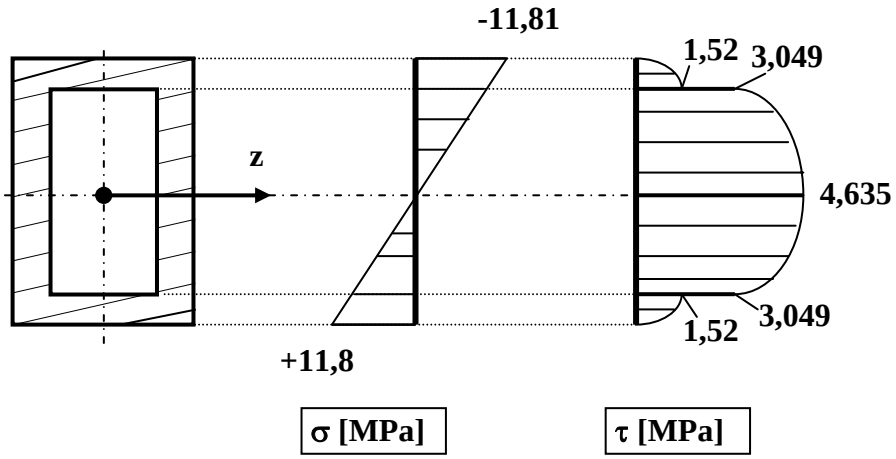
7R.38

a)



b) $y_G = 7t$, $I_z = 1.496\ t^4$, $W_{z,min} = 213{,}71\ t^3$, $M_{iz,max} = 31{,}26$ kNm $\Rightarrow t = 9{,}91$ mm. Se adoptă $t = 10$ mm

c) $M_{iz} = 25{,}25$ kNm, $T = 19$ kN

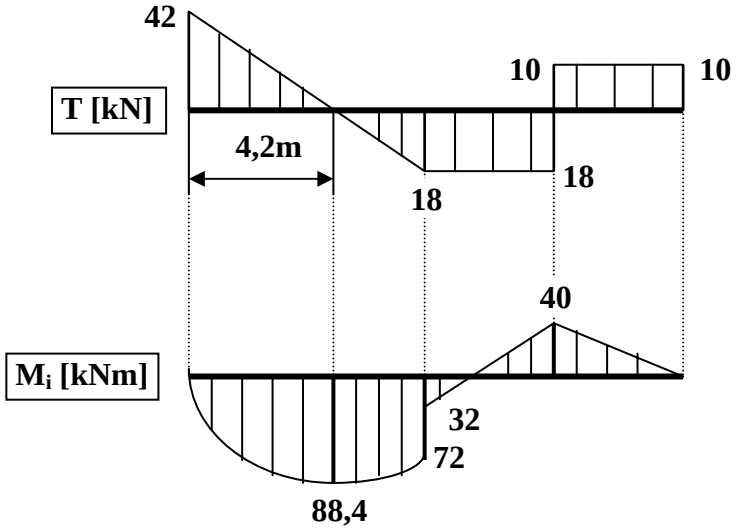


d) $M_{iz} = 25{,}25$ kNm, $y_K = 2t \Rightarrow \sigma_K = -33{,}75$ MPa

$T = 19$ kN, $b = 4t = 40$ mm $\Rightarrow \tau_K = 4{,}38$ MPa

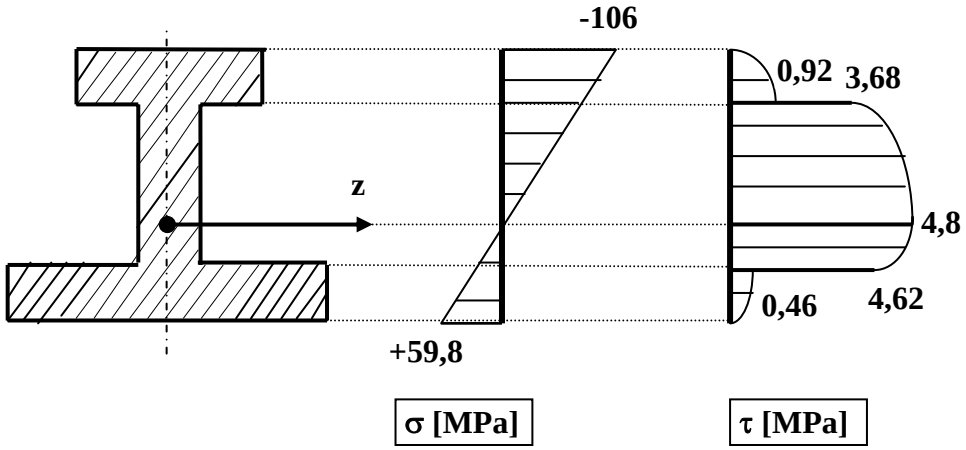
7R.39

a)



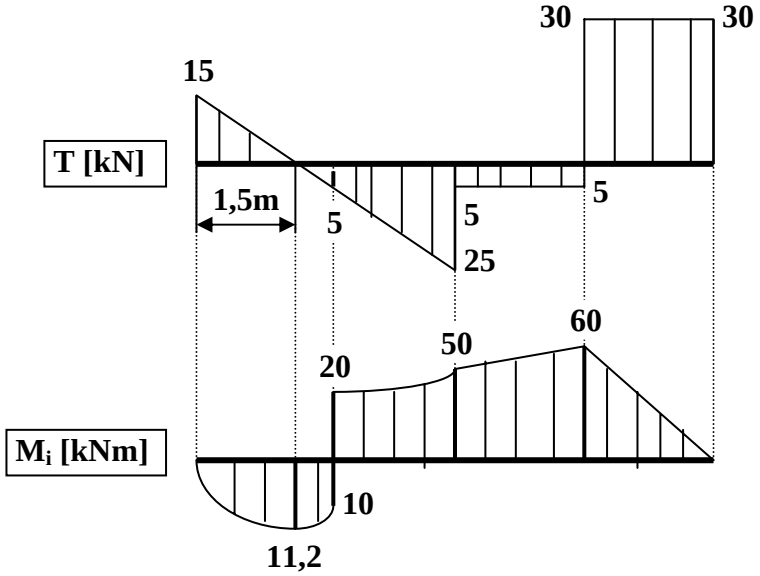
b) $y_G = 4{,}34$ t, $I_z = 652\ t^4$, $W_{z,min} = 85\ t^3$, $M_{iz,max} = 88{,}4$ kNm $\Rightarrow t = 19{,}2$ mm. Se adoptă $t = 20$ mm

c) $M_{iz} = 72$ kNm, $T = 18$ kN



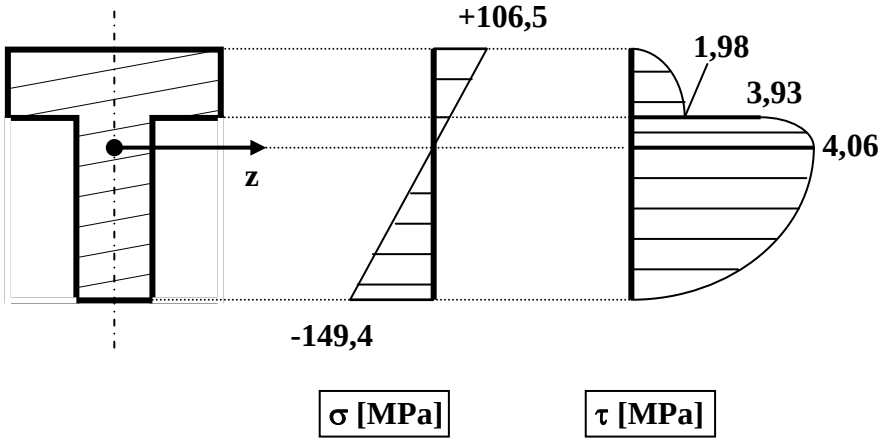
7R.40

a)



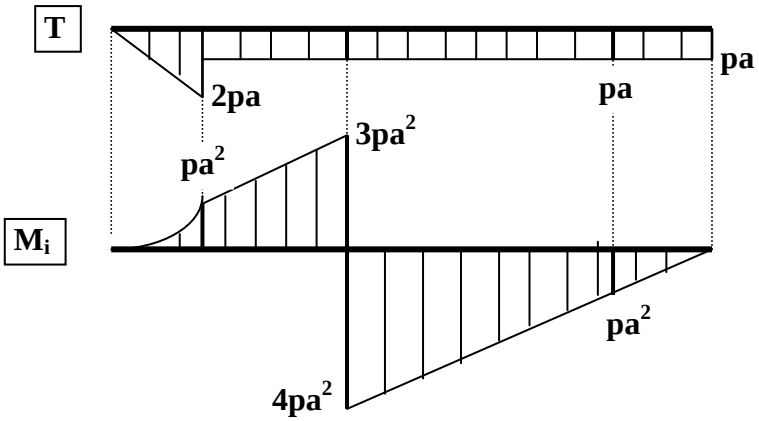
b) $y_G = 3{,}5$ t, $I_z = 49{,}3\ t^4$, $W_{z,min} = 14{,}1\ t^3$, $M_{iz,max} = 60$ kNm $\Rightarrow$ a = 31 mm

c) $M_{iz} = 60$ kNm, T = 30 kN



7R.41

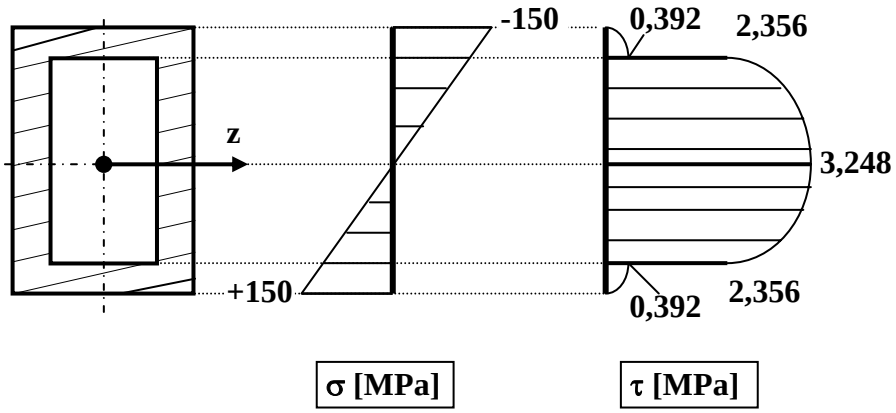
a)



b) $y_G = 12$ t, I_z 7.157,33 t^4, $W_z = 596{,}44\ t^3$

c) $M_{iz,max} = 4pa^2 \Rightarrow t = 6{,}853$ mm (nu s-a rotunjit)

d)

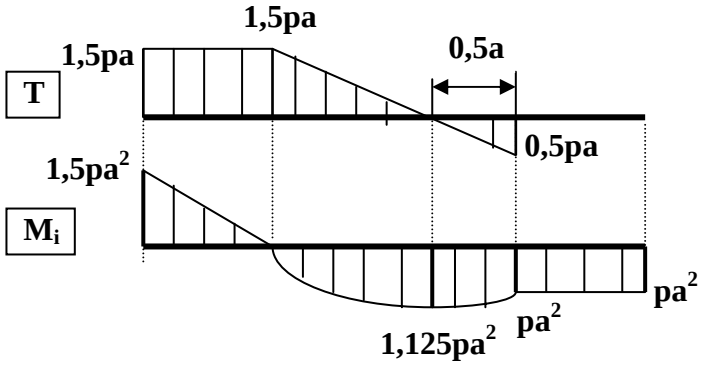


e) $M_{iz} = 3pa^2$, $T = pa \Rightarrow \sigma_K = +93{,}75$ MPa, $\tau_K = 2{,}356$ MPa

f) $tg2\alpha_1 = 0{,}05026 \Rightarrow \alpha_1 = 82{,}26^0$, $\alpha_2 = 82{,}26^0 + \pi/2$, $\sigma_1 = +93{,}81$ MPa, $\sigma_2 = -0{,}06$ MPa

7R.42

a)



b) $y_G = 3{,}783$ t, $I_z = 155{,}946\ t^4$, $W_{z,min} = 36{,}98\ t^3$, $M_{iz,max} = 1{,}5pa^2 \Rightarrow t = 20$ mm

c) $M_{iz} = pa^2$, $y_k = 2{,}217$ t $\Rightarrow \sigma_k$ -53,31 MPa

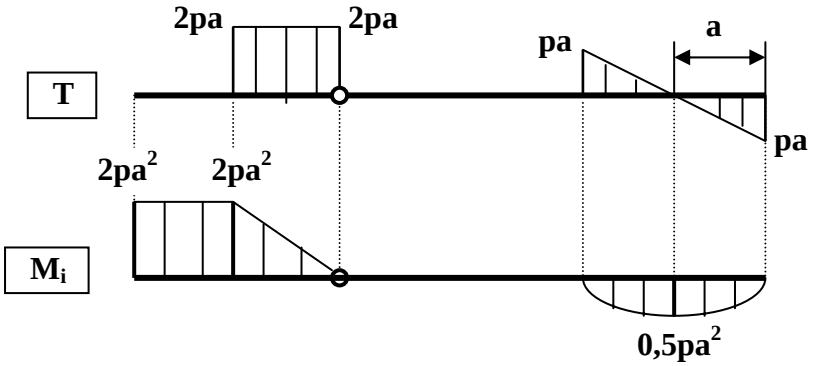
T = 0,5pa, b = 2t $\Rightarrow \tau_k$ = -2,59 MPa

$tg2\alpha_1 = 0{,}09716$ rad, $\alpha_1 = 2{,}77^0$, $\alpha_2 = 2{,}77^0 + \pi/2$, σ_1 = -53,43 MPa, σ_2 = +0,12 MPa

d) nu face obiectul acestui capitol

7R.43

a)



b) $y_G = 6$ t, $I_z = 733{,}34\ t^4$

d) $W_{z,min} = 122{,}22\ t^3$, $M_{iz,max} = 2pa^2 \Rightarrow t = 9{,}028$ mm. Se adoptă t = 9 mm

e) $T_{max} = 2pa = 2.400$ N.

Pentru: $b_k = 8t$, $S_{z,k} = 44\ t^3 \Rightarrow \tau_k = 0{,}015\ pa/t^2$

$b_k = 6t$, $S_{z,k} = 53\ t^3 \Rightarrow \tau_k = 0{,}024\ pa/t^2$

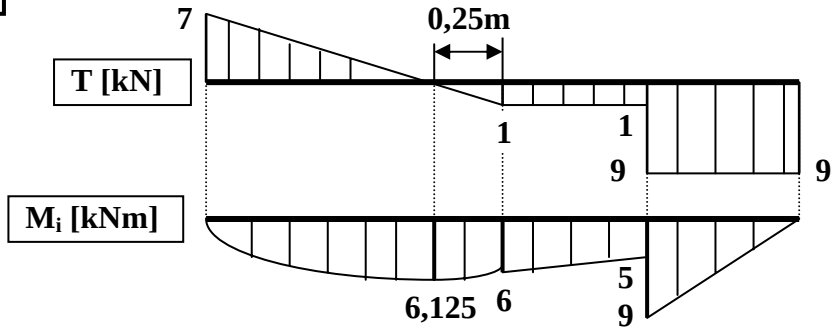
$b_k = 2t$, $S_{z,k} = 53\ t^3 \Rightarrow \tau_k = 0{,}0722\ pa/t^2$

$b_G = 2t$, $S_{z,G} = 78\ t^3 \Rightarrow \tau_G = 0{,}1063\ pa/t^2$

d) nu face obiectul acestui capitol

7R.44

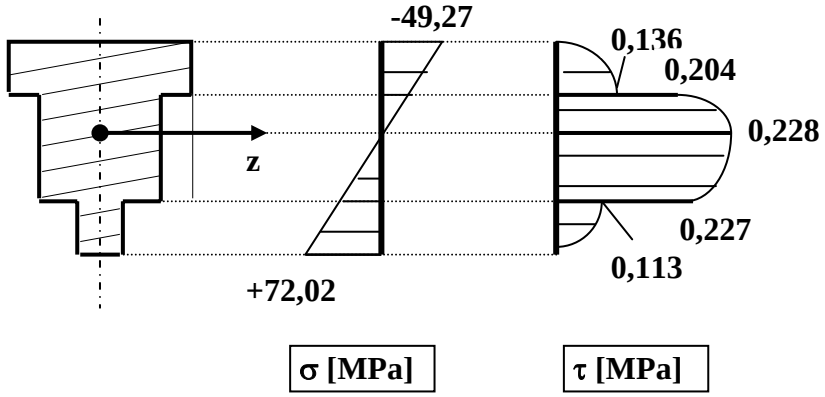
a)



b) $y_G = 4{,}75$ t, $I_z = 229\ t^4$, $W_{z,min} = 48{,}21\ t^3$, $M_{iz,max} = 9$ kNm $\Rightarrow$ t = 11,55 mm. Se adoptă t = 12 mm

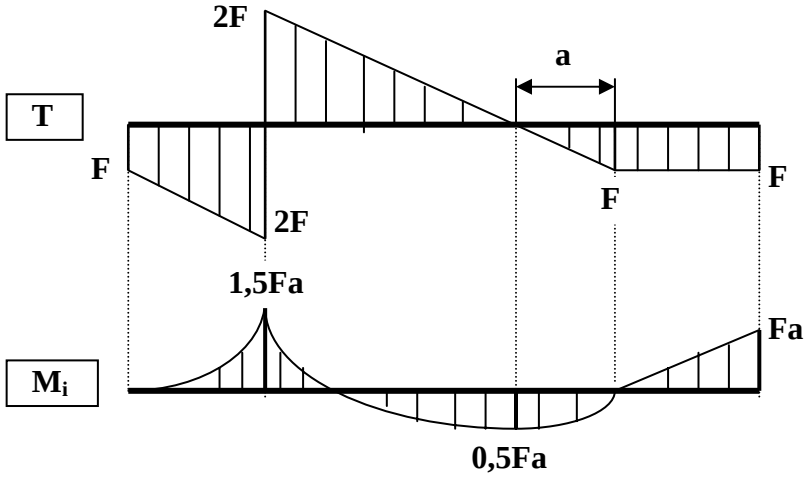
c) $M_{iz} = 6$ kNm, T = 1 kN, $b_K = 9t$, $S_{z,K}$ 24,75 t^3 $\Rightarrow$ $\sigma_K = -34{,}11$ MPa, $\tau_K = 0{,}083$ MPa

d)



7R.45

a)



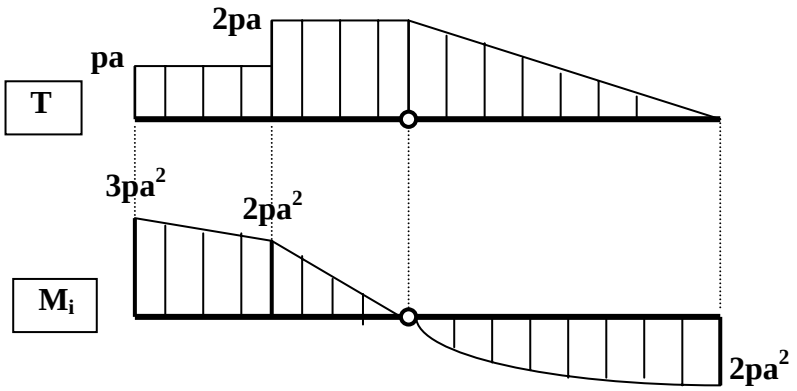
b) $y_G = 2t$, $I_z = 29{,}33\ t^4$, $W_{z,min} = 14{,}665\ t^3$, $M_{iz,max} = 1{,}5Fa$ $\Rightarrow$ $F_{cap} = 1.466{,}5$ N = 1,4665 kN

c) $T_A = F = 1{,}4665$ kN, $S_z = 10\ t^3$, $b_K = 2t$ $\Rightarrow$ $\tau_K = 0{,}5$ MPa

d) nu face obiectul acestui capitol

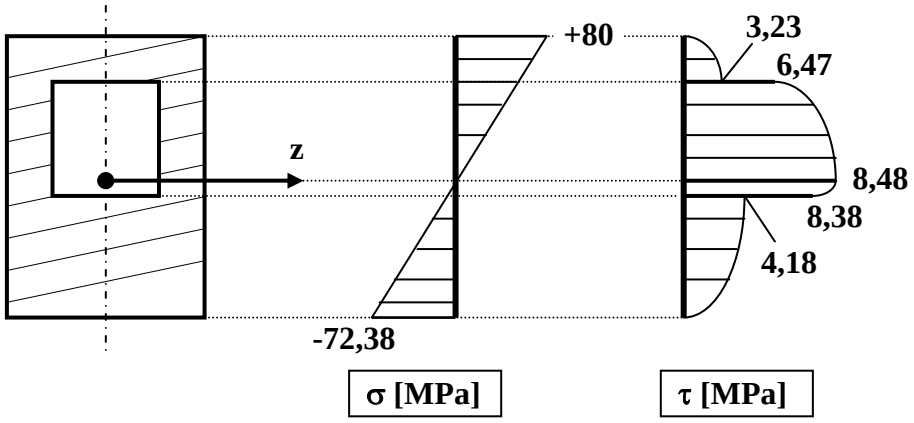
7R.46

a)



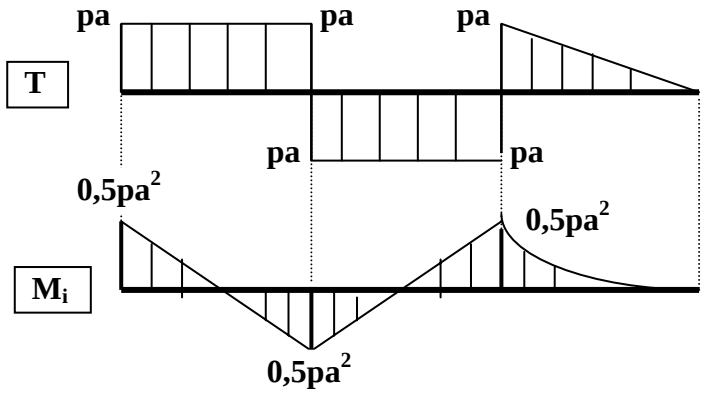
b) $y_G = 47{,}5$ mm, $I_z = 312{,}67 \cdot 10^4$ mm^4, $W_{z,min} = 59{,}555 \cdot 10^3$ mm^3, $M_{iz,max} = 3pa^2 \Rightarrow p = 14{,}88$ N/mm $= 14{,}88$ kN/m

c) $M_{iz,Adreapta} = 2pa^2$, $T_{Adreapta} = 2pa$



7R.47

a)

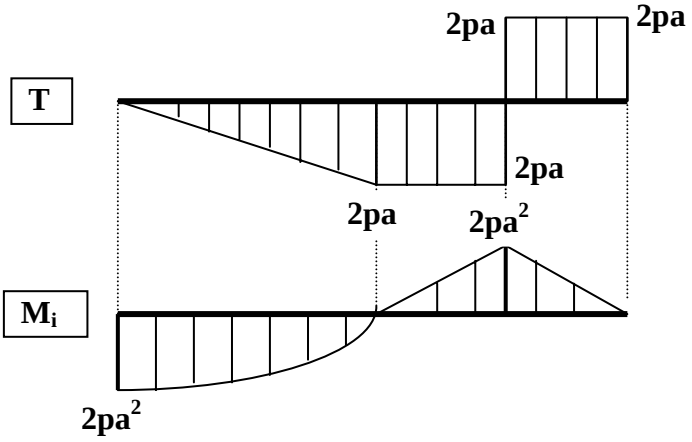


b) $y_G = 3{,}714b$, $I_z = 151{,}047\ b^4$, $W_{z,min} = 35{,}244\ b^3$, $M_{iz,max} = 0{,}5pa^2 \Rightarrow$ Pentru σ_{at} se obține $p_1 = 2{,}1146$ kN/m iar pentru σ_{ac} se obține $p_2 = 7{,}0488$ kN/m. Se adoptă: $p = \min(p_1, p_2) = 2{,}1146$ kN/m

c) $M_{iz} = 0{,}5\ pa^2$, $T = pa$, $y_K = 1{,}714b$, $b_K = 4b \Rightarrow \sigma_K = -12$ MPa, $\tau_K = 0{,}7599$ MPa, $\sigma_1 = 0{,}0479$ MPa, $\sigma_2 = -12{,}0479$ MPa

7R.48

a)



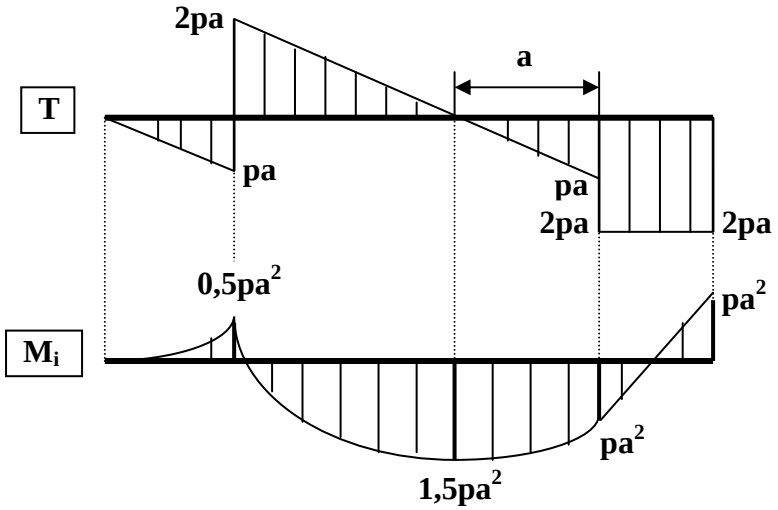
b) $y_G = 4t$, $I_z = 226{,}67\ t^4$, $W_{z,min} = 56{,}6\ t^3$, $M_{iz,max} = 2pa^2 \Rightarrow t = 13{,}3$ mm

c) $M_{iz} = 2pa^2$, $y_K = 3\ t$, $T = 0 \Rightarrow \sigma_K = -112{,}51$ MPa, $\tau_K = 0$

d) nu face obiectul acestui capitol ($v_B = 23{,}5$ mm)

7R.49

a)

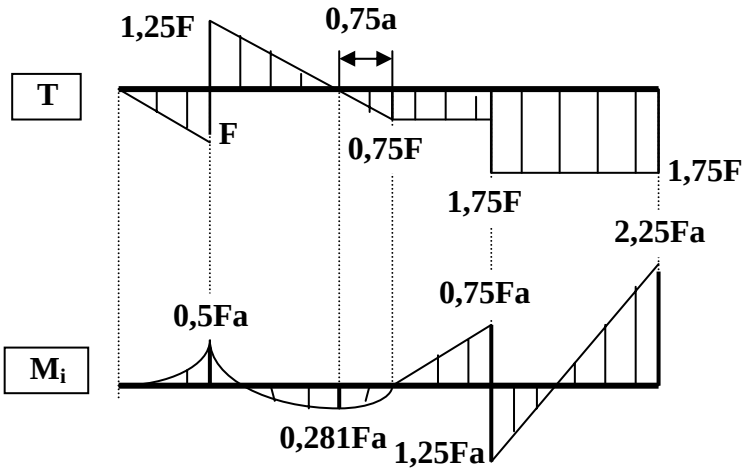


b) $y_G = 2{,}07\ d$, $I_z = 15{,}11\ d^4$, $W_{z,min} = 7{,}3\ d^3$, $M_{iz,max} = 1{,}5\ pa^2 \Rightarrow d = 32{,}48$ mm

c) $M_{iz,2} = pa^2$, $y_K = 0{,}93\ d$, $T_{max,2} = 2pa = 40$ kN, $b_K = 3d$, $S_{z,K} = 4{,}29\ d^3 \Rightarrow \sigma_K = -35{,}93$ MPa, $\tau_K = 3{,}38$ MPa, $\sigma_1 = 0{,}36$ MPa, $\sigma_2 = -36{,}28$ MPa

7R.50

a)



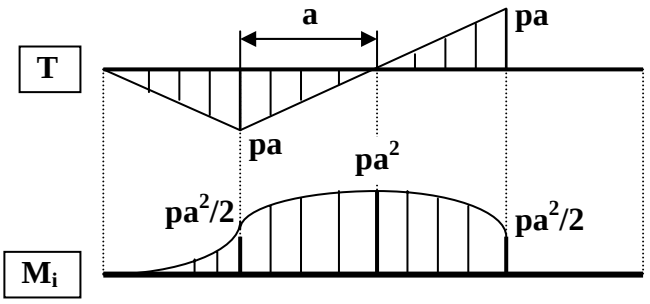
b) $y_G = 5{,}04\ c$, $I_z = 649{,}256\ c^4$, $W_{z,min} = 93{,}283\ c^3$, $M_{iz,max} = 2{,}25Fa \Rightarrow F_{cap} = 12{,}437$ kN

c) $M_{iz,3stânga} = 0{,}75Fa$, $y_K = 0{,}96\ c$, $T_{3stânga} = 0{,}75F$, $b_K = 2\ c$, $S_{z,K} = 73{,}4\ c^3 \Rightarrow \sigma_K = 6{,}89$ MPa, $\tau_K = 5{,}27$ MPa

d) $\sigma_1 = 9{,}74$ MPa, $\sigma_2 = -2{,}85$ MPa, $\alpha_1 = 28^0 24' 49''$, $\alpha_2 = 118^0 24' 49''$

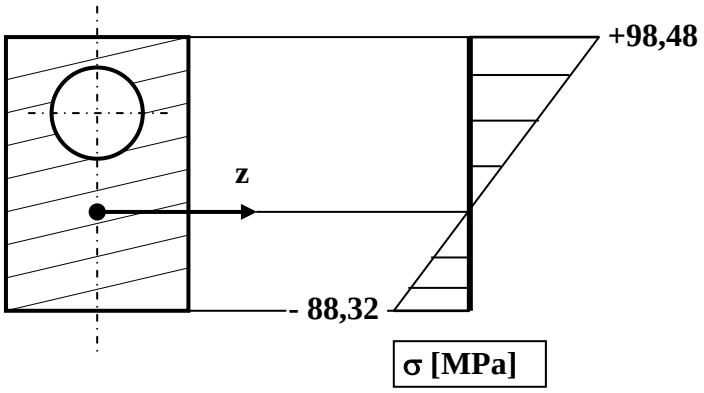
7R.51

a)



b) $y_G = 3{,}783\ t$, $I_z = 155{,}95\ t^4$, $W_{z,min} = 36{,}98\ t^3$, $M_{iz,max} = pa^2 \Rightarrow t = 12{,}93$ mm. Se adoptă $t = 13$ mm

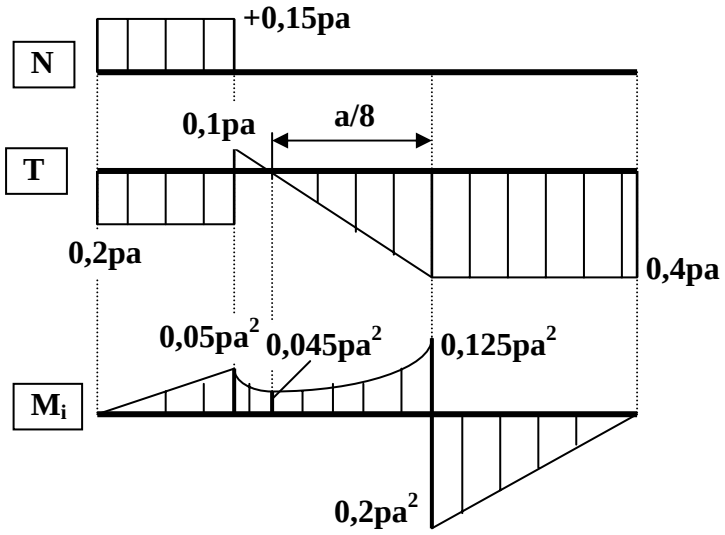
c) $M_{iz} = pa^2$



d) $T_{max} = pa$, $b = 4t$, $S_z = 28{,}61\ t^3 \Rightarrow \tau_{max} = 2{,}17$ MPa

7R.52

a)



b) $y_G = 7{,}5$ t, $I_z = 459\ t^4$, $W_{z,min} = 61{,}2\ t^3$, $M_{iz,max} = 0{,}2\ pa^2 \Rightarrow t = 15{,}16$ mm. Se adoptă $t = 16$ mm

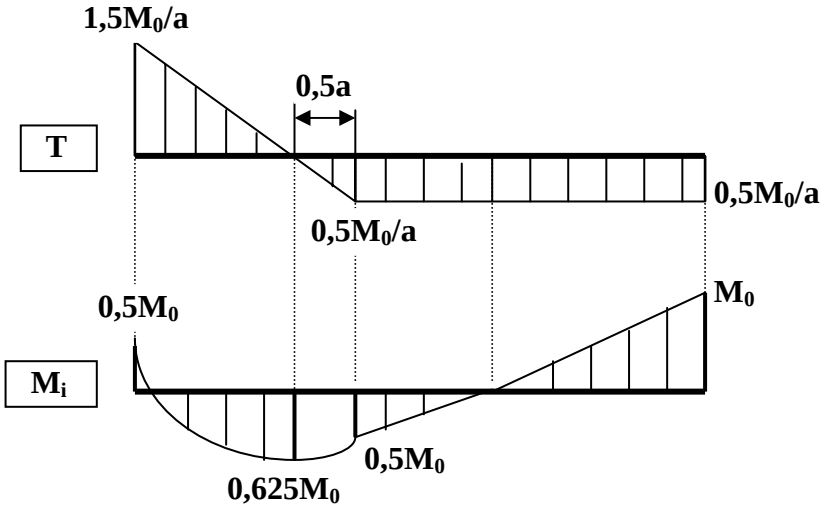
c) $M_{iz,3stânga} = 0{,}125\ pa^2$, $M_{iz,3dreapta} = 0{,}2\ pa^2$, $y_K = 1{,}5$ t, $T_{3stânga} = T_{3drepta} = 0{,}4pa$, $b_K = 2$ t, $S_{z,K} = 54\ t^3 \Rightarrow \sigma_{K,stânga} = 15{,}95$ MPa, $\tau_{K,stânga} = 3{,}67$ MPa, $\sigma_{K,dreapta} = 25{,}52$ MPa, $\tau_{K,dreapta} = 3{,}67$ MPa.

Pentru $b_K = 6$ t $\Rightarrow$ $\tau_{K,stânga} = 1{,}22$ MPa, $\tau_{K,dreapta} = 1{,}22$ MPa.

d) nu face obiectul acestui capitol ($v_1 = 2{,}734375 \cdot 10^{-3}\ pa/EI_z$

7R.53

a)



b) $y_G = 6{,}78$ c, $I_z = 314{,}22\ c^4$, $W_{z,min} = 46{,}34\ t^4$

c) $M_{iz,max} = M_0 \Rightarrow M_{0,cap} = 7{,}41$ kNm

d) $M_{iz,D} = M_0$, $y_K = 1{,}22$ c, $T_D = 0{,}5M_0/a$, $b_K = 2$ c $\Rightarrow \sigma_K = 28{,}8$ MPa, $\tau_K = 3{,}27$ MPa

e) $\sigma_{1,K} = 29{,}2$ MPa, $\sigma_{2,K} = -0{,}36$ MPa, $\alpha_1 = 6{,}4^0$, $\alpha_2 = 96{,}4^0$

f) nu face obiectul acestui capitol ($v_D = 0$)

8. CALCULUL LA RĂSUCIRE AL BARELOR DREPTE

8.1 Calculul la răsucire al barelor drepte cu secțiune circulară sau inelară. Considerații generale. Etape de calcul

Dacă într-o secţiune a unui element de rezistenţă, există un singur efort şi acesta este ***momentul de răsucire*** $\mathbf{M_t}$ (de torsiune), *spunem că în acea secţiune, se realizează o* ***solicitare de răsucire*** *sau* ***de torsiune***.

În practică, răsucirea se întâlneşte frecvent. Osiile materialului rulant, arborii de transmisie, elementele sistemelor spațiale, resorturile, etc., lucrează la răsucire.

În cazul arborilor, când pe acesta se montează roți de curea, există o roată conducătoare, iar celelalte sunt antrenate. Fiecare roată transmite arborelui momentul ei, iar în cazul când rotirea arborelui este uniformă, suma tuturor momentelor care acționează asupra arborelui, este egală cu zero.

Momentul de răsucire *într-o secţiune al unui arbore, este egal cu suma momentelor care acţionează asupra acestuia din dreapta sau din stânga acelei secţiuni*.

Momentul de torsiune, poate fi calculat şi funcție de puterea transmisă. Astfel:

$$M_t\left[kNm\right] = 9{,}55\frac{P\left[kW\right]}{n\left[\frac{rot}{\min}\right]} \qquad 8.1\text{-}1$$

sau,

$$M_t\left[kNm\right] = 7{,}02\frac{P\left[CP\right]}{n\left[\frac{rot}{\min}\right]} \qquad 8.1\text{-}2$$

Pentru o secțiune circulară, într-un punct situat la distanța **r** (măsurată pe rază) de axa de răsucire, tensiunea tangențială τ, produsă de momentul de răsucire M_t, se calculează cu relația:

$$\tau = \frac{M_t}{I_p} r \qquad 8.1\text{-}3$$

unde:

I_p -momentul de inerție polar al secțiunii.

De reținut, că la solicitarea de torsiune, variația tensiunii tangențiale pe secțiune este liniară, variabila fiind **r** şi că tensiunea maximă se atinge acolo unde r = r_{max}, adică în fibrele situate pe conturul exterior al secțiunii (r_{max} = R).

Răsucirea relativă $\Delta\varphi$ între două secțiuni situate la distanța ***l*** una de cealaltă şi pe care acționează momentul de răsucire M_t, se calculează cu relația:

$$\Delta\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p} \qquad [\text{rad}] \qquad 8.1\text{-}4$$

unde:

G -modulul de elasticitate transversal al materialului.

Dacă pe lungimea ***l***, momentul de torsiune M_t sau rigiditatea arborelui GI_p nu sunt constante, relația pentru calculul răsucirii relative între cele două secțiuni (rel.8.1-4), se scrie ca o sumă de răsuciri pe intervale pe care atât M_t cât şi rigiditatea la torsiune GI_p, sunt constante:

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p} \qquad 8.1\text{-}5$$

unde:

n -numărul intervalelor.

De multe ori, în calcule se utilizează ***răsucirea specifică***, a cărei relație de calcul, este:

$$\theta = \frac{\Delta\varphi}{l} = \frac{M_t}{G \cdot I_p} \quad [\text{rad / mm}] \qquad 8.1\text{-}6$$

Calculul elementelor de rezistență solicitate la torsiune se face în general impunând atât condiția de rezistență ($\tau_{max} \leq \tau_a$), cât şi cea de rigiditate ($\theta_{max} \leq \theta_a$).

Relațiile de calcul la solicitarea de torsiune, bare de secțiune circulară, pentru cele trei tipuri de problemă şi două condiții, sunt prezentate în Tabelul 8.1-1

Tabelul 8.1-1

Tipul problemei:	**Condiția impusă:**	
	de rezistență	**de rigiditate**
de verificare	$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} \leq \tau_a$	$\theta_{max} = \frac{M_t}{G \cdot I_p} \leq \theta_a$
de dimensionare	$W_{p,nec} = \frac{M_t}{\tau_a} = \ldots$	$I_{p,nec} = \frac{M_t}{G \cdot \theta_a} = \ldots$
de efort capabil	$M_{t,cap} = W_p \cdot \tau_a = \ldots$	$M_{t,cap} = I_p \cdot G \cdot \theta_a = \ldots$

Pentru calculul elementelor de rezistență solicitate la torsiune, se recomandă parcurgerea următoarelor **etape**:

- *Se stabilesc solicitările la care este supus elementul de rezistență. Pentru aceasta este indicat să se traseze diagramele de eforturi. Presupunem că avem numai solicitare de torsiune.*
- *Se stabileşte secțiunea periculoasă (tot pe baza diagramelor M_t şi a variației sectiunii).*
- *Se stabileşte tipul problemei (de verificare, dimensionare sau efort capabil).*
- *Se stabileşte condiția impusă pentru calcul (de rezistență, de rigiditate sau ambele condiții).*
- *Corespunzător tipului de problemă şi condiției impuse, din Tabelul 8.1-1, se aleg relațiile de calcul.*
- *Se particularizează relațiile de calcul scrise, pentru secțiunea periculoasă găsită.*

- *Din relaţiile de calcul particularizate, se determină mărimile necunoscute.*

După cum se poate constata (torsiunea fiind ultima solicitare simplă prezentată în acest volum), etapele de calcul nu diferă semnificativ de o la o solicitare la alta (vezi etapele de calcul de la toate solicitările simple prezentate anterior în acest volum).

Exemplul nr.1. *Să se dimensioneze arborele de secţiune circulară (d = ?) care prin roata conducătoare 1, transmite o putere P_1 = 100 kW la două maşini consumatoare de puteri P_2 = 60 kW şi P_3 = 40 kW (prin roţile antrenate 2 şi 3) sub o turaţie n = 500 rot / min (Fig.8.1-1a). Se cunosc: τ_a = 120 MPa, θ_a = 0,3 ^{0}/m, G = 8,5 10^4 MPa.*

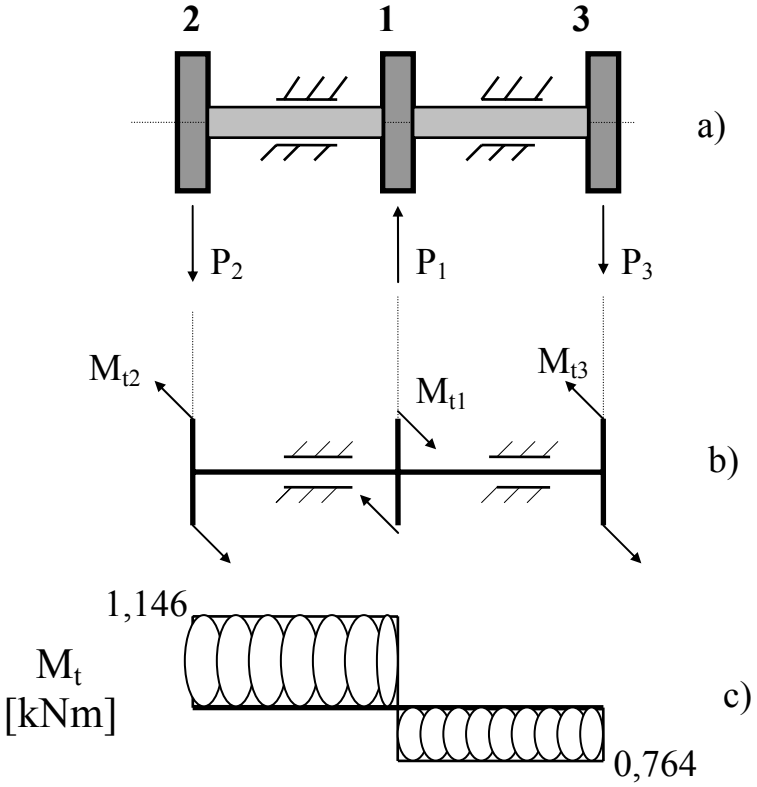


Fig.8.1-1

Rezolvare

Mai întâi se calculează momentele de torsiune transmise prin cele trei roţi (rel. 8.1-1):

$$M_{t1} = 9{,}55\,\frac{P_1}{n} = 9{,}55\,\frac{100}{500} = 1{,}91 \quad kNm$$

$$M_{t2} = 9{,}55\frac{P_2}{n} = 9{,}55\frac{60}{500} = 1{,}146\,kNm$$

$$M_{t3} = 9{,}55\frac{P_3}{n} = 9{,}55\frac{40}{500} = 0{,}764\,kNm$$

Momentele de torsiune M_{t1}, M_{t2} şi M_{t3} care acţionează asupra arborelui, sunt prezentate în Fig.8.1-1b.

Cu valorile determinate pentru M_{t1}, M_{t2} şi M_{t3}, se trasează diagrama de efort M_t (Fig.8.1-1c), care permite determinarea secţiunii periculoase. Se poate constata că arborele este solicitat numai la torsiune, iar secţiunea periculoasă este oricare, situată între roata 2 şi roata 1 (aici momentul de torsiune are valoare maximă).

Problema este de dimensionare şi se impune atât condiţia de rezistenţă (se dă τ_a), cât şi cea de rigiditate (se dă θ_a).

Relaţiile de calcul pe care le utilizăm (din Tabelul 8.1-1), sunt:

- pentru condiţia de rezistenţă

$$W_{p,nec} = \frac{M_t}{\tau_a} = \ldots \qquad 8.1\text{-}7$$

- pentru condiţia de rigiditate

$$I_{p,nec} = \frac{M_t}{G \cdot \theta_a} = \ldots \qquad 8.1\text{-}8$$

Particularizate pentru problema în studiu, relaţiile 8.1-7 şi 8.1-8, devin:

$$\frac{M_{t,max}}{\tau_a} = \frac{\Pi \cdot d_1^3}{16} \qquad 8.1\text{-}9$$

respectiv,

$$\frac{M_{t,max}}{G \cdot \theta_a} = \frac{\Pi \cdot d_2^4}{32} \qquad 8.1\text{-}10$$

Din relaţiile 8.1-9 şi 8.1-10, rezultă două valori pentru diametrul arborelui:

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{t,max}}{\Pi \cdot \tau_a}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1{,}146 \cdot 10^6}{\Pi \cdot 120}} = 37 \ mm$$

$$d_2 = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{t,max}}{\Pi \cdot G \cdot \theta_a}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1{,}146 \cdot 10^6}{\Pi \cdot 8{,}5 \cdot 10^4 \cdot 0{,}3 \cdot \frac{\Pi}{180} 10^{-3}}} = 72 \ mm$$

În relația lui d_2, unitatea de măsură dată pentru θ_a [^{0}/m], s-a transformat în [rad/mm].

Valoarea acceptată pentru diametrul **d** al arborelui, este:

$$d = \max (d_1, d_2) = 72 \ \text{mm}$$

Exemplul nr.2. *Fie bara cu forma şi încărcarea din Fig.8.1-2a. Se cer: a) valoarea momentului M_0, ştiind că unghiul de răsucire al secţiunii B (φ_B) este de două ori mai mare decât unghiul de răsucire al secţiunii C (φ_C),*

b) Să se calculeze răsucirea relativă între secţiunile B şi C ($\varphi_{B\text{-}C}$ = ?),

c) Să se verifice apoi condiţia de rezistenţă, pentru τ_a = 100 MPa.

Se cunosc: G = 8,5 10^4 MPa, d = 100 mm, D = 120 mm.

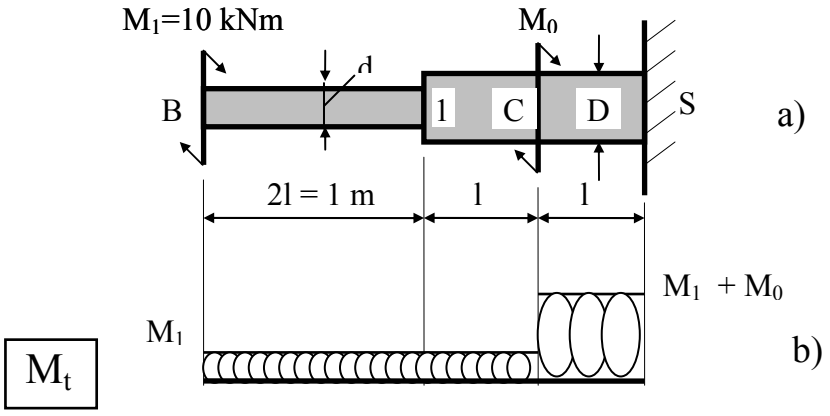


Fig.8.1-2

Rezolvare

a) Pentru stabilirea solicitării şi a secţiunii periculoase, se trasează diagramele de eforturi. Există un singur efort: M_t (moment de

torsiune). Variația momentului de torsiune, este prezentată în Fig.8.1-2b. Necunoscând valoarea lui M_0, nu se poate stabili în această fază, secțiunea periculoasă. La această bară, trasarea diagramelor de eforturi se poate face fără calculul reacțiunii din încastrare, cu condiția ca fiecare interval să fie parcurs de la capătul liber spre încastrare.

Problema este de efort capabil (M_0 = ?), condiția de rigiditate, dar pusă sub forma unei relații între unghiurile de răsucire a două secțiuni:

$$\varphi_B = 2\,\varphi_C \qquad 8.1\text{-}11$$

Relația 8.1-11, trebuie explicitată. Mai întâi calculăm unghiurile de răsucire ale celor două secțiuni:

$$\varphi_B = \Delta\varphi_{B-S} = \frac{M_1 \cdot 2l}{G \cdot I_{p1}} + \frac{M_1 \cdot l}{G \cdot I_{p2}} + \frac{(M_1 + M_0)l}{G \cdot I_{p2}} \qquad 8.1\text{-}12$$

şi

$$\varphi_C = \Delta\varphi_{C-S} = \frac{(M_1 + M_0)l}{G \cdot I_{p2}} \qquad 8.1\text{-}13$$

Pentru calculul lui φ_B sunt necesari trei termeni: atât M_t cât şi rigiditatea GI_p, sunt variabile de-a lungul barei.

În relația 8.1-12 şi 8.1-13, I_{p1}, respectiv I_{p2} reprezintă momentul de inerție polar al porțiunii cu diametrul **d**, respectiv **D**.

Ținând seama de relațiile 8.1-12 şi 8.1-13, relația 8.1-11, capătă forma:

$$\frac{M_1 \cdot 2l}{G \cdot I_p} + \frac{M_1 \cdot l}{G \cdot I_{p2}} + \frac{(M_1 + M_0)l}{G \cdot I_{p2}} = 2\,\frac{(M_1 + M_0)l}{G \cdot I_{p2}} \qquad 8.1\text{-}14$$

Rezolvând ecuația 8.1-14, rezultă singura necunoscută:

$$M_0 = 41{,}47 \ \text{kNm} \qquad 8.1\text{-}15$$

b) Răsucirea relativă între secțiunile B şi C, este:

$$\Delta\varphi_{B-C} = \frac{M_1 \cdot 2l}{G \cdot I_{p1}} + \frac{M_1 \cdot l}{G \cdot I_{p2}} = \frac{M_1 \cdot l}{G}\left(\frac{2}{I_{p1}} + \frac{1}{I_{p2}}\right) =$$
$$= \frac{32 \cdot M_1 \cdot l}{\Pi \cdot G}\left(\frac{2}{d^4} + \frac{1}{D^4}\right) = 0{,}029\ rad = 1{,}7^0 \qquad 8.1\text{-}16$$

c) Pentru verificarea condiției de rezistență, trebuie determinată secțiunea periculoasaă. Deoarece în acest exemplu este mai dificilă determinarea secțiunii periculoase, se face calculul în două intervale care par cel puțin la o simplă vedere, mai periculoase.

Astfel:

$$\tau_{max\,B-1} = \frac{M_1}{W_{p1}} = \frac{16M_1}{\Pi \cdot d_1^3} = \frac{16 \cdot 10 \cdot 10^6}{\Pi \cdot 100^3} = 50{,}9\ MPa \qquad 8.1\text{-}17$$

$$\tau_{max\,C-S} = \frac{M_1 + M_0}{W_{p2}} = \frac{16 \cdot (M_1 + M_0)}{\Pi \cdot D^3} = \frac{16 \cdot 51{,}47 \cdot 10^6}{\Pi \cdot 120^3} = 151{,}69\ MPa \qquad 8.1\text{-}18$$

Deoarece în porțiunea C-S, τ_{max} = 151,69 MPa > τ_a = 100 MPa, această bară care îndeplineşte condiția de rigiditate (rel.8.1-11), nu satisface condiția de rezistență.

Exemplul nr.3. *a) Să se verifice bara de secțiune circulară cu diametrul d = 105 mm (Fig.8.1-3a), cunoscând τ_a = 100 MPa.*

b) Să se calculeze unghiul de răsucire al secțiunii 1.

Se cunosc: M_0 = 8 kNm, G = 8,5 10^4 MPa, l = 0,4 m.

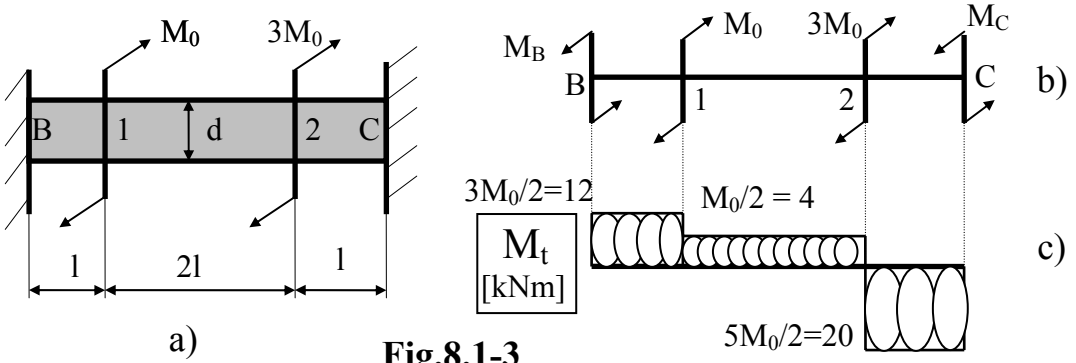


Fig.8.1-3

Rezolvare

a) Bara este supusă acțiunii momentelor M_0 şi $3M_0$, care sunt momente de torsiune. În acest caz, în bară ia naştere un singur efort şi acesta este momentul de torsiune M_t.

Pentru stabilirea secțiunii periculoase, trebuie trasată diagrama M_t. Pentru a putea trasa această diagramă, este nevoie să se cunoască reacțiunile, sau măcar una dintre ele. Poziționarea reacțiunilor, care sunt tot momente de torsiune, este prezentată în Fig.8.1-3b.

Calculul reacțiunilor, se face impunând condiția de echilibru:

$$(\sum M) = (\sum M_t) = 0 \qquad 8.1\text{-}19$$

care explicitată, devine:

$$M_B - M_0 - 3\, M_0 + M_C = 0 \qquad 8.1\text{-}20a$$

sau scrisă altfel,

$$M_B + M_C = 4\, M_0 \qquad 8.1\text{-}20b$$

Altă ecuație de echilibru nu se mai poate scrie. Există două necunoscute (M_B şi M_C) şi s-a scris o singură ecuație (rel. 8.1-20b). Rezultă că acest sistem, este un sistem o dată static nedeterminat. Pentru determinarea celor două reacțiuni, este nevoie de încă o relație. După cum se ştie de la alte tipuri de sisteme static nedeterminate, relația suplimentară, este o relație de deformație. Pentru această problemă, pot fi scrise mai multe relații de deformații. De exemplu:

$\varphi_B = 0$ (unghiul de răsucire al secțiunii B este zero) 8.1-21a

$\varphi_C = 0$ 8.1-21b

$\varphi_{1stânga} = \varphi_{1dreapta}$ 8.1-21c

$\varphi_{2stânga} = \varphi_{2dreapta}$ 8.1-21d

Pentru calculul reacțiunilor, este necesară însă numai o singură relație. Considerăm prima relație (rel. 8.1-21a),

$$\varphi_B = 0 \qquad 8.1\text{-}22$$

Dar,

$$\varphi_B = \Delta\varphi_{B\text{-}C} = 0 \qquad 8.1\text{-}23$$

care explicitată, conduce la relația:

$$\frac{M_B \cdot l}{G \cdot I_p} + \frac{(M_B - M_0)2l}{G \cdot I_p} + \frac{(M_B - M_0 - 3M_0)l}{G \cdot I_p} = 0 \qquad 8.1\text{-}24$$

relație, care conține o singură necunoscută, pe M_B.

După efectuarea calculelor, din relație 8.1-24, rezultă valoarea reacțiunii M_B:

$$M_B = \frac{3}{2} M_0 = 12 \ KNm \qquad 8.1\text{-}25$$

Cunoscând acum reacțiunea M_B, din relația 8.1-20b, rezultă reacțiunea din reazemul C:

$$M_B = \frac{5}{2} M_0 = 20 \ KNm \qquad 8.1\text{-}26$$

Fiind determinate reacțiunile, se poate trasa diagrama de momente de torsiune M_t. Diagrama M_t rezultată, este prezentată în Fig.8.1-3c.

Analizând diagrama M_t şi variația secțiunii transversale în lungul barei (pentru această bară secțiunea este constantă), rezultă că secțiunea periculoasă este oricare din intervalul 2-C (aici M_t are cea mai mare valoare).

Problema aflată spre rezolvare, este de verificare, condiția de rezistență (se dă τ_a).

Relația de calcul (vezi Tabelul 8.1-1) care se utilizează, este:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} \qquad 8.1\text{-}27$$

care explicitată pentru această problemă, capătă forma.

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{M_{t,max}}{\frac{\Pi \cdot d^3}{16}} = \frac{16 \cdot M_{t,max}}{\Pi \cdot d^3} = \frac{16 \cdot 20 \cdot 10^6}{\Pi \cdot 105^3} = 87{,}98 \ MPa < \tau_a$$

Rezultă că bara satisface (îndeplineşte) condiția de reziatență cerută.

b) Unghiul de răsucire al secțiunii **1** (φ_1), poate fi calculat astfel:

$$\varphi_1 = \Delta\varphi_{B\text{-}1} = \Delta\varphi_{1\text{-}C} \qquad 8.1\text{-}28$$

Se observă că $\Delta\varphi_{B\text{-}1}$ conține un singur termen, pe când $\Delta\varphi_{1\text{-}C}$ impune folosirea a doi termeni, deoarece deşi rigiditatea GI_p la torsiune este constantă pe intervalul 1-C, efortul moment de torsiune M_t, nu este constant.

Se calculează atunci unghiul de răsucire al secțiunii 1, cu relația cea mai simplă:

$$\varphi_1 = \Delta\varphi_{B-1} = \frac{M_B \cdot l}{G \cdot I_p} = \frac{32 \cdot M_B \cdot l}{G \cdot \Pi \cdot d^4} = \frac{32 \cdot 12 \cdot 10^6 \cdot 400}{8{,}5 \cdot 10^4 \cdot \Pi \cdot 105^4} = 4{,}73 \cdot 10^{-3} \ rad = 0{,}27^0$$

A rezultat o valoare mică pentru unghiul de răsucire al secțiunii 1.

8.2 Calculul la torsiune al barelor drepte cu secțiune necirculară

În cazul răsuciriii barelor de secțiune oarecare, tensiunile tangențiale în punctele de pe conturul secțiunii, sunt dirijate în lungul conturului, după tangenta la contur. Componentele perpendiculare pe contur, impun apariția unor tensiuni tangențiale pe suprafața laterală, egale cu ele. Deoarece suprafața laterală este lipsită de tensiuni, în secțiunea transversală, nu există tensiuni tangențiale perpendiculare pe contur. Se poate atunci considera că tensiunile tangențiale formează un flux continuu, dirijat în lungul conturului secțiunii transversale (Fig.8.2-1).

Pentru toate tipurile de ***secțiuni necirculare***, tensiunea tangențială maximă şi unghiul de răsucire al secțiunii, se pot exprima prin relații identice cu cele corespunzătoare secțiunii circulare sau inelare (vezi parag. 8.1), cu precizarea că în locul mărimii I_p, se va considera I_t, iar în locul lui W_p, se va considera W_t. Aceste noi caracteristici geometrice ale secțiunii transversale, se numesc convențional: ***moment de inerție la torsiune*** (I_t), respectiv ***modul de rezistență la torsiune*** (W_t).

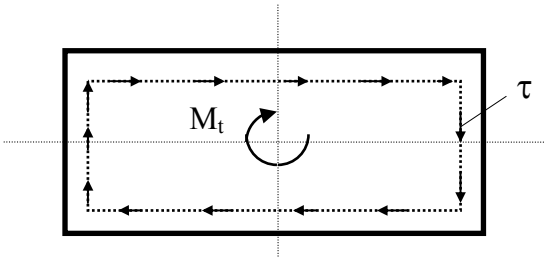


Fig.8.2-1

Relațiile care exprimă tensiunea tangențială maximă τ_{max} şi unghiul de răsucire relativă între două secțiuni situate la distanța **l** una de cealaltă, au pentru secțiuni necirculare, forma:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} \qquad 8.2\text{-}1$$

$$\Delta\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_t} \qquad 8.2\text{-}2$$

În cazul unei bare de secțiune necirculară mai complicată, care poate fi descompusă în porțiuni formate de elemente cu pereți subțiri, se poate considera:

$$I_t = I_{t1} + I_{t2} + ... = \sum I_{tn} \qquad 8.2\text{-}3$$

unde:

n = 1,2,3,... sunt numerele porțiunilor elementare în care a fost descompusă secțiunea.

Deoarece unghiul de răsucire pentru toată secțiunea şi pentru toate elementele acesteea este unul şi acelaşi, se poate scrie:

$$\Delta\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_t} = \frac{M_{t1} \cdot l}{G \cdot I_{t1}} = \ldots = \frac{M_{tn} \cdot l}{G \cdot I_{tn}} \qquad 8.2\text{-}4$$

iar momentul de torsiune, se repartizează la diferitele porțiuni ale secțiunii, proporțional cu rigiditatea acestora:

$$M_{t1} = \frac{I_{t1}}{I_t} M_t \; ; M_{t2} = \frac{I_{t2}}{I_t} M_t \; ; \ldots ; M_{tn} = \frac{I_{tn}}{I_t} M_t \qquad 8.2\text{-}5$$

Ținând seama de cele scrise mai înainte, tensiunea tangențială maximă în fiecare porțiune **n** a secțiunii, este:

$$\tau_{max,tn} = \frac{M_{tn}}{W_{tn}} \left(\frac{I_{tn}}{I_t} \right) = \frac{M_t}{I_t} \cdot \left(\frac{I_{tn}}{W_{tn}} \right) \qquad 8.2\text{-}6$$

Din relația 8.2-6, rezultă că tensiunea tangențială τ atinge valoarea maximă în acel element la care raportul I_{tn} / W_{tn} este maxim:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_t} \left(\frac{I_{tn}}{W_{tn}} \right)_{max} = \frac{M_t}{W_t} \qquad 8.2\text{-}7$$

unde în acest caz:

$$W_t = \frac{I_t}{\left(\frac{I_{tn}}{W_{tn}} \right)_{max}} \qquad 8.2\text{-}8$$

În cazul unor profile: cornier, profil T, profil I, profil U, etc. I_t se calculează cu relația:

$$I_t = \eta \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot b_i^3 \qquad 8.2\text{-}9$$

unde:

h - latura mai lungă a secțiunii dreptunghiulare,

b - latura mai scurtă (mică) a secțiunii dreptunghiulare în care s-a descompus secțiunea întreagă,

η -un coeficient care depinde de forma secțiunii şi de racordările profilului. Valoarea acestui coeficient, pentru cele mai uzuale profile este dată în Tabelul 8.2-1.

Tabelul 8.2-1

Profilul	η
Cornier	1
T	1,2
I	1,15
U	1,12

La aceste profile, tensiunea tangențială este maximă la dreptunghiul a cărei lățime este cea mai mare dintre dreptunghiurile în care a fost descompus profilul.

Valoarea tensiunii tangențiale maxime, pentru profile, se poate calcula cu relația:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_t} b_{max} \qquad 8.2\text{-}10$$

unde:

b_{max} - grosimea maximă.

Pentru calculul la torsiune al ***barelor tubulare de secțiune necirculară*** cu pereței subțiri (de grosime mică), se pot utiliza relațiile cunoscute pentru secțiunea inelară.

Modulul de rezistență al secțiunii inelare cu pereți subțiri, este:

$$W_t = W_p \cong 2 \cdot \Pi \cdot r^2 \cdot t = 2 \cdot S_0 \cdot t \qquad 8.2\text{-}11$$

unde:

$S_0 = \pi r^2$ este aria cercului, mărginită de linia mediană a inelului

t -grosimea peretelui inelului.

Pentru secțiunea tubulară necirculară cu pereți subțiri (Fig.8.2-2), rezultă:

$$W_t = 2\, S_0\, t \qquad 8.2\text{-}12$$

unde:

$S_0 = b_m\, h_m$ -aria mărginită de linia mediană a tubulaturii de secțiune necirculară.

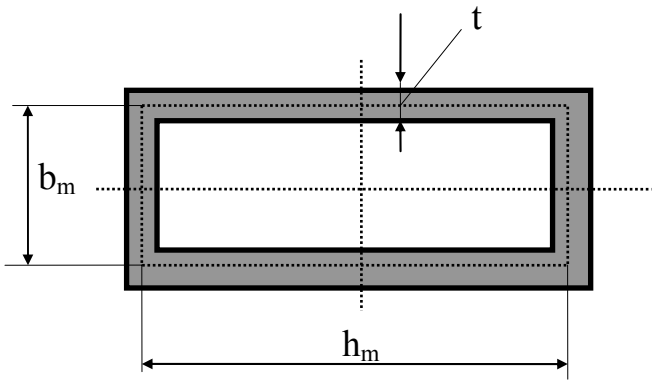


Fig.8.2-2

Dacă se consideră că tensiunile tangențiale sunt uniform distribuite pe secțiunea tubulaturii (fie ea şi inelară), rezultă:

$$\tau = \frac{M_t}{2 \cdot S_0 \cdot t} \qquad 8.2\text{-}13$$

Relația 8.2-13, poate fi utilizată pentru calculul la torsiune al barelor cu pereți subțiri având secțiune necirculară închisă (secțiuni tip cheson).

Unghiul de răsucire relativă între două secțiuni situate la distanța $\boldsymbol{l}$, pentru aceste profile, poate fi calculată cu relația:

$$\Delta\varphi = \frac{\tau \cdot l_m}{2 \cdot G \cdot S_0} \cdot l \qquad 8.2\text{-}14$$

unde:

l_m - lungimea liniei mediane a grosimii peretelui secțiunii tubulare,

τ - tensiunea tangențială din secțiune.

Pentru secțiunea din Fig.8.2-2, rezultă:

$$l_m = 2\ (\ b_m + h_m) \qquad 8.2\text{-}15$$

iar pentru o secțiune inelară cu prete subțire:

$$l_m = 2\ \pi\ r \qquad 8.2\text{-}16$$

unde:

r - raza cercului delimitat de linia mediană a grosimii peretelui .

În Tabelul 8.2-2, se prezintă unele date suplimentare necesare calculului la răsucire al profilelor cu secțiuni necirculare şi perete subțire.

Etapele de calcul la torsiune al barelor cu secțiune necirculară, sunt aceleaşi ca în cazul barelor cu secțiune circulară. Ceea ce diferă, sunt doar relațiile de calcul. Din acest motiv, nu se mai prezintă încă o dată etapele de calcul pentru acest tip de elemente de rezistență.

Exemplul nr.1. *Să se calculeze momentul de torsiune capabil al unei bare drepte, pentru care* τ_a *= 50 MPa, dacă aceasta prezintă două forme ale secțiunii transversale:*

a) dreptunghi cu dimensiunile 180 x 300 mm şi

b) conductă cu secțiunea patrată, având latura exterioară a = 300 mm şi grosimea pereților constantă cu t = 6 mm.

Rezolvare

a) Fie secțiunea dreptunghiulară a barei, cea din Fig.8.2-3.

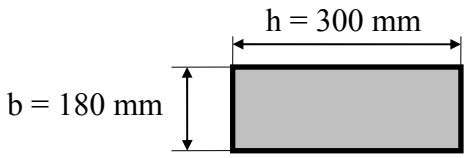


Fig.8.2-3

Problema este de efort capabil, condiția de rezistență. calculul se face pe baza modelului prezentat în Tabelul 8.2-2, poziția 1.

Se determină coeficientul m:

$$m = \frac{h}{b} = \frac{300}{180} = 1{,}67$$

Pentru m = 1,67, din Tabelul 8.2-2, prin interpolare, rezultă valorile coeficienților:

$$\alpha = 0{,}3493$$
$$\beta = 0{,}396$$

cu care se calculează caracteristicile geometrice I_t, respectiv W_t:

$$I_t = \alpha\, b^4 = 0{,}3493 \;\; 180^4 = 3{,}666 \;\; 10^4 \;\; mm^4$$
$$W_t = \beta\, b^3 = 0{,}396 \;\; 180^3 = 2{,}315 \;\; 10^3 \;\; mm^3$$

Momentul de torsiune capabil, este:

$$M_{t,cap} = \tau_a\, W_t = 50 \;\; 2{,}315 \;\; 10^3 = 0{,}11575 \;\; kNm.$$

b) Secțiunea patrată (tip cheson), este prezentată în Fig.8.2-4.

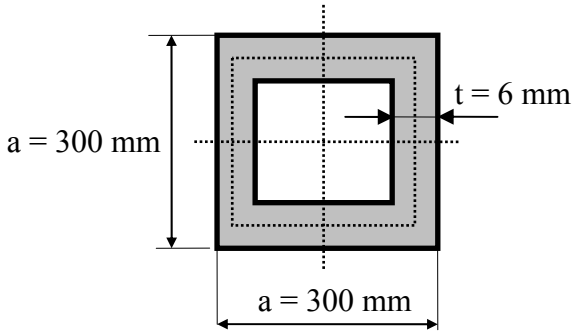


Fig.8.2-4

Această secțiune intră în categoria barelor cu pereți subțiri.

Pentru efortul capabil, se aplică relația 8.2-13:

$$M_{t,cap} = \tau_a\, 2\, S_0\, t$$

unde:

$$S_0 = \left(a - 2 \cdot \tfrac{t}{2}\right) \cdot \left(a - 2 \cdot \tfrac{t}{2}\right) = (a-t)^2 = (300-6)^2 = 86436 \;\; mm^2$$

Rezultă, acum momentul de torsiune capabil:

$$M_{t,cap} = 50 \;\; 2 \;\; 86436 \;\; 6 = 51{,}86 \;\; 10^6 \text{ Nmm} = 51{,}86 \;\; kNm$$

Exemplul nr.2. *Fie o bară de oțel cu secțiune dreptunghiulară cu o dimensiune (lățime) b = 50 mm, care transmite un moment de torsiune* M_t *= 6 kNm, iar* τ_a *= 80 MPa.*

Se cere să se calculeze cealaltă dimensiune (h = ?) a secțiunii transversale a barei.

Rezolvare

Problema este de dimensionare. Se utilizează relația cunoscută:

$$W_{t,nec} = \frac{M_t}{\tau_a} = \frac{6 \cdot 10^6}{80} = 7{,}5 \cdot 10^4 \ \ mm^3$$

Din relația:

$$W_t = \beta \, b^3$$

rezultă coeficientul β:

$$\beta = \frac{W_t}{b^3} = \frac{7{,}5 \cdot 10^4}{50^3} = 0{,}6$$

Cu ajutorul Tabelului 8.2-2, prin interpolare, se determină parametrul **m**:

m = 2 ..... β = 0,439
m = ? ..... β = 0,6

$$m = \frac{0.6 \cdot 2}{0{,}439} = 2{,}73$$

Știind că m = h / b, se obține cealaltă dimensiune (h) a secțiunii transversale:

$$h = m \cdot b = 2{,}73 \cdot 50 = 136{,}5 \text{ mm}$$

Exemplul nr.3. *Să se verifice (*τ_a *= 80 MPa) şi să se calculeze unghiul de răsucire al unei bare drepte de lungime l = 6 m, aflată sub*

acţiunea unui moment de torsiune constant M_t = 2 kNm, a cărei secţiune transversală are forma din Fig.8.2-5. Se cunosc: h_1 = 80 mm, b_1 = 40 mm, h_2 = 90 mm, b_2 = 15 mm, h_3 = 120 mm, b_3 = 20 mm, G = 8 10^4 MPa.

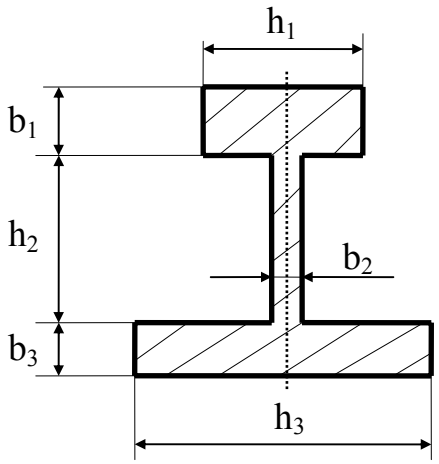


Fig.8.2-5

Rezolvare

Pentru calculul la răsucire al profilului cu o secţiune compusă (vezi Fig.8.2-5), secţiunea se împarte în trei suprafeţe: talpa de sus (dim. b_1 x h_1), inima (dim. b_2 x h_2) şi talpa de jos (dim. b_3 x h_3).

Problema este de verificare, condiţia de rezistenă, solicitarea de torsiune.

Pentru acest profil, tensiunea tangenţială maximă, se calculează cu relaţia 8.2-1:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t}$$

şi trebuie precizat locul unde se produce această tensiune maximă. În relaţia anterioară, W_t este modulul de rezistenţă la răsucire al secţiunii şi se determină cu relaţia 8.2-8:

$$W_t = \frac{I_t}{\left(\frac{I_{tn}}{W_{tn}}\right)_{max}}$$

iar, I_t este momentul de inerție la răsucire al întregii secțiuni, moment care se calculează cu relația 8.2-3:

$$I_t = I_{t1} + I_{t2} + I_{t3}$$

cu I_{t1} , I_{t2} , I_{t3} , momentele de inerție la răsucire al fiecărei suprafețe simple a secțiunii din Fig.8.2-5.

Calculul se face pentru fiecare porțiune (suprafață simplă).

Pentru talpa de sus: $h_1 = 80$ mm, $b_1 = 40$ mm, $m = h_1 / b_1 = 2$,

$$I_{t1} = \alpha\,(b_1)^4 = 0{,}457 \;\; 40^4 = 116{,}992\;10^4 \text{ mm}^4$$

$$W_{t1} = \beta\,(b_1)^3 = 0{,}493 \;\; 40^3 = 31{,}552 \;\; 10^3 \;\; \text{mm}^3$$

$$\frac{I_{t1}}{W_{t1}} = \frac{116{,}992 \cdot 10^4}{31{,}552 \cdot 10^3} = 37{,}079 \;\; mm$$

Valorile coeficienților α şi β, s-au luat din Tabelul 8.2-2, poziția 1.

Pentru inima profilului: $h_2 = 90$ mm, $b_2 = 15$ mm, $m = h_2 / b_2 = 6 > 4$. Rezultă cazul din poziția 2, Tabelul 8.2-2.

$$I_{t2} = \tfrac{1}{3}(m - 0{,}63) b_2^3 = \tfrac{1}{3}(6 - 0{,}63) \cdot 15^4 = 9{,}061 \cdot 10^4 \;\; mm^4$$

$$W_{t2} = \tfrac{1}{3}(m - 0{,}63) b_2^3 = \tfrac{1}{3}(6 - 0{,}63) \cdot 15^3 = 6{,}041 \cdot 10^3 \;\; mm^3$$

$$\frac{I_{t2}}{W_{t2}} = \frac{9{,}061 \cdot 10^4}{6{,}041 \cdot 10^3} = 15 \;\; mm$$

Pentru talpa de jos: $h_3 = 120$ mm, $b_3 = 20$ mm, $m = h_3 / b_3 = 6 > 4$. Rezultă cazul din poziția 2, Tabelul 8.2-2.

$$I_{t3} = \tfrac{1}{3}(m - 0{,}63) b_3^4 = \tfrac{1}{3}(6 - 0{,}63) \cdot 20^4 = 28{,}64 \cdot 10^4 \;\; mm^4$$

$$W_{t3} = \tfrac{1}{3}(m - 0{,}63) b_3^3 = \tfrac{1}{3}(6 - 0{,}63) \cdot 20^3 = 14{,}32 \cdot 10^4 \;\; mm^3$$

$$\frac{I_{t3}}{W_{t3}} = \frac{28{,}64 \cdot 10^4}{14{,}32 \cdot 10^3} = 20 \ mm$$

Se calculează acum caracteristica I_t:

$I_t = I_{t1} + I_{t2} + I_{t3} = 116{,}992 \ \ 10^4 + 9{,}061 \ \ 10^4 + 28{,}64 \ \ 10^4 =$
$= 154{,}693 \ \ 10^4 \ \ \text{mm}^4.$

Se poate constata că:

$$\frac{I_{t1}}{W_{t1}} > \frac{I_{t3}}{W_{t3}} > \frac{I_{t2}}{W_{t2}}$$

de unde rezultă:

$$\left(\frac{I_{tn}}{W_{tn}}\right)_{max} = \frac{I_{t1}}{W_{t1}} = 37{,}079 \ \ mm$$

Rezultă de aici, că tensiunea tangențială maximă se atinge în talpa de sus şi mai precis la mijlocul dimensiunii maxime (dimensiunea h_1) a tălpii de sus.

Relația pentru W_t, este:

$$W_t = \frac{I_t}{\left(\frac{I_{tn}}{W_{tn}}\right)_{\max}} = \frac{I_t}{\frac{I_{t1}}{W_{t1}}} = \frac{154{,}693 \cdot 10^4}{37{,}079} = 41{,}719 \cdot 10^3 \ mm^3$$

Se poate calcula tensiunea tangențială maximă:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{2 \cdot 10^6}{41{,}719 \cdot 10^3} = 47{,}93 MPa < \tau_a = 80 \ \ MPa$$

Condiția de rezistență cerută, este satisfăcută.

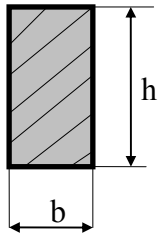
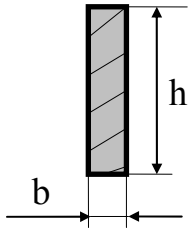
Unghiul maxim de răsucire al barei, se calculează cu relația 8.2-2:

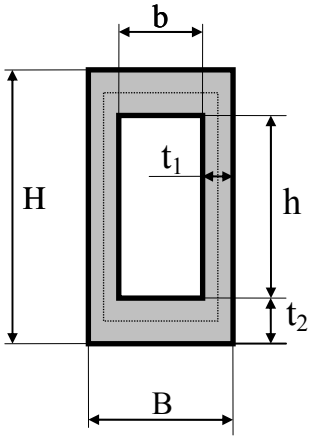
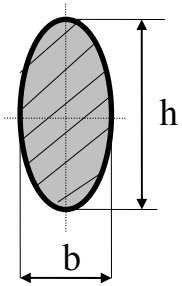
$$\Delta\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_t}$$

relație, care explicitată pentru problema studiată, devine:

$$\Delta\varphi = \frac{2\cdot 10^{6}\cdot 6\cdot 10^{3}}{8\cdot 10^{4}\cdot 154\ ,693\cdot 10^{4}} = 0,0969 \text{ rad } = 5,55^{0}$$

Tabelul 8.2-2

<table>
<tr><th>Po-
ziția</th><th>Forma
secțiunii</th><th>Momentul de inerție
al secțiunii la
răsucire
I_t [mm^4]</th><th>Modulul de
rezistență la
răsucire
W_t [mm^3]</th><th>Punctele cu tensiune
tangențială maximă
$\tau_{max} = M_t / W_t$</th><th>Observații</th></tr>
<tr><td>1</td><td> 
</td><td>$\alpha\, b^4$</td><td>$\beta\, b^3$</td><td>La mijlocul laturii mai mari:
$\tau_{max} = M_t / W_t$
La mijlocul laturii mai scurte:
$\tau = \gamma\, \tau_{max}$</td><td>Valorile coeficienților α, β, γ
<table><tr><th>m = h / b</th><th>α</th><th>β</th><th>γ</th></tr><tr><td>1,0</td><td>0,140</td><td>0,208</td><td>1,0</td></tr><tr><td>1,5</td><td>0,294</td><td>0,346</td><td>0,859</td></tr><tr><td>2,0</td><td>0,457</td><td>0.493</td><td>0,795</td></tr><tr><td>3,0</td><td>0,790</td><td>0,801</td><td>0,753</td></tr><tr><td>4,0</td><td>1,123</td><td>1,150</td><td>0,745</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>2</td><td> 
</td><td>$\frac{(m-0{,}63)b^4}{3}$</td><td>$\frac{(m-0{,}63)b^3}{3}$</td><td>În punctele de pe latura lungă, cu excepția colțurilor:
$\tau_{max}=M_t / W_t$
La mijlocul laturii scurte:
$\tau = 0{,}74\, \tau_{max}$</td><td>Valorile coeficienților α, β, γ
<table><tr><th>m = h / b</th><th>α</th><th>β</th><th>γ</th></tr><tr><td>6,0</td><td>1,789</td><td>1,789</td><td>0,743</td></tr><tr><td>8,0</td><td>2,456</td><td>2,456</td><td>0,742</td></tr><tr><td>10,0</td><td>3,123</td><td>3,123</td><td>0,742</td></tr></table>Pentru m > 4, se pot utiliza atât valorile coeficienților α, β, γ cât şi formulele indicate la această poziție.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

3		$h^2\ b^2\ t_1\ t_2$ ~~$Ht_2+Bt_1-(t_1)^2-(t_2)^2$~~	$W_{t1} = 2\ h\ b\ t_1$ $W_{t2} = 2\ h\ b\ t_2$	La mijlocul laturii lungi: $\tau_1 = M_t / W_{t1}$ La mijlocul laturii scurte: $\tau_2 = M_t / W_{t2}$	La colțurile interioare, se produce o concentrare puternică a tensiunii tangențiale, care poate ajunge la limita de curgere a materialului. În cazul unor racordări făcute cu raza r, coeficientul de concentrare, este: $\alpha_c = 1{,}74\sqrt[3]{\frac{\tau_{max}}{r}}$
4		$I_t = \frac{\Pi}{16} \cdot \frac{m^2}{m^2+1}\ b^4$ $= \frac{16\ A^4}{\Pi\ b\ h\ (b^2+h^2)}$	$W_{t1} = \frac{\Pi\ b^3}{16}\ m =$ $= \frac{\Pi\ b^2\ h}{16}$	La extremitatea semiaxei mici: $\tau_{max} = M_t / W_t$ La extremitatea semiaxei mari: $\tau = \tau_{max} / m$	$\frac{h}{b} = m > 1$ A - aria secțiunii

8E. Calculul la răsucire al barelor drepte de secțiune circulară sau inelară (Probleme propuse)

8E.1

Un arbore este antrenat prin roata 0 de către un motor de putere P_0 = 70 kW sub turația n = 300 rot/min, pe care o distribuie prin roțile 1 şi 2 la două maşini consumatoare de puteri P_1 = 30 kW, respectiv P_2 = 40 kW (Fig.8E.1). Se cer:

a) diametrul arborelui pe cele două tronsoane pentru τ_a = 40 MPa
b) raportul lungimilor celor două tronsoane astfel încât răsucirea relativă între roțile 1 şi 2 să fie nulă (cele două roți să aibă aceeaşi răsucire).

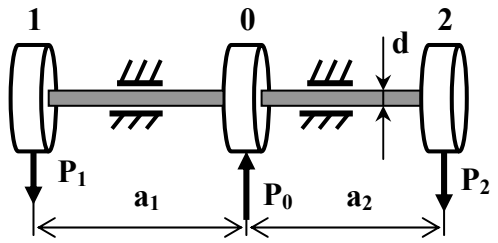


Fig.8E.1

8E.2

Pentru arborele circular din Fig.8E.2 se cer:

a) diagrama momentului de răsucire
b) verificarea arborelui din condiția de rezistență la torsiune
c) răsucirea relativă între roțile 1 şi 2.

Se cunosc: n = 200 rot/min, d = 60 mm, G = $8{,}5\cdot10^4$ MPa, a = 0,5 m, P_1 = 30 kW, P_2 = 70 kW, P_0 = 100 kW.

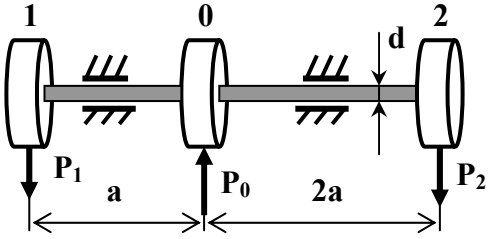


Fig.8E.2

8E.3

Pentru sistemul de transmisie din Fig.8E.3 se cer:
a) diagrama momentului de torsiune
b) verificarea condiției de rezistență şi de rigiditate ale arborelui
c) răsucirea relativă între roțile 0 şi 1
Se dau: d = 110 mm, P_0 = 160 kW, P_1 = 100 kW, P_2 = 60 kW, n = 100 rot/min, τ_a = 80 MPa, θ_a = 0,4 ^{0}/m, G = $8 \cdot 10^4$ MPa, a_1 = 0,4 m, a_2 = 0,6 m.

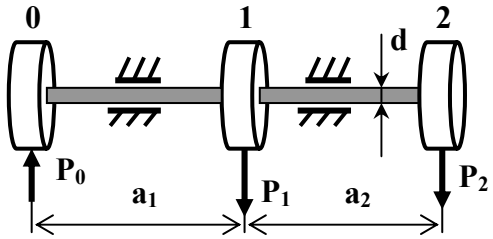


Fig.8E.3

8E.4

Pentru arborele circular din Fig.8E.4 se cer:
a) diagrama momentului de răsucire
b) dimensionarea arborelui din condiția de rezistență şi rigiditate
c) răsucirea relativă între roțile 1 şi 0.

Se cunosc: P_0 = 120 kW, P_1 = 50 kW, P_2 = 50 kW, P_3 = 20 kW, n = 250 rot/min, τ_a = 60 MPa, θ_a = 0,3 ^{0}/m, G = $8 \cdot 10^4$ MPa, a = 1 m.

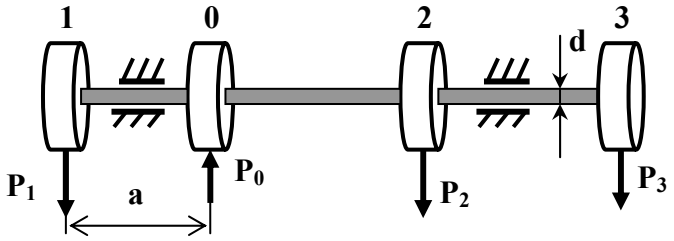


Fig.8E.4

8E.5

Pentru arborele circular din Fig.8E.5 se cer:

a) diagrama momentului de răsucire

b) verificarea condiției de rezistență şi a celei de rigiditate.

Se cunosc: $P_0 = 600$ CP, $P_1 = 200$ CP, $P_2 = 100$ CP, $P_3 = 300$ CP, n = 300 rot/min, d = 120 mm, $\tau_a = 50$ MPa, $\theta_a = 0{,}3\ ^0/m$, $G = 8 \cdot 10^4$ MPa.

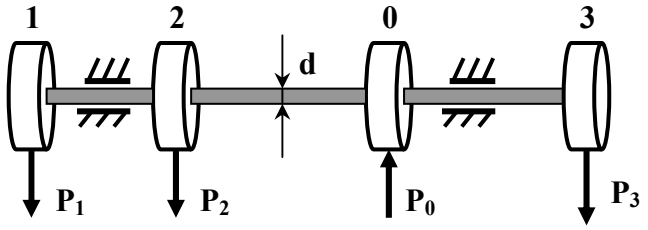


Fig.8E.5

8E.6

Pentru bara circulară având secțiunea variabilă din Fig.8E.6 se cer:

a) diagrama momentului de răsucire

b) încărcarea capabilă (M_0 = ?) pentru $\tau_a = 60$ MPa, $\theta_a = 0{,}3\ ^0/m$

c) răsucirea capătului liber al barei (φ_1 = ?).

Se cunosc: d = 60 mm, a = 0,4 m, $G = 8 \cdot 10^4$ MPa.

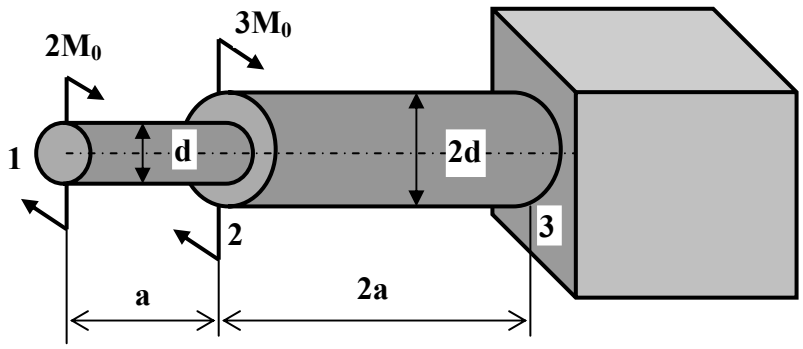


Fig.8E.6

8E.7

Pentru bara dreaptă circulară din Fig.8E.7 se cer:
a) diagrama momentului de torsiune
b) diametru barei pentru $\tau_a = 50$ MPa, $\theta_a = 0{,}3\ ^0/\text{m}$
c) răsucirea maximă a barei.
Se cunosc: $M_0 = 2$ kNm, a = 0,2 m, $G = 8 \cdot 10^4$ MPa.

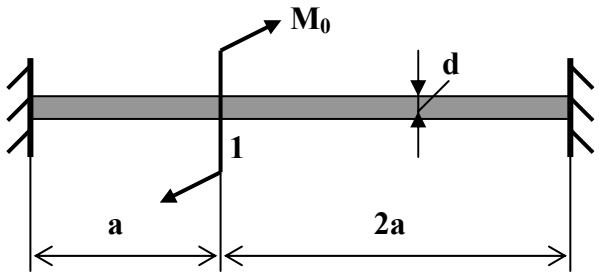


Fig.8E.7

8E.8

Pentru bara circulară din Fig.8E.8 se cer:
a) diagrama momentului de răsucire
b) încărcarea capabilă ($M_0 = ?$) pentru $\tau_a = 60$ MPa, $\theta_a = 0{,}3\ ^0/\text{m}$
c) răsucirea secțiunii 1.
Se cunosc: d = 50 mm, a = 300 mm, $G = 8 \cdot 10^4$ MPa.

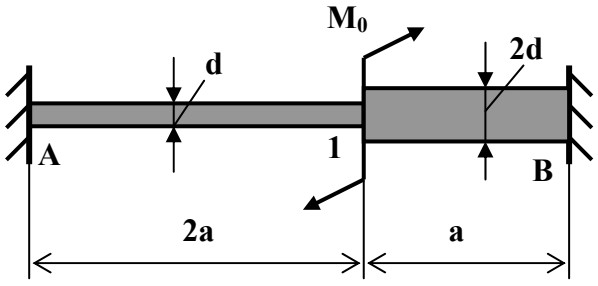


Fig.8E.8

8E.9

Pentru bara circulară de secțiune variabilă din Fig.8E.9 se cer:
a) diagrama de momente de răsucire

b) dimensiunea d pentru $\tau_a = 50$ MPa, $\theta_a = 0{,}3\ ^0/m$
c) răsucirea secțiunii 2.
Se cunosc: $M_0 = 4$ kNm, a = 200 mm, $G = 8 \cdot 10^4$ MPa.

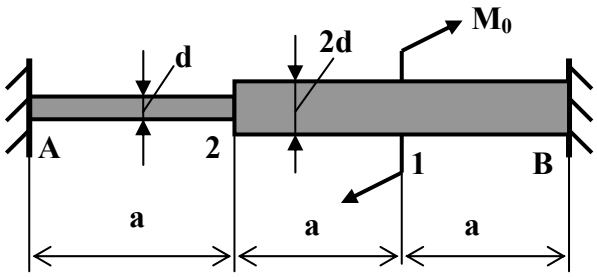


Fig.8E.9

8E.10

Pentru bara circulară din Fig.8E.10 se cer:
a) diagrama momentului de torsiune
b) încărcarea capabil ($M_0 = ?$) pentru $\tau_a = 50$ MPa
c) răsucirea relativă între secțiunile 1 şi 2.
Se cunosc: d = 100 mm, a = 500 mm, $G = 8 \cdot 10^4$ MPa.

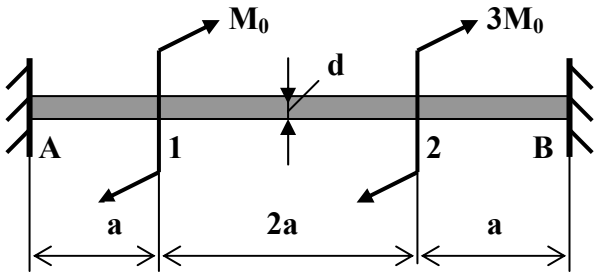


Fig.8E.10

8E.11

Pentru bara circulară cu secțiune variabilă din Fig.8E.11 se cer:
a) diagrama momentului de răsucire
b) tensiunea maximă ($\tau_{max} = ?$) şi răsucirea maximă ($\theta_{max} = ?$)
c) răsucirea secțiunii 2 ($\varphi_2 = ?$).
Se cunosc: $M_1 = 2$ kNm, $M_2 = 6$ kNm, d = 100 mm, a = 200 mm, $G = 8 \cdot 10^4$ MPa.

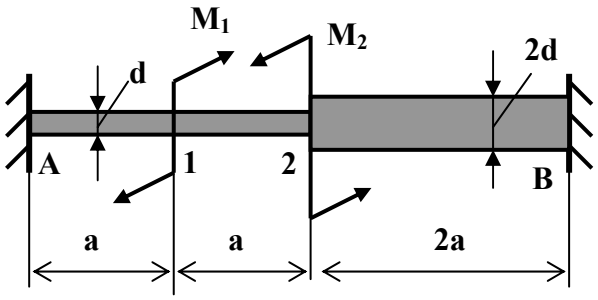


Fig.8E.11

8E.12

Pentru bara circulară încastrată la un capăt din Fig.8E.12 se cer:

a) diagrama momentului de răsucire
b) forța capabilă pentru $\tau_a = 40$ MPa
c) răsucirea maximă.

Se cunosc: d = 60 mm, a = 250 mm, G = $8 \cdot 10^4$ MPa.

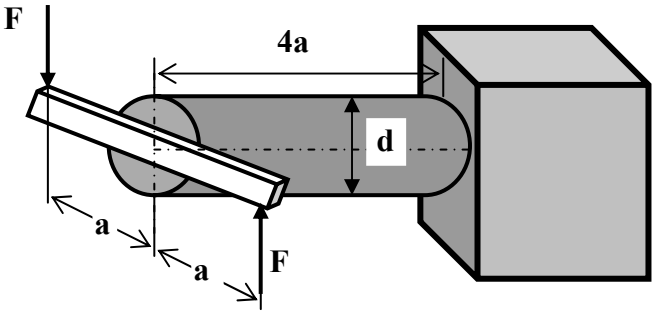


Fig.8E.12

8E.13

Pentru arborele de secțiune inelară din Fig.8E.13 se cer:

a) diagrama momentului de răsucire
b) tensiunea tangențială maximă ($\tau_{max} = ?$)
c) răsucirea relativă între roțile 0 şi 1.

Se cunosc: D = 100 mm, d = 60 mm, $P_0 = P_1 = 200$ kW, n = 150 rot/min, a = 1 m, G = $8 \cdot 10^4$ MPa.

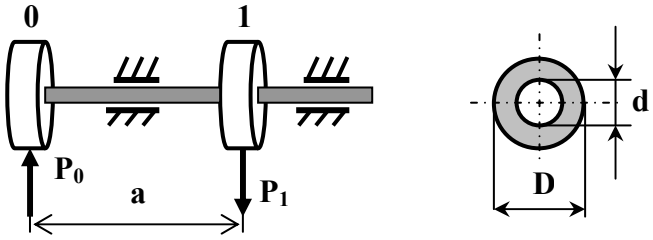


Fig.8E.13

8E.14

Arborele circular din Fig.8E.14 transmite o putere P_0 = 80 kW sub o turație n. Se cer:

a) valoarea momentului de răsucire care solicită arborele
b) turația maximă sub care poate funcționa arborele
c) răsucirea specifică maximă a arborelui.

Se cunosc: d = 80 mm, τ_a = 50 MPa, G = $8 \cdot 10^4$ MPa.

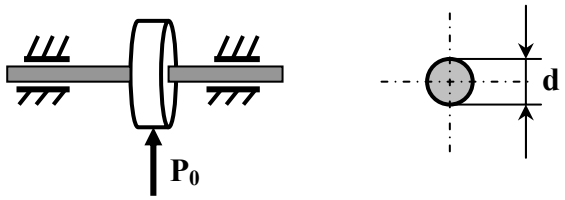


Fig.8E.14

8E.15

Printr-un arbore circular se antrenează o maşină unealtă a cărei putere de acționare este $P_1 = P_0$ (Fig.8E.15). Se cer:

a) diagrama momentului de răsucire pe care îl poate accepta arborele
b) puterea maximă ($P_{1,max}$ = ?) cu care poate acționată maşina unealtă
c) răsucirea relativă a arborelui între roțile de acționare

Se cunosc: d = 100 mm, a = 800 mm, n = 100 rot/min, τ_a = 40 MPa, G = $8 \cdot 10^4$ MPa.

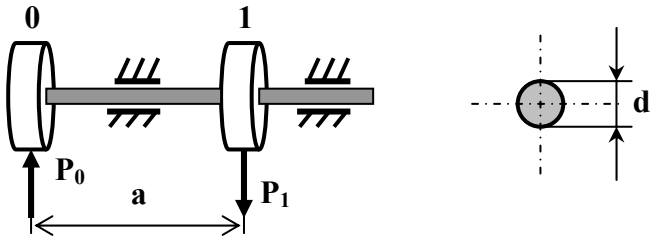


Fig.8E.15

8E.16

Un arbore de secțiune circulară, având diametrul d = 100 mm şi lungimea a = 2 mm se roteşte cu turația n = 200 rot/min. Cunoscând unghiul de răsucire specific admis θ_a = 0,3 ^{0}/m, se cer:

a) puterea maximă ($P_{0,max}$ = ?) pe care o poate transmite arborele
b) tensiunea tangențială maximă (τ_{max} = ?) din arbore la încărcarea determinată la punctul a).

8E.17

Pentru sistemul din Fig.8E.17 se cer:

a) tensiunea tangențială maximă (τ_{max} = ?) din bara orizontală circulară
b) tensiunea normală maximă ($\sigma_{c,max}$ = ?) din cele două cabluri
c) răsucirea maximă ($\varphi_{1,max}$ = ?) a capătului liber al barei orizontale.

Se cunosc: M_0 = 0,12 kNm, $A_{cablu} = A_c$ = 400 mm^2, D = 80 mm, d = 20 mm, E = $2 \cdot 10^5$ MPa, G = $8 \cdot 10^4$ MPa (G = 0,4 E), a = 200 mm.

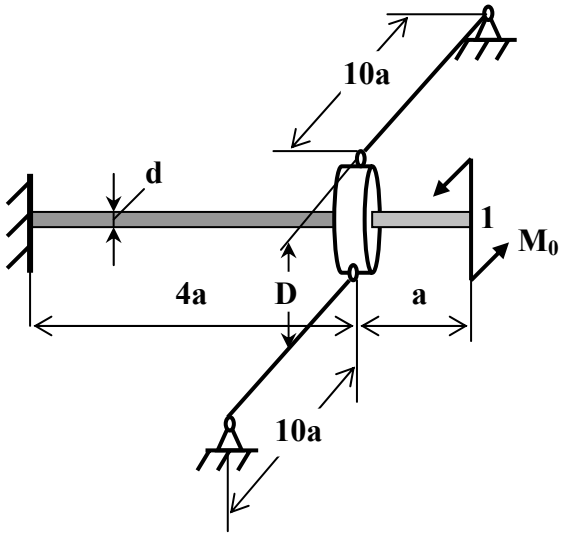


Fig.8E.17

8E.18

Pentru sistemul din Fig.8E.18 se cer:

a) tensiunea tangențială maximă (τ_{max} = ?) din bara orizontală

b) tensiunea normală maximă ($\sigma_{c,max}$ = ?) din cabluri

Se cunosc: M_0 = 7 kNm, a = 1m, d = 100 mm, d_c = 20 mm, E = $2 \cdot 10^5$ MPa, G = $8 \cdot 10^4$ MPa (G = 0,4 E).

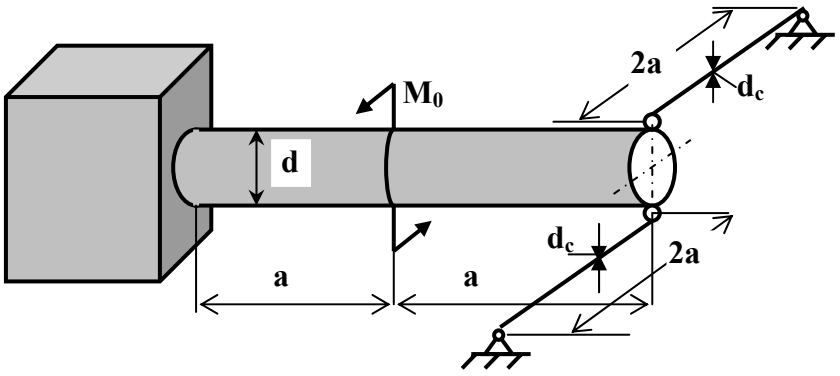


Fig.8E.18

8E.19

Pentru sistemul din Fig.8E.19 se cer:

a) tensiunea tangențială maximă (τ_{max} = ?) din bara orizontală

b) tensiunea normală maximă ($\sigma_{c,max}$ = ?) din cabluri

Se cunosc: M_0 = 0,08 kNm, a = 400 mm, d = 20 mm, A_c = 200 mm^2, E = 2·10^5 MPa, G = 8·10^4 MPa (G = 0,4 E).

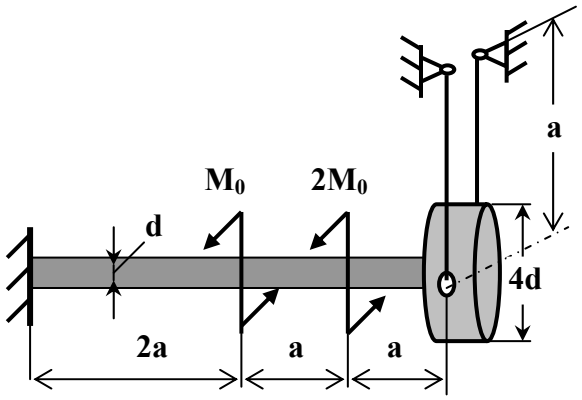


Fig.8E.19

8E.20

Pentru sistemul din Fig.8E.20 se cer:

a) tensiunea tangențială maximă (τ_{max} = ?) din bara orizontală

b) tensiunea normală maximă ($\sigma_{c,max}$ = ?) din cabluri

c) răsucirea relativă între roțile B şi C ($\Delta\varphi_{B-C}$ = ?)

Se cunosc: $A_c = \pi \cdot d^4/64$ mm^2, G = 0,4 E.

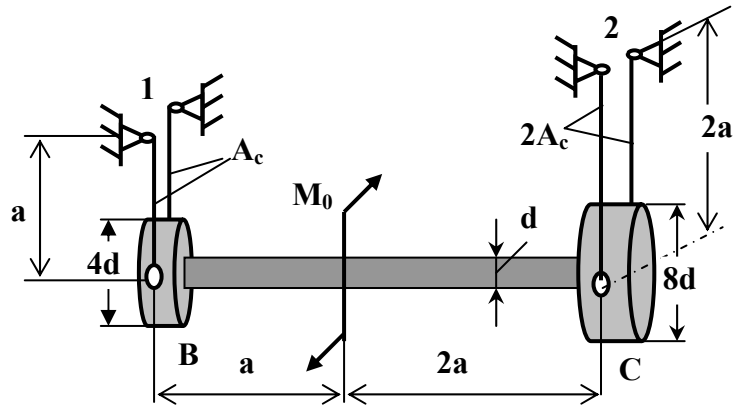
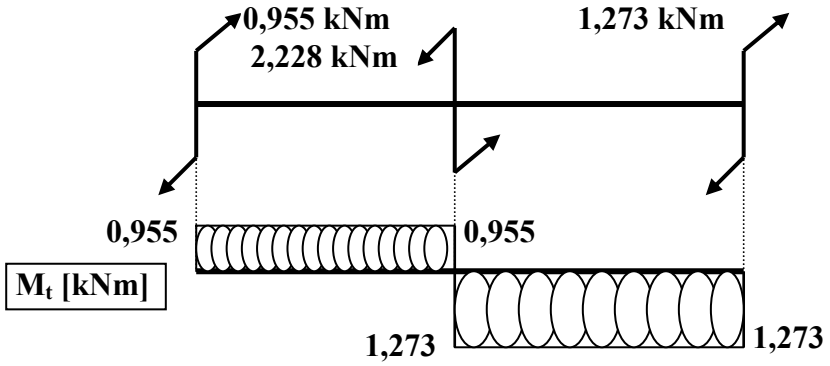


Fig.8E.20

8R. Calculul la răsucire al barelor drepte de secțiune circulară sau inelară (Răspunsuri)

8R.1

a)

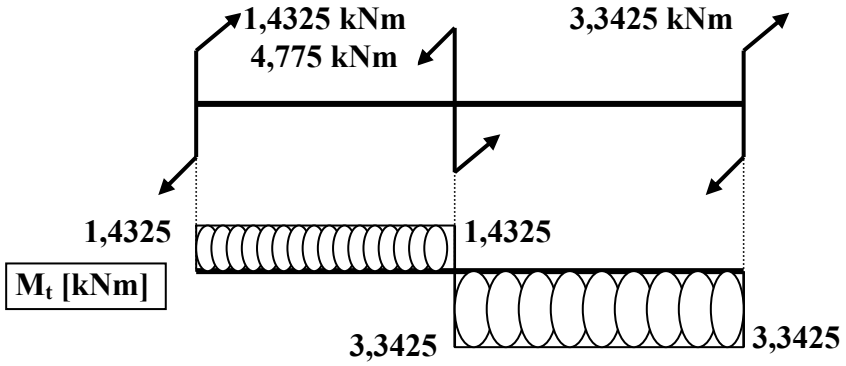


$d_{1-0} = 50$ mm, $d_{0-2} = 55$ mm

b) $a_1/a_2 = M_{t2} \cdot I_{p1} / M_{t1} \cdot I_{p2} = 1{,}001$

8R.2

a)

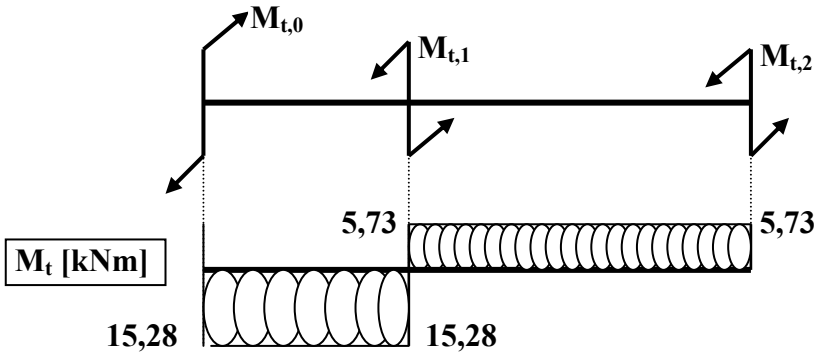


b) $M_{t,max} = 3{,}3425$ kNm $\Rightarrow \tau_{max} = 78{,}85$ MPa

c) $\Delta\varphi_{1-2} = 7{,}447 \cdot 10^{-8}$ rad $= 0{,}0000426^0$

8R.3

a)

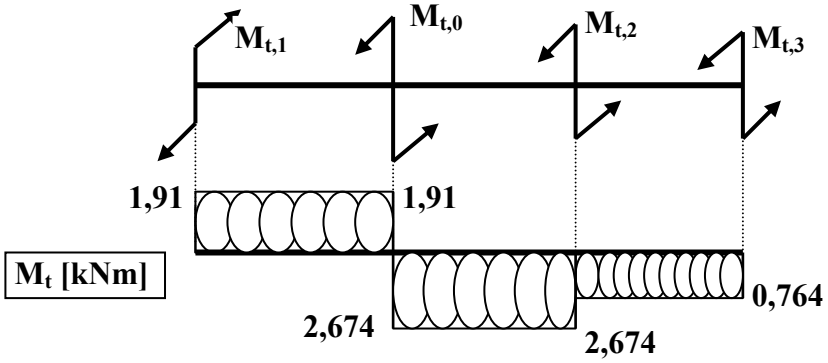


b) $M_{t,max} = 15{,}28$ kNm $\Rightarrow \tau_{max} = 58{,}49$ MPa $< \tau_a$, $\theta_{max} = 1{,}329 \cdot 10^{-5}$ rad $= 0{,}76\ ^0/m > \theta_a$

c) $\Delta\varphi_{0\text{-}1} = 0{,}00531$ rad $= 0{,}3^0$

8R.4

a)

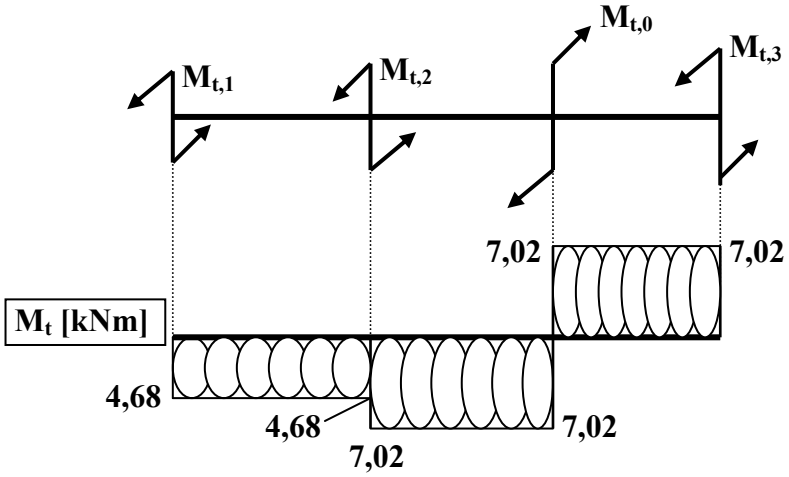


b) $M_{t,max} = 2{,}674$ kNm $\Rightarrow d_{rez} = 61$ mm, $d_{rig} = 90$ mm. Se adoptă $d = \max(d_{rez}; d_{rig}) = 90$ mm

c) $\Delta\varphi_{1\text{-}0} = 0{,}0037$ rad $= 0{,}212^0$

8R.5

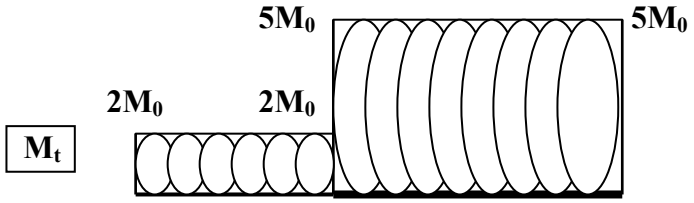
a)



b) $M_{t,max} = 7{,}02$ kNm $\Rightarrow \tau_{max} = 20{,}7$ MPa, $\theta_{max} = 0{,}0431$ rad/mm $= 2{,}47\ ^0/mm >> \theta_a$.

8R.6

a)

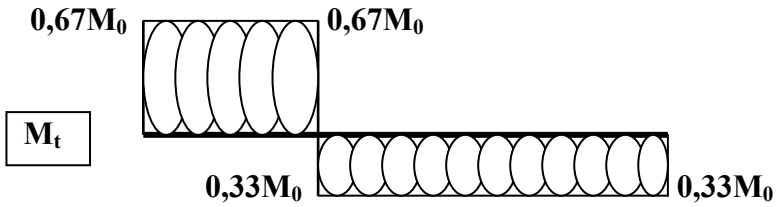


b) Secțiunea periculoasă 1-2, $M_t = 2\ M_0 \Rightarrow M_{0cap,rez} = 1{,}271$ kNm, $M_{0cap,rig} = 0{,}53$ kNm. $M_{0,cap} = 0{,}53$ kNm

c) $\varphi_1 = \Delta\varphi_{1\text{-}3} = 0{,}675 \cdot 10^{-3}$ rad $= 0{,}38^0$

8R.7

a)

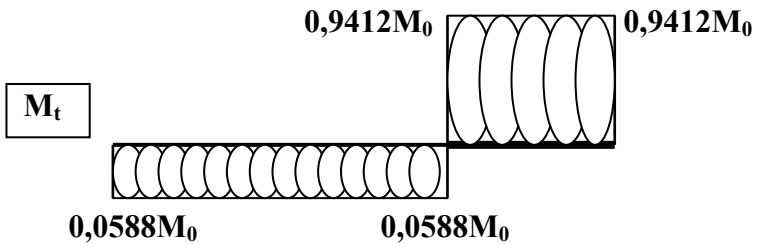


b) $M_{t,max} = 0{,}67\ M_0 \Rightarrow d_{rez} = 52$ mm, $d_{rig} = 84$ mm. Se adoptă d = 84 mm

c) $\varphi_{max} = \varphi_1 = 0{,}00068$ rad $= 0{,}039^0$.

8R.8

a)

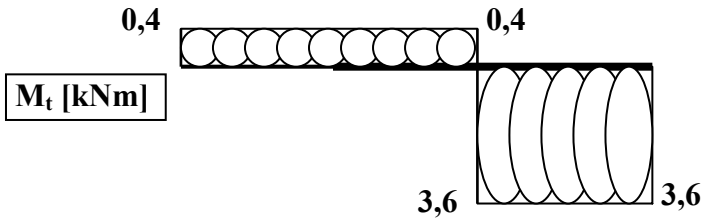


b) Secțiunea periculoasă 1-B, $M_t = 0{,}9412\ M_0 \Rightarrow M_{0,rez} = 2{,}08$ kNm, $M_{0,rig} = 2{,}182$ kNm. Se adoptă $M_{0,cap} = 2{,}08$ kNm

c) $\varphi_1 = \Delta\varphi_{A\text{-}1} = \Delta\varphi_{1\text{-}B} = 1{,}495 \cdot 10^{-3}$ rad $= 0{,}0857^0$

8R.9

a)

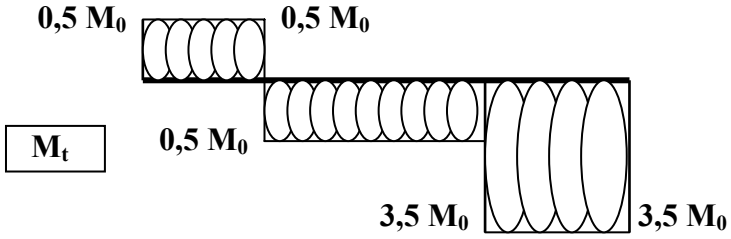


b) Secțiunea periculoasă 1 – B, $M_t = 3{,}6$ kNm $\Rightarrow d_{rez} = 72$ mm, $d_{rig} = 97$ mm. Se adoptă d = 97 mm

c) $\varphi_2 = \Delta\varphi_{1\text{-}2} = \Delta\varphi_{1\text{-}B} = 1{,}151 \cdot 10^{-4}$ rad $= 0{,}0066^0$

8R.10

a)

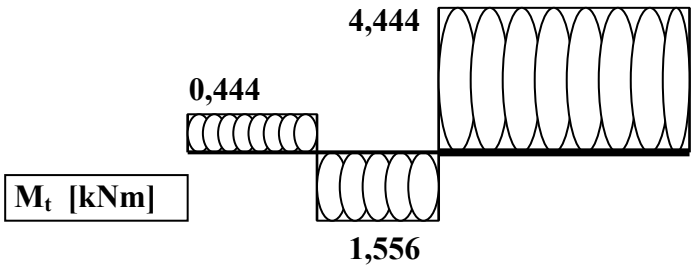


b) $M_{t,max} = 3{,}5\ M_0 \Rightarrow M_0 = 3{,}364$ kNm

c) = $\Delta\varphi_{1\text{-}2} = 2{,}142 \cdot 10^{-3}$ rad $= 0{,}1228^0$

8R.11

a)

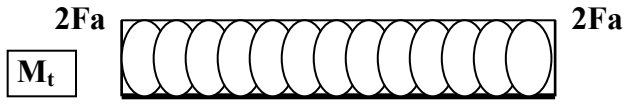


b) Secțiunea periculoasă 2 – B, $M_t = 4{,}444$ kNm $\Rightarrow \tau_{max} = 22{,}64$ MPa, $\theta_{max} = 5{,}661 \cdot 10^{-6}$ rad/mm = $0{,}324\ ^0$/m

c) $\varphi_2 = \Delta\varphi_{A-2} = \Delta\varphi_{2-B} = 5{,}661 \cdot 10^{-4}$ rad = $0{,}032^0$

8R.12

a)

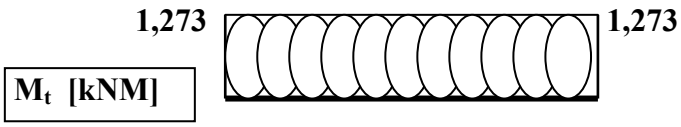


b) $F_{cap} = 3{,}3912$ kN

c) $\varphi_{max} = 16{,}67 \cdot 10^{-3}$ rad = $0{,}955^0$

8R.13

a)



b) $\tau_{max} = 7{,}45$ MPa

c) $\varphi_{0-1} = 0{,}1863 \cdot 10^{-3}$ rad = $0{,}0106^0$

8R.14

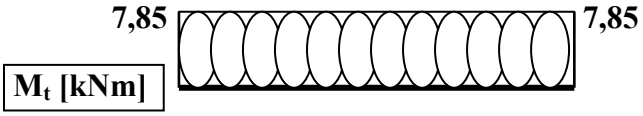
a) $M_t = 5{,}024$ kNm

b) N = 152 rot/min

c) $\theta_{max} = 0{,}156 \cdot 10^{-4}$ rad = $(0{,}89 \cdot 10^{-3})^0$

8R.15

a)



b) $P_0 = P_1 = 82{,}198$ kW

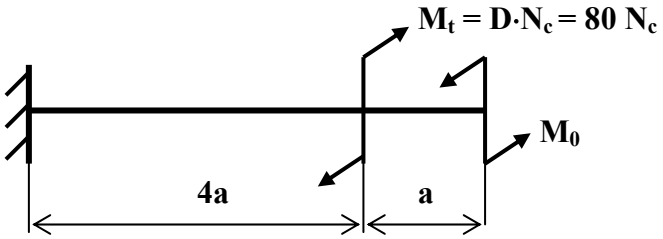
c) $\Delta\varphi = 0{,}8\cdot10^{-2}$ rad $= 0{,}458^0$

8R.16

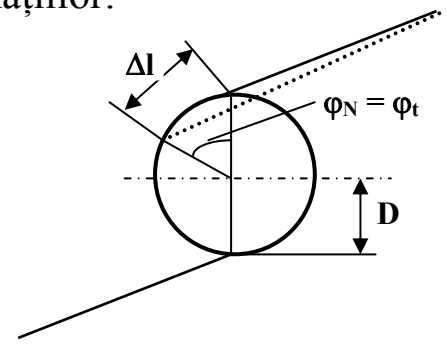
a) $M_{t,max} = 4{,}108$ kNm, $P_{0,max} = 86$ kW
b) $\tau_{max} = 20{,}93$ MPa.

8R.17

Schema echivalentă pentru arbore:



Schema deformațiilor:



$tg\varphi_N \cong \varphi_N = \Delta l / (D/2)$, $\varphi_t = (M_0 - M_t)\cdot 4a / G\cdot I_p \Rightarrow$

$$\frac{2\cdot N_c\cdot 10a}{E\cdot A_c\cdot D} = \frac{(M_0 - M_t)\cdot 8a}{G\cdot I_p} \qquad (1)$$

$$M_t = D\cdot N_c = 80\cdot N_c \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) $\Rightarrow N_C = 1{,}48$ kN, $M_t = 0{,}1184$ kNm
a) Secțiunea periculoasă la torsiune este înspre capătul liber al barei. $M_{t,max} = 0{,}12$ kNm , $\tau_{max} = 76$ MPa.
b) $N_c = 1{,}48$ kN, $\sigma_{c,max} = N_c / A_c = 3{,}7$ MPa

c) $\varphi_{1,max} = 1{,}14^0$

8R.18

a) $\tau_{max} \cong 30{,}6$ MPa
b) $\sigma_{max} \cong 31{,}8$ MPa

8R.19

a) $\tau_{max} \cong 100$ MPa
b) $\sigma_{max} \cong 100$ MPa

8R.20

a) $\tau_{max} \cong 0{,}052\ M_0/\pi \cdot d^3$
b) $\sigma_{1,max} \cong 3{,}3\ M_0/\pi \cdot d^3$, $\sigma_{2,max} \cong 0{,}45\ M_0/\pi \cdot d^3$
c) $\Delta\varphi_{B\text{-}C} \cong 0{,}57\ M_0 \cdot a/G \cdot \pi \cdot d^4$

BIBLIOGRAFIE

1. **Babeu T**: *Rezistența Materialelor*, Lito I.P."T.V." Timişoara, 1980
2. **Beleaev N. M**: *Rezistența Materialelor*, Vol.I - II, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1956
3. **Buga M., ş. a.** *Probleme alese de rezistența materialelor,* Lito. U. P. Bucureţti, 1995
4. **Buzdugan G.**: *Rezistența Materialelor*, Ed. Academiei R.S.R., Bucureşti, 1986
5. **Deutsch I., Goia I., Curtu I., Neamțu T., Sperchez F.**: *Probleme de Rezistența Materialelor*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983
6. **Neguț N**., *Rezistența materialelor. Teorie şi aplicații.* Editura POLITEHNICA Timişoara, 2003
7. **Hajdu I.:** *Rezistența Materialelor*, Lito I.P. "T.V." Timişoara, 1983
8. **Hluşcu M.,** *Culegere de probleme din rezistența materialelor*, Fascicula 2, Lito U. P. T., 1995
9. **Miroliubov I. ş. a.** *Resistance des materiaux*, Editions MIR, Moscou, 1971
10. **Ryder, G., H.**, *Strength of Materials,* Macmillan Third Edition in S. I. Units, 1969
11. **Tripa P.** *Etape şi modele de rezolvare a problemelor de rezistența materialelor*, Vol 1, Editura MIRTON, Timişoara, 1998
12. *** * *** *Probleme date la concuesul professional-ştiințific „C. C. Teodorescu" la Rezistența materialelor*